

## Corrigé du T. D. A13

### Séries

① Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

- a. Calculer les 4 premières sommes partielles de la série de terme général  $u_n$ .
- b. Établir une conjecture pour exprimer la valeur des sommes partielles en fonction de  $n$ , et démontrer cette conjecture.
- c. Démontrer que la série de terme général  $u_n$  est convergente et donner sa somme.
- d. Calculer les restes  $R_n$  de cette série.

a. On calcule :

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{1}{6} \quad u_3 = \frac{1}{12} \quad u_4 = \frac{1}{20}$$

Les sommes partielles associées sont donc :

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{2}{3} \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3}{4} \quad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{4}{5}$$

b. On note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $S_n = \frac{n}{n+1}$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Initialisation. Comme  $S_1 = \frac{1}{2}$  alors la propriété  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain entier  $n \geq 2$  la propriété  $\mathcal{P}_{n-1}$  est vraie :  $S_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ .

On calcule alors  $S_n$  :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = S_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence  $S_{n-1} = \frac{n-1}{n}$  :

$$S_n = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est donc vraie. L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

c. Par équivalence :

$$S_n = \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

On en déduit que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 1, et donc la série de terme général  $u_n$  converge, de somme 1. Ceci s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

d. Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - S_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad R_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

② Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n \geq 3} \frac{8}{3^{n-1}} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{5^n}{6^n} \quad \sum_{n \geq 1} e^{-n} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n}$$

On sait que si  $q$  est un complexe tel que  $|q| < 1$  alors la série de terme général  $q^n$  converge, quel que soit le rang  $m$  auquel elle débute. De plus sa somme est :

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}$$

• On écrit :

$$\sum_{n \geq 3} \frac{8}{3^{n-1}} = 24 \sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme  $|\frac{1}{3}| < 1$  alors cette série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{8}{3^{n-1}} = 24 \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

• On écrit :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{5^n}{6^n} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Comme  $|\frac{5}{6}| < 1$  alors cette série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{6^n} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 5$$

• On écrit :

$$\sum_{n \geq 1} e^{-n} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Comme  $|\frac{1}{e}| < 1$  alors cette série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

• On écrit :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme  $|\frac{3}{4}| < 1$  et  $|\frac{1}{2}| < 1$  alors les séries de termes généraux  $(\frac{3}{4})^n$  et  $(\frac{1}{2})^n$  convergent. Par linéarité la série ci-dessus converge et sa somme est :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} - 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4 - 2 \times 2 = 0$$

③ Soit  $q$  un réel. Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général  $nq^n$  converge si et seulement si  $|q| < 1$ , et de calculer sa somme dans ce cas.

a. Justifier que la série  $\sum_{n \geq 0} nq^n$  diverge si  $|q| \geq 1$ .

Soit  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in ]-1, 1[$ .

b. Exprimer  $S_n(x)$  sans signe somme.

c. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction  $S_n$  est dérivable et donner deux expressions de sa dérivée, avec et sans signe somme.

d. En déduire, pour tout  $x$  tel que  $|x| < 1$ , la limite de  $xS'_n(x)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

e. Conclure.

a. Si  $|q| \geq 1$  alors  $|nq^n| \geq n$ , donc la suite  $(nq^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, et donc la série de terme général  $nq^n$  diverge grossièrement.

b. Comme  $x \neq 1$  alors la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique donne :

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

c. La fonction  $x \mapsto S_n(x)$  est polynomiale donc dérivable. En dérivant la première expressions de  $S_n(x)$  on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S'_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$$

En dérivant la seconde expression on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad S'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

d. On déduit de la question précédente :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad xS'_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^k = \frac{x - nx^{n+1} + (n-1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Si  $x = 0$  alors tous les termes ci-dessus sont nuls, donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} xS'_n(x) = 0$ .

Supposons que  $x \neq 0$ . Comme  $|x| < 1$  alors  $|\frac{1}{x}| > 1$ , donc  $n$  est négligeable devant  $(\frac{1}{x})^n$  par croissances comparées. Ceci montre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$$

Or on peut écrire :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad xS'_n(x) = \frac{x - nx^n x + nx^n x^2 - x^n x^2}{(1-x)^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} xS'_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

On remarque que ceci est valable aussi pour  $x = 0$ .

e. Nous venons de démontrer que :

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ceci signifie exactement que si  $|q| < 1$  alors la série de terme général  $nq^n$  converge, et sa somme est :

$$\sum_{n \geq 0} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

④ Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a.  $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n}$

b.  $\sum_{n \geq 1} \ln \left( \cos \frac{1}{n} \right)$

c.  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \right)$

d.  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n + \frac{3}{2}}} \right)$

a. Les termes de cette série sont positifs, et on peut en donner un équivalent :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2 \ln^2 n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln^2 n} \quad (1)$$

À partir d'un certain rang  $\ln n \geq 1$ , à partir du rang 3 pour être précis. Donc :

$$\forall n \geq 3 \quad 0 \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln^2 n} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

La série  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann avec  $s = \frac{3}{2}$ . Comme  $s > 1$  alors elle converge.

D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP) l'encadrement (2) implique que la série  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln^2 n}$  converge.

D'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs (TESTP) l'équivalence (1) implique que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n}$  converge.

b. On utilise un développement limité :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{(0)}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{(0)}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit :

$$-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Ceci justifie que les termes  $-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$  sont positifs, au moins à partir d'un certain rang.

De plus la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann avec  $s = 2$ . Comme  $s > 1$  alors elle est convergente.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série  $\sum\left(-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$  est convergente.

Par linéarité la série  $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$  est convergente.

c. On remarque un telescopage. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt[4]{k}} - \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}} \right)$$

Alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[4]{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[4]{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[4]{k}} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt[4]{k}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$$

On en déduit  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$  et donc la série converge.

d. On utilise un développement limité. Pour ceci on pose  $h = \frac{1}{n}$ . Alors  $n = \frac{1}{h}$ , puis :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n + \frac{3}{2}}} &= \left(\frac{1}{h}\right)^{-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{h} + \frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} = h^{\frac{1}{4}} \left(1 - \left(1 + \frac{3}{2}h\right)^{\frac{1}{4}}\right) \\ &\underset{(0)}{=} h^{\frac{1}{4}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}h + o(h)\right)\right) \underset{(0)}{=} \frac{3}{8}h^{\frac{5}{4}} + o\left(h^{\frac{5}{4}}\right) \underset{(h \rightarrow 0)}{\sim} \frac{3}{8}h^{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n + \frac{3}{2}}} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{3}{8} \times \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$$

Ainsi la série  $\sum\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n + \frac{3}{2}}}\right)$  est à termes positifs au moins à partir d'un certain rang.

De plus la série  $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$  est une série de Riemann avec  $s = \frac{5}{4}$ . Comme  $s > 1$  alors elle converge.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n + \frac{3}{2}}}\right)$  converge.



1 Pour tout entier  $n > 0$  on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$$

a. Déterminer deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2}$$

b. En déduire que la série  $\sum u_n$  converge et donner sa somme.

a. On calcule :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2} \iff \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{2\alpha + n(\alpha + \beta)}{n^2 + 2n}$$

Cette dernière égalité a lieu pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si  $2\alpha = 1$  et  $\alpha + \beta = 0$ , ce qui donne :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

b. Les sommes partielles de la série  $\sum u_n$  sont :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

D'après la question précédente on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

On a alors un télescopage :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$ , donc la série  $\sum u_n$  converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{3}{4}$$

Remarque. On pouvait dès le début remarquer que  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann avec  $s = 2$ , comme  $s > 1$  alors elle converge, et donc par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série  $\sum u_n$  converge.

Mais ceci ne nous donne aucune indication sur sa somme.

**2** Reproduire l'exercice précédent avec la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{(n+2)(n+5)}$$

De la même façon que dans l'exercice précédent on obtient  $\alpha = \frac{1}{3}$  et  $\beta = -\frac{1}{3}$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+5} \right)$$

Ensuite les sommes partielles sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \frac{13}{36} \left( 1 - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right)$$

On en déduit que la série converge et que sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{13}{36}$$

**3** Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et donner leurs valeurs.

a. $\sum_{n \geq 2} \frac{5 + (-1)^n}{4^n}$	b. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + 1}{3^n}$	c. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$	d. $\sum_{n \geq 1} \frac{2n + 1}{(n^2 + n)^2}$
e. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$	f. $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n}$	g. $\sum_{n \geq 1} \frac{n2^n}{(n-1)!}$	h. $\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{2}{n^2 + 3n} \right)$
i. $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n}$	j. $\sum_{n \geq 0} \int_n^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$	k. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$	

a. On remarque que  $\frac{5+(-1)^n}{4^n} = 5\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ .

Comme  $|\frac{1}{4}| < 1$  et  $|\frac{-1}{4}| < 1$  alors les séries de termes généraux  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  et  $\left(-\frac{1}{4}\right)^n$  convergent, donc par linéarité la série converge et sa somme est :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{5 + (-1)^n}{4^n} = 5 \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = 5 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{7}{15}$$

b. Comme  $|\frac{1}{3}| < 1$  et  $|\frac{2}{3}| < 1$  alors par linéarité cette série converge et sa somme est :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + 1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

c. On commence par simplifier l'expression du terme général :

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

On peut prouver par équivalence des séries à termes positifs et résultats sur les séries de Riemann que cette série converge, mais on ne pourra en déduire sa somme.

Il faut utiliser la réduction en éléments simples puis un télescopage.

La réduction en éléments simple est :

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{2}{n(n-1)} = 2 \left( \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} \right) = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}$$

Les sommes partielles sont donc :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}} = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{2}{k}$$

On calcule :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{2}{k} = 2 - \frac{2}{n}$$

La suite  $(S_n)_{n \geq 2}$  converge vers 2 donc la série de terme général  $\frac{1}{\binom{n}{2}}$  converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 2$$

d. On fait apparaître un télescopage grâce à l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

On en déduit les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1 donc la série de terme général  $\frac{2n+1}{n^2+n}$  converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} = 1$$

e. On utilise la méthode suivante qui fait apparaître un télescopage :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

On peut calculer les sommes partielles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1 donc la série de terme général  $\frac{n}{(n+1)!}$  converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

f. Comme  $\left| \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \right| = \frac{1}{2}$  alors  $\left| \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \right| < 1$  donc la série converge et sa somme est :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}}$$

Il reste à calculer ce complexe :

$$\frac{1}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}} = \frac{2}{2 - \left( \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{4}{3 - i\sqrt{3}} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La série admet donc pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

g. Le changement d'indice  $m = n - 1$  donne  $\frac{n2^n}{(n-1)!} = \frac{(m+1)2^{m+1}}{m!}$ .

Si  $m > 0$  alors  $\frac{(m+1)2^{m+1}}{m!} = 4\frac{2^{m-1}}{(m-1)!} + 2\frac{2^m}{m!}$ .

Par propriété de la série exponentielle la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$  converge vers  $e^2$ . Par linéarité la série proposée converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(n-1)!} = 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{m-1}}{(m-1)!} + 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!} = 4e^2 + 2e^2 = 6e^2$$

h. On utilise un télescopage. On définit les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{2}{k^2 + 3k} \right)$$

On remarque :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{2}{k^2 + 3k} = \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 3k} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - \sum_{k=1}^n \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k+3) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+2} \ln k - \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=4}^{n+3} \ln k \\ &= \ln(n+1) + \ln 3 - \ln 1 - \ln(n+3) = \ln 3 + \ln \frac{n+1}{n+3} \end{aligned}$$

Comme  $(n+1) \underset{+\infty}{\sim} (n+3)$  alors  $\frac{n+1}{n+3}$  converge vers 1, puis la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ln 3$ . En conséquence la série converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{2}{n^2 + 3n} \right) = \ln 3$$

i. On remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n} = \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \right)^n \right]$

Comme  $\left| \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$  alors la série de terme général  $\left( \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \right)^n$  converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}} = \frac{3(5 + i\sqrt{3})}{14}$$

En conséquence la série de terme général  $\frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n}$  converge, sa somme est la partie réelle de la précédente, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n} = \frac{15}{14}$$

j. Les sommes partielles associées à la série sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$$

Grâce à la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \int_0^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$$

On peut donc calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \int_0^{n+1} \frac{1}{2} 2(2t+3)^{-2} dt = \left[ -\frac{1}{2} (2t+3)^{-1} \right]_0^{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+5)}$$

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{6}$  donc la série de terme général  $\int_n^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$  converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2} = \frac{1}{6}$$

k. Justifions d'abord que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$  converge. Pour ceci on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

La série  $\sum \frac{1}{2^n}$  converge, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$  converge.

Soit  $(S_n)$  les sommes partielles de cette série. Alors la suite extraite  $(S_{2n-1})$  converge vers la somme de la série. On sépare les termes pairs et impairs :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^{2k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{16^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k}$$

Comme  $\left|\frac{1}{16}\right| < 1$  et  $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$  alors les séries géométriques  $\sum \left(\frac{1}{16}\right)^n$  et  $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$  convergent. La somme de la série est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{2(1 - \frac{1}{4})} = \frac{26}{15}$$

4 Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :  $u_n = \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

a. Simplifier l'expression :  $\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x}$

b. Démontrer que la série de terme général  $u_n$  converge et calculer sa somme.

a. La formule pour  $\tan 2x$  donne :

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} = \frac{1}{\tan x} - \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} = \tan x$$

Donc finalement :

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \tan x$$

b. On peut prouver que la série converge par équivalence. En effet, l'équivalence  $\tan u \underset{(0)}{\sim} u$  donne :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} \times \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

La série géométrique de terme général  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$  converge car  $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ , les termes sont positifs car  $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$ , donc par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série de terme général  $u_n$  converge.

Mais ceci ne permet pas de calculer la somme.

On définit alors les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

La formule obtenue dans la question précédente donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \quad \tan \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2^k}}$$

Mais elle n'est pas valable pour  $k = 1$ , car  $\frac{\pi}{2}$  n'admet pas de tangente.

On écrit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k$$

On calcule  $u_1 = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ , puis on applique la formule de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} \left( \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2^k}} \right)$$

Ceci fait apparaître un télescopage :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{\pi}{2^k}} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

L'équivalence  $\tan u \underset{(0)}{\sim} u$  montre que :

$$S_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2^n \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi la série de terme général  $u_n$  converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$$

**5** Pour tout  $n \geq 2$  on pose :

$$u_n = -\ln \left( \cos \frac{\pi}{2^n} \right)$$

On note  $S_n$  la somme partielle associée à  $u_n$  puis :

$$T_n = S_n - \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right)$$

- Démontrer que la suite  $(T_n)$  est arithmétique.
- En déduire le terme général de  $S_n$ .
- Démontrer que la série de terme général  $u_n$  est convergente et calculer sa somme.

a. Par définition des sommes partielles :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = \sum_{k=2}^n \left( -\ln \left( \cos \frac{\pi}{2^k} \right) \right)$$

Ceci donne :

$$\forall n \geq 2 \quad T_n = -\sum_{k=2}^n \ln \left( \cos \frac{\pi}{2^k} \right) - \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right)$$

On calcule alors, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= -\sum_{k=2}^{n+1} \ln \left( \cos \frac{\pi}{2^k} \right) + \sum_{k=2}^n \ln \left( \cos \frac{\pi}{2^k} \right) - \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) + \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right) \\ &= -\ln \left( \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) - \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) + \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right) \\ &= \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

Si on pose  $a = \frac{\pi}{2^{n+1}}$  alors  $2a = \frac{\pi}{2^n}$ , et donc

$$\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \ln \frac{\sin 2a}{\cos a \sin a} = \ln 2$$

On a donc obtenu :

$$\forall n \geq 2 \quad T_{n+1} - T_n = \ln 2$$

Ceci montre que la suite  $(T_n)_{n \geq 2}$  est arithmétique de raison  $\ln 2$ .

b. Le terme général de la suite  $(T_n)$  est donc :

$$\forall n \geq 2 \quad T_n = T_2 + (n - 2) \ln 2$$

Or on calcule que :

$$T_2 = S_2 - \ln \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\ln \left( \cos \frac{\pi}{4} \right) - \ln \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) = -2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

En conséquence :

$$\forall n \geq 2 \quad T_n = (n - 1) \ln 2$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = T_n + \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right) = (n - 1) \ln 2 + \ln \left( \sin \frac{\pi}{2^n} \right)$$

c. On remarque que :

$$\forall n \geq 2 \quad S_n = \ln \left( 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n} \right)$$

L'équivalence  $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$  montre que :

$$2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n} \underset{(+\infty)}{\sim} 2^{n-1} \frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2}$$

Ceci montre que  $(2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n})$  converge vers  $\frac{\pi}{2}$ , et donc  $(S_n)$  converge vers  $\ln \left( \frac{\pi}{2} \right)$ .

La série de terme général  $u_n$  est donc convergente, sa somme est :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left( -\ln \left( \cos \frac{\pi}{2^n} \right) \right) = \ln \frac{\pi}{2}$$

**6** Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

- |   |   |   |                                       |
|---|---|---|---------------------------------------|
| a. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+3}$  | b. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$                      | c. $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$                       | d. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{3n^2}$ |
| e. $\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2}{3^n}$   | f. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^3}$                          | g. $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{n!}$                          | h. $\sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n}$    |
| i. $\sum_{n \geq 0} \frac{\arctan n}{n^2+1}$  | j. $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln n}{e^n}$                      | k. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{\operatorname{ch} n}$            | l. $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n}}$    |
| m. $\sum_{n \geq 1} \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ | n. $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{e}{n} \right)^n$               | o. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n} - 1}$              |                                       |
| p. $\sum_{n \geq 1} \sin\left( (n^2+1) \frac{\pi}{n} \right)$                                   | q. $\sum_{n \geq 1} \left( \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right)$ | r. $\sum_{n \geq 1} \left( \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \right)$ |                                       |

a. La série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente, et par équivalence :  $\frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$

La série  $\sum \frac{1}{n+3}$  est à termes positifs, donc par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs elle est divergente.

b. La série  $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$  peut s'écrire  $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$ .

C'est une série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^s}$  avec  $s = \frac{1}{4}$ . Comme  $s \leq 1$  alors elle est divergente.

c. La série  $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$  est alternée. La suite  $\left( \frac{1}{\ln n} \right)_{n \geq 2}$  est décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées la série  $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$  converge.

d. Par croissances comparées  $n^2 = o(3^n)$ . On en déduit que la suite  $\left( \frac{3^n}{3n^2} \right)$  tend vers  $+\infty$ , et donc la série  $\sum \frac{3^n}{3n^2}$  diverge grossièrement.

e. On démontre que la suite  $\left( \frac{3n^2}{3^n} \right)$  est négligeable devant la suite  $\left( \frac{1}{2^n} \right)$ . On aurait aussi pu démontrer qu'elle est négligeable devant la suite  $\left( \frac{1}{n^2} \right)$  par exemple.

Pour ceci on écrit :

$$\frac{\frac{3n^2}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = 3 \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Par croissances comparées, pour tout réel  $a$  strictement supérieur à 1 on a  $n^2 = o(a^n)$ .

En particulier pour  $a = \frac{3}{2}$  on a  $n^2 = o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ , donc  $\frac{2^n n^2}{3^n}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , et ainsi  $\frac{3n^2}{3^n} = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ .

La série géométrique  $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$  est convergente car  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ .

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série  $\sum \frac{3n^2}{2^n}$  est convergente.

f. La suite  $\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$  est négligeable devant la suite  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . En effet :

$$\frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$$

Ceci car  $\ln n = o(n)$  par croissances comparées. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série  $\sum \frac{\ln n}{n^3}$  est convergente.

- g. La série  $\sum \frac{1}{n!}$  est convergente car il s'agit de la série exponentielle  $\sum \frac{x^n}{n!}$  avec  $x = 1$ .  
De plus ses termes sont positifs. Comme la suite  $(\cos n)$  est bornée alors :

$$\frac{\cos n}{n!} = O\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Par théorème de domination la série  $\sum \frac{\cos n}{n!}$  est absolument convergente donc convergente.

Remarque. Comme  $\cos n = \operatorname{Re}(e^{in})$  alors on peut démontrer que la somme de cette série est  $e^{\cos 1} \cos(\sin 1)$ .

- h. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{i^k}{k}$ .

On note ensuite, toujours pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k}$  et  $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ .

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n + iV_n = \sum_{k=1}^n \frac{i^{2k}}{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{i^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{i^k}{k} = S_{2n+1}$$

Les suites  $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $\left(\frac{1}{2k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  sont décroissantes et convergent vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées les séries  $\sum \frac{(-1)^k}{2k}$  et  $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$  convergent.

Par somme la série de terme général  $\frac{i^n}{n}$  converge.

Plus précisément les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent, donc la suite  $(S_{2n+1})$  converge. Comme  $S_{2n} = S_{2n+1} - \frac{i^{2n+1}}{2n+1}$  alors la suite  $(S_{2n})$  converge vers la limite de  $(S_{2n+1})$ .

Par théorème comme les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  convergent vers la même limite alors la suite  $(S_n)$  converge vers cette limite, et donc la série de terme général  $\frac{i^n}{n}$  converge.

Remarque. On peut prouver que la somme est égale à  $-\frac{\ln 2}{2} + i\frac{\pi}{4}$ .

- i. La fonction arc-tangente tend vers  $\frac{\pi}{2}$  en  $+\infty$ , donc :

$$\frac{\arctan n}{n^2 + 1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$$

De plus pour tout  $n$  positif le terme  $\frac{\arctan n}{n^2+1}$  est positif.

La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann, elle est convergente car  $2 > 1$ , donc par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs la série  $\sum \frac{\arctan n}{n^2+1}$  est convergente.

- j. On démontre que la suite  $\left(\frac{n^2 \ln n}{e^n}\right)$  est négligeable devant la suite  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Tout d'abord :

$$\frac{\frac{n^2 \ln n}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4 \ln n}{e^n}$$

Par croissances comparées  $\ln n = o(n)$ , donc :

$$\frac{n^4 \ln n}{e^n} = o\left(\frac{n^5}{e^n}\right)$$

Par croissances comparées  $n^5 = o(e^n)$ , donc la suite  $\left(\frac{n^5}{e^n}\right)$  converge vers 0, puis la suite  $\left(\frac{n^4 \ln n}{e^n}\right)$  converge vers 0 et ainsi la suite  $\left(\frac{n^2 \ln n}{e^n}\right)$  est négligeable devant la suite  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann, elle est convergente car  $2 > 1$ , donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série  $\sum \frac{n^2 \ln n}{e^n}$  est convergente.

k. La série  $\sum \frac{2^n}{\text{ch } n}$  est à termes positifs, lesquels vérifient l'équivalence suivante :

$$\frac{2^n}{\text{ch } n} = 2 \frac{2^n}{e^n + e^{-n}} \underset{(+\infty)}{\sim} 2 \frac{2^n}{e^n} = 2 \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

Comme  $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$  alors la série géométrique  $2 \sum \left(\frac{2}{e}\right)^n$  converge.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série  $\sum \frac{2^n}{\text{ch } n}$  converge.

l. Démontrons que le terme général  $e^{-\sqrt{n}}$  est négligeable devant  $\frac{1}{n^2}$ . Pour ceci on pose  $x = \sqrt{n}$ . Alors :

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = \frac{x^4}{e^x}$$

Par croissances comparées  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$ , donc par composition  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = 0$  et ainsi  $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann, elle est convergente car  $2 > 1$ , donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série  $\sum e^{-\sqrt{n}}$  est convergente.

m. Pour la série  $\sum \left(\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}\right)$  on utilise un développement limité :

$$\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ceci montre :

$$\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n} \underset{(+\infty)}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$$

On en déduit :

$$\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2n^3}$$

En conséquence la suite  $\left(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$  est positive au moins à partir d'un certain rang. De plus la série  $\sum \frac{1}{n^3}$  est une série de Riemann, elle converge car  $3 > 1$ , donc par théorème d'équivalences pour les séries à termes positif la série  $\sum \left(\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$  converge, puis par linéarité (en multipliant par  $-1$ ) la série  $\sum \left(\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}\right)$  converge.

n. Comme  $\left(\frac{e}{n}\right)$  converge vers 0 alors à partir d'un certain rang  $\frac{e}{n} \leq \frac{1}{2}$ . Donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série géométrique  $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$  est convergente car  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ .

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série  $\sum \left(\frac{e}{n}\right)^n$  est convergente.

o. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  notons  $u_n = \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n-1}}$ .

Alors  $(-1)^n u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ , ce qui montre que  $(-1)^n u_n \geq 0$  et donc la série est alternée.

Par contre les premiers termes de la suite  $(u_n)$  sont  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2-1}}, -\frac{1}{\sqrt{3-1}}, 1, -\frac{1}{\sqrt{5-1}}, \dots)$ , ce qui montre que la suite  $((-1)^n u_n)$  n'est pas décroissante. On ne peut donc pas appliquer le critère spécial des séries alternées.

Par quantité conjuguée :

$$\forall n \geq 2 \quad u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} + \frac{1}{n-1}$$

On peut ajouter que  $u_1 = 0$ .

Posons  $v_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ .

On démontre que la suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  est décroissante : on peut calculer  $v_{n+1} - v_n$ , en utilisant deux fois des quantités conjuguées, ou alors on peut étudier la fonction  $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ .

De plus  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

La suite  $(v_n)_{n \geq 2}$  décroît vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées la série  $\sum_{n \geq 2} (-1)^n v_n$  converge.

Par contre la série  $\sum \frac{1}{n-1}$  diverge, par comparaison avec la série harmonique.

Donc la somme des deux diverge, et ainsi la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(-1)^n \sqrt{n-1}}$  diverge.

Ceci montre que l'hypothèse de décroissance du critère spécial des séries alternées est indispensable.

p. On remarque :  $\sin((n^2 + 1)\frac{\pi}{n}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{n}) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{n}$

La série  $\sum \sin((n^2 + 1)\frac{\pi}{n})$  est alternée. Comme la fonction sinus est croissante sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$  alors la suite  $(\sin \frac{\pi}{n})$  est décroissante.

D'après le critère spécial des séries alternées la série  $\sum \sin((n^2 + 1)\frac{\pi}{n})$  converge.

q. On cherche un équivalent en  $+\infty$  de  $(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$ . Pour ceci on pose  $h = \frac{1}{n}$ , ce qui donne  $n = \frac{1}{h}$  puis :

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h - \left(\frac{1}{h}\right)^h = \frac{1}{h^h} \left((1+h)^h - 1\right)$$

Tout d'abord  $\frac{1}{h^h} = e^{-h \ln h}$ , par croissances comparées  $\lim_{h \rightarrow 0} h \ln h = 0$ , donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^h} = 1$ .

Ensuite grâce aux équivalences  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  et  $\ln(1+u) \underset{(0)}{\sim} u$  :

$$(1+h)^h - 1 = e^{h \ln(1+h)} - 1 \underset{(0)}{\sim} h \ln(1+h) \underset{(0)}{\sim} h^2$$

On en déduit :

$$\frac{1}{h^h} \left((1+h)^h - 1\right) \underset{(0)}{\sim} h^2$$

Et donc :

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Les termes sont positifs. La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann, elle est convergente car  $2 > 1$ , donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série  $\sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$  est convergente.

r. On cherche un équivalent en  $+\infty$  de  $(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n})$  en posant  $h = \frac{1}{n}$ . Alors  $n = \frac{1}{h}$  puis :

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} &= n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{1}{h}\right)^h - \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{h}{1+h}} \\ &= e^{-h \ln h} - e^{-\frac{h}{1+h} \ln h} = e^{-h \ln h} \left(1 - e^{-\frac{h}{1+h} \ln h + h \ln h}\right) \\ &= e^{-h \ln h} \left(1 - e^{\frac{h^2}{1+h} \ln h}\right)\end{aligned}$$

Par croissances comparées en zéro :  $h \ln h \rightarrow 0$ . On en déduit :  $e^{-h \ln h} \rightarrow 1$ .

Ensuite grâce à l'équivalence  $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$  :

$$e^{-h \ln h} \left(1 - e^{\frac{h^2}{1+h} \ln h}\right) \underset{(0)}{\sim} -\frac{h^2}{1+h} \ln h \underset{(0)}{\sim} -h^2 \ln h = -\frac{1}{n^2} \ln \frac{1}{n} = \frac{\ln n}{n^2}$$

On a démontré :

$$\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

Ceci justifie déjà qu'à partir d'un certain rang la suite  $(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n})$  est positive.

Ensuite on compare la suite  $\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$  à la suite  $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$  :

$$\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Par croissances comparées en  $+\infty$  on sait que  $\ln n = o(n^\alpha)$  pour tout  $\alpha$  strictement positif, donc ici  $\ln n = o(n^{\frac{1}{2}})$  puis :

$$\frac{\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann, elle est convergente car  $\frac{3}{2} > 1$ , donc par théorème de comparaison la série  $\sum \frac{\ln n}{n^2}$  est convergente.

Par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs la série  $\sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$  est convergente.

**7** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes positifs.

a. On suppose que la série  $\sum u_n$  converge. Démontrer que les séries

$$\sum u_n^2 \qquad \sum \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \sum \frac{u_n}{1-u_n}$$

convergent.

b. Les réciproques sont-elles vraies ?

a. Comme la série  $\sum u_n$  converge alors la suite  $(u_n)$  tend vers 0, donc  $0 \leq u_n < 1$  à partir d'un certain rang, puis  $0 \leq u_n^2 \leq u_n$ .

Par TCSTP la série  $\sum u_n^2$  converge.

Par TESTP,  $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$  et  $\frac{u_n}{1-u_n} \sim u_n$  donc les séries  $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$  et  $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$  convergent.

b. La réciproque de la première est fautive :  $u_n = \frac{1}{n}$  par exemple.

Si les séries  $\sum \frac{u_n}{1 \pm u_n}$  convergent alors les suites  $\left(\frac{u_n}{1 \pm u_n}\right)$  convergent vers 0, donc les suites  $\left(\frac{1}{\frac{1}{u_n} \pm 1}\right)$  également. On en déduit

$$\frac{1}{u_n} \pm 1 \rightarrow \pm \infty \quad \frac{1}{u_n} \rightarrow \pm \infty \quad u_n \rightarrow 0$$

Ceci donne l'équivalence  $\frac{u_n}{u_n \pm 1} \sim u_n$ , donc par TESTP les réciproques des deux dernières implications sont vraies.

**8** Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

$$\text{a. } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} \qquad \text{b. } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n} \qquad \text{c. } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n} \qquad \text{d. } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

On pourra en comparer certaines avec une intégrale.

a. La suite  $\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$  est négligeable devant la suite  $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$  :

$$\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Par croissances comparées en  $+\infty$  on sait que  $\ln n = o(n^\alpha)$  pour tout  $\alpha$  strictement positif, donc ici  $\ln n = o(n^{\frac{1}{2}})$  puis :

$$\frac{\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est une série de Riemann, elle est convergente car  $\frac{3}{2} > 1$ , donc par théorème de comparaison la série  $\sum \frac{\ln n}{n^2}$  est convergente.

b. De même on obtient :  $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}\right)$  donc la série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln^2 n}$  diverge.

c. On compare la série  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  à une intégrale.

On pose  $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ . La fonction  $f$  est définie, continue, décroissante que  $]1, +\infty[$ .

On en déduit :

$$\forall n \geq 2 \quad \int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq f(2) + \int_2^n f(t) dt$$

Ceci donne :

$$\forall n \geq 2 \quad \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$$

On calcule :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} = \left[ \ln |\ln t| \right]_2^{n+1} = \ln \frac{\ln(n+1)}{2}$$

Comme  $\ln \frac{\ln(n+1)}{2} \xrightarrow{+\infty} +\infty$  alors par théorème de comparaison la série  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  diverge.

d. De même en posant  $f(t) = \frac{1}{t \ln^2 t}$  :

$$\forall n \geq 2 \quad \int_2^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) \leq f(2) + \int_2^n f(t) dt$$

Ceci donne :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2 k} \leq \frac{1}{2 \ln^2 2} + \int_2^n \frac{dt}{t \ln^2 t}$$

On calcule :

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln^2 t} = \left[ -\frac{1}{\ln t} \right]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$$

On en déduit que la suite  $\left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^2 k} \right)$  est majorée par  $\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}$ .

Or elle est croissante, donc elle converge. Ainsi la série  $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$  est convergente.

Plus généralement, on peut démontrer que la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

Il s'agit des séries de Bertrand, de Joseph Bertrand, 1822 – 1900.

**9** Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n}$  diverge et en donner un équivalent en  $+\infty$ .

Soit  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ .

Cette fonction est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée  $f' : x \mapsto \frac{1-\ln x}{x^2}$ .

Elle est donc décroissante sur  $[e, +\infty[$ .

Elle admet pour primitive la fonction  $F : x \mapsto \frac{\ln^2 x}{2}$ .

Par comparaison avec une intégrale on obtient :

$$\forall n \geq 4 \quad \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2 4}{2} \leq \sum_{k=4}^n \frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln^2 n - \ln^2 3}{2}.$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ .

Il existe des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\ln^2(n+1)}{2} + \alpha \leq S_n \leq \frac{\ln^2 n}{2} + \beta.$$

On en déduit l'équivalence :  $S_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}$ .

Pour la limite de  $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n}$  il faut écrire  $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} = \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^2$ .

**10** Donner un équivalent en  $+\infty$  du reste de la série :  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Comme  $2 > 1$  alors la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, et donc ses restes sont bien définis. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est décroissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . On en déduit que pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  avec  $1 \leq n < m$  :

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^m f(k) \leq \int_n^m f(t) dt$$

Ceci donne :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

Les limites de ces termes pour  $m$  tendant vers  $+\infty$  existent, et par théorème de comparaison :

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$$

On en déduit :  $R_n \sim \frac{1}{n}$ .

**11** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à termes positifs.

On suppose que  $(\sqrt[n]{u_n})$  converge vers  $a \in [0, 1[$ .

- Soit  $q$  un réel appartenant à  $]a, 1[$ . Démontrer qu'à partir d'un certain rang :  $u_n \leq q^n$ .
- En déduire que la série de terme général  $u_n$  est convergente.

a. On pose  $\varepsilon = q - a$ . Comme  $q \in ]a, 1[$  alors  $a < q < 1$  et donc  $\varepsilon > 0$ .

La suite  $(\sqrt[n]{u_n})$  converge vers  $a$  donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \implies \quad |\sqrt[n]{u_n} - a| \leq \varepsilon$$

On a les implications :

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{u_n} - a| \leq \varepsilon &\implies \sqrt[n]{u_n} - a \leq \varepsilon \\ &\implies \sqrt[n]{u_n} \leq a + \varepsilon = q \quad \implies \quad u_n \leq q^n \end{aligned}$$

On a bien démontré qu'à partir d'un certain rang :  $u_n \leq q^n$

b. La série géométrique  $\sum q^n$  est convergente car  $|q| < 1$ .

La suite  $(u_n)$  est positive et majorée par la suite  $(q^n)$  à partir d'un certain rang donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série  $\sum u_n$  est convergente.

**12** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$u_n = H_n - \ln n \quad \text{où} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

a. Écrire  $u_n$  comme somme partielle d'une série.

b. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

Sa limite est la *constante d'Euler*  $\gamma$ .

a. Pour  $n \geq 2$  on calcule  $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , donc  $u_n = \sum_{k=1}^n v_k$  avec  $v_1 = 1$  et :

$$\forall k \geq 2 \quad v_k = \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

b. On calcule  $v_k \sim -\frac{1}{2k^2}$ . La suite  $(-v_k)$  est positive à partir d'un certain rang, et par TESTP la série  $-\sum v_k$  converge, donc la suite  $(u_n)$  converge.

On ne sait pas si  $\gamma$ , sa limite, est rationnelle. Approximativement  $\gamma \simeq 0,5572156649$ .

**13** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

- Démontrer que la suite  $(u_n)$  est positive, puis qu'elle converge et déterminer sa limite.
- Soit  $S_n$  la somme partielle de la série de terme général  $u_n$ . Simplifier  $e^{-S_n}$  et en déduire la nature de la série de terme général  $u_n$ .

- a. La relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  montre que la suite  $(u_n)$  est de signe constant. Or  $u_0 = 1$  donc la suite  $(u_n)$  est positive.

Ceci implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < e^{-u_n} \leq 1$$

Puis comme  $u_n$  est positif :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

Elle est décroissante positive donc par théorème elle converge.

Notons  $\ell$  sa limite. Alors  $(u_{n+1})$  converge vers  $\ell$  par décalage, et  $u_n e^{-u_n}$  converge vers  $\ell e^{-\ell}$  par composition et produit de limites.

La relation  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  donne par unicité de la limite :

$$\ell = \ell e^{-\ell}$$

Ceci impose que  $\ell = 0$  ou  $e^{-\ell} = 1$ , et donc  $\ell = 0$ .

Finalement la suite  $(u_n)$  converge vers 0.

- b. Par définition les sommes partielles de la série  $\sum u_n$  sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On peut alors écrire :

$$e^{-S_n} = e^{-\sum_{k=0}^n u_k} = \prod_{k=0}^n e^{-u_k}$$

La relation de récurrence  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$  donne :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad e^{-u_k} = \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

On fait apparaître un télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-S_n} = \prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\prod_{k=0}^n u_{k+1}}{\prod_{k=0}^n u_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1} u_k}{\prod_{k=0}^n u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} = u_{n+1}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = -\ln u_{n+1}$$

Comme la suite  $(u_n)$  converge vers 0 alors la suite  $(S_n)$  tend vers  $+\infty$  et donc la série  $\sum u_n$  diverge.

**14** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$$

On dit que le produit infini  $\prod u_n$  converge si la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Les produits infinis suivants convergent-ils ?

a.  $\prod_{n \geq 1} \sqrt[n]{2}$       b.  $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$       c.  $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)$       d.  $\prod_{n \geq 3} \left(1 - \frac{2}{n}\right)$       e.  $\prod_{n \geq 1} n \operatorname{sh} \frac{1}{n}$   
 f.  $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$

Pour tout produit infini on se ramène à une série en posant  $S_n = \ln P_n$ .

En effet ceci donne  $S_n = \sum_{k=0}^n \ln u_k$  donc le produit infini  $\prod u_n$  converge si et seulement si la série  $\sum \ln u_n$  converge ou tend vers  $-\infty$ .

On démontre ainsi que les produits b, c, d, e convergent et le produit a diverge.

Le produit f converge si et seulement si  $\alpha > 2$ .

**15** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$$

- a. Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge et que sa somme est inférieure ou égale à 1.  
 b. Démontrer que sa somme est égale à 1 si et seulement si la série  $\sum u_n$  diverge.

- a. On démontre que pour tout  $n \geq 0$  :  $\sum_{k=0}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$

Les sommes partielles sont donc majorées par 1. De plus les  $v_k$  sont positifs donc la suite des sommes partielles est croissante.

Ainsi la série  $\sum v_n$  est convergente.

- b. La somme de la série  $\sum v_n$  est égale à 1 si et seulement si  $\prod(1+u_n) \rightarrow +\infty$ , ce qui équivaut à  $\sum \ln(1+u_n) \rightarrow +\infty$ , puis à  $\sum \ln(1+u_n)$  diverge.

Si  $u_n \rightarrow 0$  alors  $\ln(1+u_n) \sim u_n$ , par TCSTP  $\sum \ln(1+u_n)$  diverge ssi  $\sum u_n$  diverge.

Si  $u_n$  ne converge pas vers 0 alors  $\sum \ln(1+u_n)$  et  $\sum u_n$  divergent grossièrement.

**16** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ .

a. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

On suppose que la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, et que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est réelle, décroissante et qu'elle converge vers 0.

b. Démontrer que la série  $\sum (a_n - a_{n+1})$  converge absolument.

c. En déduire que la série  $\sum ((a_n - a_{n+1}) B_n)$  converge absolument.

d. Démontrer que la série  $\sum (a_n b_n)$  converge.

e. Application. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$  converge.

a. On remarque que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $b_k = B_k - B_{k-1}$ .

Ce résultat reste valable si  $k = 0$ , car  $B_{-1}$  est une somme vide.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^n a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \end{aligned}$$

Cette égalité est connue sous le nom de *transformation d'Abel*.

b. Par hypothèse la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est réelle décroissante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n - a_{n+1} \geq 0.$$

Ceci montre que  $|a_n - a_{n+1}| = a_n - a_{n+1}$ .

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n |a_n - a_{n+1}|$ .

Alors par télescopage :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n &= \sum_{k=0}^n (a_n - a_{n+1}) = \sum_{k=0}^n a_n - \sum_{k=0}^n a_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_n - \sum_{k=1}^{n+1} a_n = a_0 - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Par hypothèse la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0, donc la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie, et ainsi la série  $\sum |a_n - a_{n+1}|$  converge, *i.e.*, la série  $\sum (a_n - a_{n+1})$  converge absolument.

- c. Comme la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée alors la suite  $(|B_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.  
Soit  $M$  un de ses majorants. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |(a_n - a_{n+1})B_n| \leq |a_n - a_{n+1}|M.$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$  converge absolument alors la série  $\sum_{n \geq 0} |a_n - a_{n+1}|$  converge, et donc par linéarité la série  $M \sum_{n \geq 0} |a_n - a_{n+1}|$  converge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série  $\sum_{n \geq 0} |(a_n - a_{n+1})B_n|$  converge.

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})B_n$  converge absolument.

- d. La relation de la première question donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \quad (3)$$

La suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc la suite  $(a_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Comme la série  $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1}) B_n$  converge absolument alors elle converge.

Donc la suite  $\left( \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Par somme la suite  $\left( \sum_{k=0}^n a_k b_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, et donc la série  $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$  converge.

- e. Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$  et  $b_n = e^{inx}$ .

Ajoutons :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ .

Comme  $x$  n'est pas multiple de  $2\pi$  alors  $e^{ix} \neq 1$ . Par somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \sum_{k=1}^n e^{ikx} = \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Par inégalité triangulaire :

$$|B_n| = \frac{1}{|1 - e^{ix}|} |e^{ix} - e^{i(n+1)x}| \leq \frac{1}{|1 - e^{ix}|} (|e^{ix}| + |e^{i(n+1)x}|) \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$$

Ceci montre que la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

Comme  $\alpha > 0$  alors la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est réelle, décroissante et converge vers 0.

D'après le critère d'Abel la série  $\sum a_n b_n$  converge, donc la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$  est convergente.