Corrigé du T. D. A12
Séries

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

a. Calculer les 4 premières sommes partielles de la série de terme général u_n.

b. Établir une conjecture pour exprimer la valeur des sommes partielles en fonction de n, et démontrer cette conjecture.

c. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente et donner sa somme.

d. Calculer les restes R_n de cette série.

a. On calcule :

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = \frac{1}{6} \qquad u_3 = \frac{1}{12} \qquad u_4 = \frac{1}{20}$$

Les sommes partielles associées sont donc :

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = u_1 + u_2 = \frac{2}{3} \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{3}{4} \quad S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{4}{5}$$

b. On note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $S_n = \dfrac{n}{n+1}$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Comme $S_1 = \frac{1}{2}$ alors la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 2$ la propriété $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie : $S_{n-1} = \frac{n-1}{n}$.

On calcule alors S_n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_n = S_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence $S_{n-1} = \frac{n-1}{n}$:

$$S_n = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie. L'hérédité est prouvée.

Conclusion. Par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Par équivalence :

$$S_n = \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1, et donc la série de terme général u_n converge, de somme 1. Ceci s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

d. Par définition :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k - S_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad R_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

2 Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{8}{3^{n-1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{5^n}{6^n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} e^{-n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n}$$

On sait que si q est un complexe tel que $|q| < 1$ alors la série de terme général q^n converge, quel que soit le rang m auquel elle débute. De plus sa somme est :

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}$$

- On écrit :

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{8}{3^{n-1}} = 24 \sum_{n\geqslant 3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ alors cette série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{8}{3^{n-1}} = 24 \frac{\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

- On écrit :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{5^n}{6^n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$ alors cette série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{6^n} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = 5$$

- On écrit :

$$\sum_{n\geqslant 1} e^{-n} = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ alors cette série converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

- On écrit :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 2 \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ alors les séries de termes généraux $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent. Par linéarité la série ci-dessus converge et sa somme est :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 - 2\times 2 = 0$$

3 Soit q un réel. Le but de cet exercice est de démontrer que la série de terme général nq^n converge si et seulement si $|q| < 1$, et de calculer sa somme dans ce cas.

a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ diverge si $|q| \geqslant 1$.

Soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-1, 1\right[$.

b. Exprimer $S_n(x)$ sans signe somme.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction S_n est dérivable et donner deux expressions de sa dérivée, avec et sans signe somme.

d. En déduire, pour tout x tel que $|x| < 1$, la limite de $xS_n'(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

e. Conclure.

a. Si $|q| \geqslant 1$ alors $|nq^n| \geqslant n$, donc la suite $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et donc la série de terme général nq^n diverge grossièrement.

b. Comme $x \neq 1$ alors la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique donne :

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

c. La fonction $x \mapsto S_n(x)$ est polynomiale donc dérivable. En dérivant la première expressions de $S_n(x)$ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$$

En dérivant la seconde expression on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad S_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

d. On déduit de la question précédente :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[\qquad xS_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x - nx^{n+1} + (n-1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

Si $x = 0$ alors tous les termes ci-dessus sont nuls, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} xS_n'(x) = 0$.

Supposons que $x \neq 0$. Comme $|x| < 1$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| > 1$, donc n est négligeable devant $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ par croissances comparées. Ceci montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} nx^n = 0$$

Or on peut écrire :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\qquad xS_n'(x) = \frac{x - nx^n x + nx^n x^2 - x^n x^2}{(1-x)^2}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} xS_n'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

On remarque que ceci est valable aussi pour $x = 0$.

e. Nous venons de démontrer que :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Ceci signifie exactement que si $|q| < 1$ alors la série de terme général nq^n converge, et sa somme est :

$$\sum_{n\geqslant 0} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

---

4 Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}\right)$

---

a. Les termes de cette série sont positifs, et on peut en donner un équivalent :

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2 \ln^2 n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln^2 n} \tag{1}$$

À partir d'un certain rang $\ln n \geqslant 1$, à partir du rang 3 pour être précis. Donc :

$$\forall n \geqslant 3 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln^2 n} \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann avec $s = \frac{3}{2}$. Comme $s > 1$ alors elle converge.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP) l'encadrement (2) implique que la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} \ln^2 n}$ converge.
D'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs (TESTP) l'équivalence (1) implique que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n}$ converge.

b. On utilise un développement limité :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{(0)}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{(0)}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit :

$$-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

Ceci justifie que les termes $-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ sont positifs, au moins à partir d'un certain rang.
De plus la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $s=2$. Comme $s>1$ alors elle est convergente.
Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum\left(-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$ est convergente.
Par linéarité la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

c. On utilise un développement limité. Pour ceci on pose $h=\frac{1}{n}$. Alors $n=\frac{1}{h}$, puis :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}&=\left(\frac{1}{h}\right)^{-\frac{1}{4}}-\left(\frac{1}{h}+\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=h^{\frac{1}{4}}\left(1-\left(1+\frac{3}{2}h\right)^{\frac{1}{4}}\right)\\&\underset{(0)}{=}h^{\frac{1}{4}}\left(1-\left(1-\tfrac{1}{4}\times\tfrac{3}{2}h+o(h)\right)\right)\underset{(0)}{=}\tfrac{3}{8}h^{\frac{5}{4}}+o\left(h^{\frac{5}{4}}\right)\underset{(h\to 0)}{\sim}\tfrac{3}{8}h^{\frac{5}{4}}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}\underset{(+\infty)}{\sim}\frac{3}{8}\times\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$$

Ainsi la série $\sum\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}\right)$ est à termes positifs au moins à partir d'un certain rang.
De plus la série $\sum\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est une série de Riemann avec $s=\frac{5}{4}$. Comme $s>1$ alors elle converge.
Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}-\frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}\right)$ converge.

5 Donner un équivalent de $\binom{2n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Grâce à la formule de Stirling on obtient :

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\underset{(+\infty)}{\sim}\frac{\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2n\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}=\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

6 Démontrer que les séries suivantes sont convergentes.

a. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{\sin n}{n^2}$ b. $\sum\limits_{n\geqslant 0}e^{(in-1)n}$

a. On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad|\sin n|\leqslant 1$$

On en déduit :

$$\frac{\sin n}{n^2}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait aussi que la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente, car c'est une série de Riemann avec $s=2>1$

Par théorème de domination, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente alors la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente, donc convergente.

b. On calcule le module :

$$\left|e^{(in-1)n}\right| = \left|e^{in^2-n}\right| = \left|e^{in^2}e^{-n}\right| = e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

La série $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{e}$. Comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ alors elle est convergente.

De plus ses termes sont positifs, et comme

$$e^{(in-1)n} = O\Big(\left(\tfrac{1}{e}\right)^n\Big)$$

alors par théorème de domination la série $\sum e^{(in-1)n}$ est absolument convergente, donc convergente.

1 Pour tout entier $n > 0$ on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$$

a. Déterminer deux constantes réelles α et β telles que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2}$$

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et donner sa somme.

a. On calcule :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{n^2+2n} = \frac{2\alpha + n(\alpha+\beta)}{n^2+2n}$$

Cette dernière égalité a lieu pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $2\alpha = 1$ et $\alpha + \beta = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{1}{2}$$

b. Les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

D'après la question précédente on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{\frac{1}{2}}{k+2}\right)$$

On a alors un télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, donc la série $\sum u_n$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{3}{4}$$

Remarque. On pouvait dès le début remarquer que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $s = 2$, comme $s > 1$ alors elle converge, et donc par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum u_n$ converge.
Mais ceci ne nous donne aucun indication sur sa somme.

2 Reproduire l'exercice précédent avec la série de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{(n+2)(n+5)}$$

De la même façon que dans l'exercice précédent on obtient $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+5}\right)$$

Ensuite les sommes partielles sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \frac{13}{36}\left(1 - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right)$$

On en déduit que la série converge et que sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{13}{36}$$

3 Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et donner leurs valeurs.

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{5+(-1)^n}{4^n}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+1}{3^n}$ c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$ d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2}$

e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(n+1)!}$ f. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n}$ g. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n2^n}{(n-1)!}$ h. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}$

i. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{3^n}$ j. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} \frac{1}{(2t+3)^2}\,dt$ k. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

a. On remarque que $\frac{5+(-1)^n}{4^n} = 5\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.
Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ et $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ alors les séries de termes généraux $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ convergent, donc par linéarité la série converge et sa somme est :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{5+(-1)^n}{4^n} = 5\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 5\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{7}{15}$$

b. Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ alors par linéarité cette série converge et sa somme est :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

c. On commence par simplifier l'expression du terme général :

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

On peut prouver par équivalence des séries à termes positifs et résultats sur les séries de Riemann que cette série converge, mais on ne pourra en déduire sa somme.
Il faut utiliser la réduction en éléments simples puis un télescopage.
La réduction en éléments simple est :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{2}{n(n-1)} = 2\left(\frac{n-(n-1)}{n(n-1)}\right) = \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}$$

Les sommes partielles sont donc :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\binom{k}{2}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k}$$

On calcule :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k} = 2 - \frac{2}{n}$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 2 donc la série de terme général $\frac{1}{\binom{n}{2}}$ converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 2$$

d. On fait apparaître un télescopage grâce à l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

On en déduit les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 donc la série de terme général $\frac{2n+1}{n^2+n}$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} = 1$$

e. On utilise la méthode suivante qui fait apparaître un télescopage :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

On peut calculer les sommes partielles :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 donc la série de terme général $\frac{n}{(n+1)!}$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

f. Comme $\left|\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right| = \frac{1}{2}$ alors $\left|\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right| < 1$ donc la série converge et sa somme est :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}}$$

Il reste à calculer ce complexe :

$$\frac{1}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}} = \frac{2}{2 - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{4}{3 - i\sqrt{3}} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

La série admet donc pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i\frac{n\pi}{3}}}{2^n} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

g. Le changement d'indice $m = n - 1$ donne $\frac{n2^n}{(n-1)!} = \frac{(m+1)2^{m+1}}{m!}$.
Si $m > 0$ alors $\frac{(m+1)2^{m+1}}{m!} = 4\frac{2^{m-1}}{(m-1)!} + 2\frac{2^m}{m!}$.
Par propriété de la série exponentielle la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{n!}$ converge vers e^2. Par linéarité la série proposée converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(n-1)!} = 4\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{m-1}}{(m-1)!} + 2\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!} = 4e^2 + 2e^2 = 6e^2$$

h. On utilise un télescopage. On définit les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}$$

Puis on remarque que :

$$k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2) \qquad \text{et} \qquad k^2 + 3k = k(k+3)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \ln k + \sum_{k=3}^{n+2} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=4}^{n+3} \ln k \\
&= \ln(n+1) + \ln 3 - \ln 1 - \ln(n+3) = \ln 3 + \ln \frac{n+1}{n+3}
\end{aligned}$$

Comme $(n+1) \underset{+\infty}{\sim} (n+3)$ alors $\frac{n+1}{n+3}$ converge vers 1, puis la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ln 3$. En conséquence la série converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n} = \ln 3$$

i. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n} = \operatorname{Re}\left[\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}\right)^n\right]$

Comme $\left|\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ alors la série de terme général $\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}\right)^n$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}} = \frac{3(5+i\sqrt{3})}{14}$$

En conséquence la série de terme général $\frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n}$ converge, sa somme est la partie réelle de la précédente, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{3^n} = \frac{15}{14}$$

j. Les sommes partielles associées à la série sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$$

Grâce à la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \int_0^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$$

On peut donc calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \int_0^{n+1} \tfrac{1}{2} 2(2t+3)^{-2}\, dt = \Big[-\tfrac{1}{2}(2t+3)^{-1} \Big]_0^{n+1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2(2n+5)}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{6}$ donc la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2}$ converge et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{(2t+3)^2} = \frac{1}{6}$$

k. Justifions d'abord que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ converge. Pour ceci on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série $\sum \frac{1}{2}^n$ converge, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ converge.
Soit (S_n) les sommes partielles de cette série. Alors la suite extraite (S_{2n-1}) converge vers la somme de la série. On sépare les termes pairs et impairs :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^{2k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{16^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k}$$

Comme $\left|\frac{1}{16}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$ alors les séries géométriques $\sum \left(\frac{1}{16}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$ convergent.
La somme de la série est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{26}{15}$$

$\boxed{4}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

a. Simplifier l'expression : $\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{2}{\tan 2x}$

b. Démontrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

a. La formule pour $\tan 2x$ donne :

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} = \frac{1}{\tan x} - \frac{1-\tan^2 x}{\tan x} = \tan x$$

Donc finalement :

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \tan x$$

b. On peut prouver que la série converge par équivalence. En effet, l'équivalence $\tan u \underset{(0)}{\sim} u$ donne :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n} \times \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

La série géométrique de terme général $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, les termes sont positifs car $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2}$, donc par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série de terme général u_n converge.

Mais ceci ne permet pas de calculer la somme.

On définit alors les sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}$$

La formule obtenue dans la question précédente donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \qquad \tan \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2^k}}$$

Mais elle n'est pas valable pour $k = 1$, car $\frac{\pi}{2}$ n'admet pas de tangente.

On écrit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = u_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k$$

On calcule $u_1 = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, puis on applique la formule de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2^k}} \right)$$

Ceci fait apparaître un télescopage :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1} \tan \frac{\pi}{2^k}} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k \tan \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \frac{1}{2^n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

L'équivalence $\tan u \underset{(0)}{\sim} u$ montre que :

$$S_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2^n \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi la série de terme général u_n converge et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$$

5 Pour tout $n \geqslant 2$ on pose :

$$u_n = -\ln\left(\cos \frac{\pi}{2^n}\right)$$

On note S_n la somme partielle associée à u_n puis :

$$T_n = S_n - \ln\left(\sin \frac{\pi}{2^n}\right)$$

a. Démontrer que la suite (T_n) est arithmétique.

b. En déduire le terme général de S_n.

c. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente et calculer sa somme.

a. Par définition des sommes partielles :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(-\ln\left(\cos \frac{\pi}{2^k}\right)\right)$$

Ceci donne :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad T_n = -\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\cos \frac{\pi}{2^k}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{2^n}\right)$$

On calcule alors, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= -\sum_{k=2}^{n+1} \ln\left(\cos \frac{\pi}{2^k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\cos \frac{\pi}{2^k}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \ln\left(\sin \frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= -\ln\left(\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - \ln\left(\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \ln\left(\sin \frac{\pi}{2^n}\right) \\ &= \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

Si on pose $a = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ alors $2a = \frac{\pi}{2^n}$, et donc

$$\ln \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \ln \frac{\sin 2a}{\cos a \sin a} = \ln 2$$

On a donc obtenu :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad T_{n+1} - T_n = \ln 2$$

Ceci montre que la suite $(T_n)_{n\geqslant 2}$ est arithmétique de raison $\ln 2$.

b. Le terme général de la suite (T_n) est donc :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad T_n = T_2 + (n-2)\ln 2$$

Or on calcule que :

$$T_2 = S_2 - \ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = -2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

En conséquence :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad T_n = (n-1)\ln 2$$

On en déduit :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n = T_n + \ln\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right) = (n-1)\ln 2 + \ln\left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)$$

c. On remarque que :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad S_n = \ln\left(2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}\right)$$

L'équivalence $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$ montre que :

$$2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n} \underset{(+\infty)}{\sim} 2^{n-1}\frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2}$$

Ceci montre que $\left(2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}\right)$ converge vers $\frac{\pi}{2}$, et donc (S_n) converge vers $\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
La série de terme général u_n est donc convergente, sa somme est :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\ln\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\right) = \ln\frac{\pi}{2}$$

6 Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+3}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n}{3n^2}$

e. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{3n^2}{3^n}$ f. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^3}$ g. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos n}{n!}$ h. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{i^n}{n}$

i. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\arctan n}{n^2+1}$ j. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2\ln n}{e^n}$ k. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{\operatorname{ch} n}$ l. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}e^{-\sqrt{n}}$

m. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)$ n. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ o. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}-1}$

p. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\sin\left((n^2+1)\frac{\pi}{n}\right)$ q. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$ r. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}\right)$

a. La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, et par équivalence : $\frac{1}{n+3} \sim \frac{1}{n}$
La série $\sum \frac{1}{n+3}$ est à termes positifs, donc par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs elle est divergente.

b. La série $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ peut s'écrire $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$.
C'est une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^s}$ avec $s = \frac{1}{4}$. Comme $s \leqslant 1$ alors elle est divergente.

c. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ est alternée. La suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées la série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

d. Par croissances comparées $n^2 = o(3^n)$. On en déduit que la suite $\left(\frac{3^n}{3n^2}\right)$ tend vers $+\infty$, et donc la série $\sum \frac{3^n}{3n^2}$ diverge grossièrement.

e. On démontre que la suite $\left(\frac{3n^2}{3^n}\right)$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$. On aurait aussi pu démontrer qu'elle est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par exemple.
Pour ceci on écrit :
$$\frac{\frac{3n^2}{3^n}}{\frac{1}{2^n}} = 3\frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$
Par croissances comparées, pour tout réel a strictement supérieur à 1 on a $n^2 = o(a^n)$. En particulier pour $a = \frac{3}{2}$ on a $n^2 = o\Big(\left(\frac{3}{2}\right)^n\Big)$, donc $\frac{2^n n^2}{3^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et ainsi $\frac{3n^2}{3^n} = o\Big(\left(\frac{1}{2}\right)^n\Big)$.
La série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.
Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum \frac{3n^2}{2^n}$ est convergente.

f. La suite $\left(\frac{\ln n}{n^3}\right)$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En effet :
$$\frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$$
Ceci car $\ln n = o(n)$ par croissances comparées. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln n}{n^3}$ est convergente.

g. La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente car il s'agit de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ avec $x = 1$. De plus ses termes sont positifs. Comme la suite $(\cos n)$ est bornée alors :
$$\frac{\cos n}{n!} = O\Big(\frac{1}{n!}\Big)$$
Par théorème de domination la série $\sum \frac{\cos n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente.
Remarque. Comme $\cos n = \mathrm{Re}\left(e^{in}\right)$ alors on peut démontrer que la somme de cette série est $e^{\cos 1}\cos(\sin 1)$.

h. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{i^n}{n}$.
On note ensuite, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n + iV_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{i^{2k}}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{i^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{i^k}{k} = S_{2n+1}$$

Les suites $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est $\left(\frac{1}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et convergent vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées les séries $\sum \frac{(-1)^k}{2k}$ et $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ convergent.

Par somme la série de terme général $\frac{i^n}{n}$ converge.

Plus précisséments les suites (U_n) et (V_n) convergent, donc la suite (S_{2n+1}) converge. Comme $S_{2n} = S_{2n+1} - \frac{i^{2n+1}}{2n+1}$ alors la suite (S_{2n}) converge vers la limite de (S_{2n+1}).

Par théorème comme les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite alors la suite (S_n) converge vers cette limite, et donc la série de terme général $\frac{i^n}{n}$ converge.

Remarque. En séparant les parties réelles et imaginaires on peut prouver que la somme est égale à $\frac{1+i}{2}$.

i. La fonction arc-tangente tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, donc :

$$\frac{\arctan n}{n^2+1} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$$

De plus pour tout n positif le terme $\frac{\arctan n}{n^2+1}$ est positif.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, elle est convergente car $2 > 1$, donc par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs la série $\sum \frac{\arctan n}{n^2+1}$ est convergente.

j. On démontre que la suite $\left(\frac{n^2 \ln n}{e^n}\right)$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Tout d'abord :

$$\frac{\frac{n^2 \ln n}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4 \ln n}{e^n}$$

Par croissances comparées $\ln n = o(n)$, donc :

$$\frac{n^4 \ln n}{e^n} = o\left(\frac{n^5}{e^n}\right)$$

Par croissances comparées $n^5 = o(e^n)$, donc la suite $\left(\frac{n^5}{e^n}\right)$ converge vers 0, puis la suite $\left(\frac{n^4 \ln n}{e^n}\right)$ converge vers 0 et ainsi la suite $\left(\frac{n^2 \ln n}{e^n}\right)$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, elle est convergente car $2 > 1$, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum \frac{n^2 \ln n}{e^n}$ est convergente.

k. La série $\sum \frac{2^n}{\operatorname{ch} n}$ est à termes positifs, lesquels vérifient l'équivalence suivante :

$$\frac{2^n}{\operatorname{ch} n} = 2\frac{2^n}{e^n + e^{-n}} \underset{(+\infty)}{\sim} 2\frac{2^n}{e^n} = 2\left(\frac{2}{e}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$ alors la série géométrique $2\sum \left(\frac{2}{e}\right)^n$ converge.

Par théorème d'équivalence des séries à termes positifs la série $\sum \frac{2^n}{\operatorname{ch} n}$ converge.

l. Démontrons que le terme général $e^{-\sqrt{n}}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^2}$. Pour ceci on pose $x = \sqrt{n}$. Alors :

$$\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = \frac{x^4}{e^x}$$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = 0$ et ainsi $e^{-\sqrt{n}} \underset{(0)}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, elle est convergente car $2 > 1$, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.

m. Pour la série $\sum \left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}\right)$ on utilise un développement limité :

$$\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Ceci montre :

$$\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n} \underset{(+\infty)}{\sim} -\frac{1}{2n^3}$$

On en déduit :

$$\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2n^3}$$

En conséquence la suite $\left(\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ est positive au moins à partir d'un certain rang. De plus la série $\sum \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann, elle converge car $3 > 1$, donc par théorème d'équivalences pour les séries à termes positif la série $\sum \left(\tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ converge, puis par linéarité (en multipliant par -1) la série $\sum \left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}\right)$ converge.

n. Comme $\left(\frac{e}{n}\right)$ converge vers 0 alors à partir d'un certain rang $\frac{e}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Donc à partir d'un certain rang :

$$0 \leqslant \left(\frac{e}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

La série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs la série $\sum \left(\frac{e}{n}\right)^n$ est convergente.

o. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $u_n = \frac{1}{(-1)^n\sqrt{n}-1}$.

Alors $(-1)^n u_n = \frac{1}{\sqrt{n}-(-1)^n}$, ce qui montre que $(-1)^n u_n \geqslant 0$ et donc la série est alternée.

Par contre les premiers termes de la suite (u_n) sont $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}+1}, 1, -\frac{1}{\sqrt{5}+1}, \dots\right)$, ce qui montre que la suite $((-1)^n u_n)$ n'est pas décroissante. On ne peut donc pas appliquer le critère spécial des séries alternées.

On regroupe alors les termes deux à deux : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit $v_k = u_{2k-1} + u_{2k}$. Ceci donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad v_k = -\frac{1}{\sqrt{2k-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{2k}-1} = \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k} + 2}{\left(\sqrt{2k-1}+1\right)\left(\sqrt{2k}-1\right)}$$

Comme

$$\left(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k}} \underset{(+\infty)}{\sim} -\frac{1}{2\sqrt{2k}}$$

alors $\left(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k}\right) \underset{(+\infty)}{=} o(2)$ donc :

$$v_k \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{\left(\sqrt{2k-1}+1\right)\left(\sqrt{2k}-1\right)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$$

La suite (v_k) est positive, la série $\sum \frac{1}{k}$ est divergente, donc par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs la série $\sum v_k$ diverge.

Notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Comme la série $\sum v_k$ diverge alors la suite (S_{2n}) tend vers $+\infty$.

Comme u_{2n+1} converge vers 0 alors la suite (S_{2n+1}) tend aussi vers $+\infty$, et donc la série $\sum u_n$ diverge.

p. On remarque : $\sin\left((n^2+1)\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$

La série $\sum \sin\left((n^2+1)\frac{\pi}{n}\right)$ est alternée. Comme la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors la suite $\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$ est décroissante.

D'après le critère spécial des séries alternées la série $\sum \sin\left((n^2+1)\frac{\pi}{n}\right)$ converge.

q. On cherche un équivalent en $+\infty$ de $\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$. Pour ceci on pose $h=\frac{1}{n}$, ce qui donne $n=\frac{1}{h}$ puis :

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = \left(1+\frac{1}{h}\right)^h - \left(\frac{1}{h}\right)^h = \frac{1}{h^h}\left((1+h)^h-1\right)$$

Tout d'abord $\frac{1}{h^h} = e^{-h\ln h}$, par croissances comparées $\lim\limits_{h\to 0} h\ln h = 0$, donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^h} = 1$.

Ensuite grâce aux équivalences $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$ et $\ln(1+u) \underset{(0)}{\sim} u$:

$$(1+h)^h - 1 = e^{h\ln(1+h)} - 1 \underset{(0)}{\sim} h\ln(1+h) \underset{(0)}{\sim} h^2$$

On en déduit :

$$\frac{1}{h^h}\left((1+h)^h-1\right) \underset{(0)}{\sim} h^2$$

Et donc :

$$\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Les termes sont positifs. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann, elle est convergente car $2>1$, donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$ est convergente.

r. On cherche un équivalent en $+\infty$ de $\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n}\right)$ en posant $h=\frac{1}{n}$. Alors $n=\frac{1}{h}$ puis :

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n} = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} &= \left(\frac{1}{h}\right)^h - \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{h}{1+h}} \\
&= e^{-h\ln h} - e^{-\frac{h}{1+h}\ln h} = e^{-h\ln h}\left(1-e^{-\frac{h}{1+h}\ln h + h\ln h}\right) \\
&= e^{-h\ln h}\left(1-e^{\frac{h^2}{1+h}\ln h}\right)
\end{aligned}$$

Par croissances comparées en zéro : $h \ln h \to 0$. On en déduit : $e^{-h\ln h} \to 1$.
Ensuite grâce à l'équivalence $e^u - 1 \underset{(0)}{\sim} u$:

$$e^{-h\ln h}\left(1 - e^{\frac{h^2}{1+h}\ln h}\right) \underset{(0)}{\sim} -\frac{h^2}{1+h}\ln h \underset{(0)}{\sim} -h^2\ln h = -\frac{1}{n^2}\ln\frac{1}{n} = \frac{\ln n}{n^2}$$

On a démontré :

$$\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

Ceci justifie déjà qu'à partir d'un certain rang la suite $(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n})$ est positive.
Ensuite on compare la suite $\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ à la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$:

$$\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Par croissances comparées en $+\infty$ on sait que $\ln n = o(n^\alpha)$ pour tout α strictement positif, donc ici $\ln n = o(n^{\frac{1}{2}})$ puis :

$$\frac{\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann, elle est convergente car $\frac{3}{2} > 1$, donc par théorème de comparaison la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$. est convergente.
Par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs la série $\sum \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$ est convergente.

7 Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

a. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$ b. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln n}$ d. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$

On pourra en comparer certaines avec une intégrale.

a. La suite $\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$ est négligeable devant la suite $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$:

$$\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Par croissances comparées en $+\infty$ on sait que $\ln n = o(n^\alpha)$ pour tout α strictement positif, donc ici $\ln n = o(n^{\frac{1}{2}})$ puis :

$$\frac{\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann, elle est convergente car $\frac{3}{2} > 1$, donc par théorème de comparaison la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$. est convergente.

b. De même on obtient : $\frac{1}{n} = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}\Big)$ donc la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^2 n}$ diverge.

c. On compare la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ à une intégrale.
On pose $f(t) = \frac{1}{t\ln t}$. La fonction f est définie, continue, décroissante que $]1, +\infty[$.
On en déduit :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$$

On calcule :

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^{n+1} = \ln \frac{\ln(n+1)}{2}$$

Comme $\ln \frac{\ln(n+1)}{2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors par théorème de comparaison la série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

d. De même en posant $f(t) = \frac{1}{t\ln^2 t}$:

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant f(2) + \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k} \leqslant \frac{1}{2\ln^2 2} + \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t}$$

On calcule :

$$\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = \Big[-\frac{1}{\ln t}\Big]_2^n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$$

On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n\ln^2 n}\right)$ est majorée par $\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2}$.

Or elle est croissante, donc elle converge. Ainsi la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.

Plus généralement, on peut démontrer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Il s'agit des séries de Bertrand, de Joseph Bertrand, 1822 – 1900.

$\boxed{8}$ Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n}$ diverge et en donner un équivalent en $+\infty$.

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.
Cette fonction est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1-\ln x}{x^2}$.
Elle est donc décroissante sur $[e,+\infty[$.
Elle admet pour primitive la fonction $F : x \mapsto \frac{\ln^2 x}{2}$.
Par comparaison avec une intégrale on obtient :

$$\forall n \geqslant 4 \qquad \frac{\ln^2(n+1)-\ln^2 4}{2} \leqslant \sum_{k=4}^{n}\frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{\ln^2 n - \ln^2 3}{2}.$$

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}$.
Il existe des constantes α et β telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \frac{\ln^2(n+1)}{2}+\alpha \leqslant S_n \leqslant \frac{\ln^2 n}{2}+\beta.$$

On en déduit l'équivalence : $\quad S_n \sim \dfrac{\ln^2 n}{2}$.
Pour la limite de $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n}$ il faut écrire $\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} = \left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2$.

$\boxed{9}$ Soit $\alpha\in\,]1,+\infty[$. Donner un équivalent en $+\infty$ du reste de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$

Comme $\alpha>1$ alors la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge, et donc ses restes sont bien définis.
On note :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$$

La fonction $f : t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On en déduit que pour tout couple d'entiers (n,m) avec $1\leqslant n<m$:

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leqslant \int_{n}^{m} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(m+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{m^{\alpha-1}}\right)$$

Comme $\alpha>1$ alors les limites de ces termes pour m tendant vers $+\infty$ existent, et par théorème de comparaison :

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

On en déduit : $\quad R_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

a. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Démontrer que les séries

$$\sum u_n^2 \qquad \sum \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \sum \frac{u_n}{1-u_n}$$

convergent.

b. Les réciproques sont-elles vraies ?

a. Comme la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) tend vers 0, donc $0 \leqslant u_n < 1$ à partir d'un certain rang, puis $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$.
Par TCSTP la série $\sum u_n^2$ converge.
Par TESTP, $\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$ et $\frac{u_n}{1-u_n} \sim u_n$ donc les séries $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$ convergent.

b. La réciproque de la première est fausse : $u_n = \frac{1}{n}$ par exemple.
Si les séries $\sum \frac{u_n}{1\pm u_n}$ convergent alors les suites $\left(\frac{u_n}{1\pm u_n}\right)$ convergent vers 0, donc les suites $\left(\frac{1}{\frac{1}{u_n}\pm 1}\right)$ également. On en déduit

$$\frac{1}{u_n} \pm 1 \longrightarrow \pm\infty \quad \frac{1}{u_n} \to \pm\infty \quad u_n \to 0$$

Ceci donne l'équivalente $\frac{u_n}{u_n \pm 1} \sim u_n$, donc par TESTP les réciproques des deux dernières implications sont vraies.

11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.
On suppose que $(\sqrt[n]{u_n})$ converge vers $a \in [0,1[$.

a. Soit q un réel appartenant à $]a,1[$. Démontrer qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant q^n$.

b. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

a. On pose $\varepsilon = q - a$. Comme $q \in \,]a,1[$ alors $a < q < 1$ et donc $\varepsilon > 0$.
La suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ converge vers a donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |\sqrt[n]{u_n} - a| \leqslant \varepsilon$$

On a les implications :

$$\begin{aligned} |\sqrt[n]{u_n} - a| \leqslant \varepsilon &\implies \sqrt[n]{u_n} - a \leqslant \varepsilon \\ &\implies \sqrt[n]{u_n} \leqslant a + \varepsilon = q \implies u_n \leqslant q^n \end{aligned}$$

On a bien démontré qu'à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant q^n$

b. La série géométrique $\sum q^n$ est convergente car $|q| < 1$.
La suite (u_n) est positive et majorée par la suite (q^n) à partir d'un certain rang donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs la série $\sum u_n$ est convergente.

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$$

a. Écrire u_n comme somme partielle d'une série.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.
Sa limite est la *constante d'Euler* γ.

a. Pour $n \geqslant 2$ on calcule $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, donc $u_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ avec $v_1 = 1$ et :

$$\forall k \geqslant 2 \qquad v_k = \tfrac{1}{k} + \ln\left(1 - \tfrac{1}{k}\right)$$

b. Comme $v_k \sim \frac{1}{k^2}$ alors la suite (v_k) est positive à partir d'un certain rang, et par TESTP la série $\sum v_k$ converge, donc la suite (u_n) converge.
On ne sait pas si γ, sa limite, est rationnelle. Approximativement $\gamma \simeq 0{,}5572156649$.

13 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est positive, puis qu'elle converge et déterminer sa limite.

b. Soit S_n la somme partielle de la série de terme général u_n. Simplifier e^{-S_n} et en déduire la nature de la série de terme général u_n.

a. La relation de récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ montre que la suite (u_n) est de signe constant.
Or $u_0 = 1$ donc la suite (u_n) est positive.
Ceci implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < e^{-u_n} \leqslant 1$$

Puis comme u_n est positif :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

La suite (u_n) est donc décroissante.
Elle est décroissante positive donc par théorème elle converge.
Notons ℓ sa limite. Alors (u_{n+1}) converge vers ℓ par décalage, et $u_n e^{-u_n}$ converge vers $\ell e^{-\ell}$ par composition et produit de limites.
La relation $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ donne par unicité de la limite :

$$\ell = \ell e^{-\ell}$$

Ceci impose que $\ell = 0$ ou $e^{-\ell} = 1$, et donc $\ell = 0$.
Finalement la suite (u_n) converge vers 0.

b. Par définition les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On peut alors écrire :

$$e^{-S_n} = e^{-\sum\limits_{k=0}^{n} u_k} = \prod_{k=0}^{n} e^{-u_k}$$

La relation de récurrence $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ donne :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad e^{-u_k} = \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

On fait apparaître un télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad e^{-S_n} = \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} u_{k+1}}{\prod\limits_{k=0}^{n} u_k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1} u_k}{\prod\limits_{k=0}^{n} u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} = u_{n+1}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = -\ln u_{n+1}$$

Comme la suite (u_n) converge vers 0 alors la suite (S_n) tend vers $+\infty$ et donc la série $\sum u_n$ diverge.

14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

On dit que le produit infini $\prod u_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Les produits infinis suivants convergent-ils ?

a. $\prod\limits_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{2}$ b. $\prod\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ c. $\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)$ d. $\prod\limits_{n\geqslant 3} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ e. $\prod\limits_{n\geqslant 1} n \operatorname{sh} \dfrac{1}{n}$

f. $\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$

Pour tout produit infini on se ramène à une série en posant $S_n = \ln P_n$.

En effet ceci donne $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln u_n$ donc le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln u_n$ converge ou tend vers $-\infty$.

On démontre ainsi que les produits b, c, d, e convergent et le produit a diverge.

Le produit f converge si et seulement si $\alpha > 2$.

15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$$

a. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge et que sa somme est inférieure ou égale à 1.

b. Démontrer que sa somme est égale à 1 si et seulement si la série $\sum u_n$ diverge.

a. On démontre que pour tout $n \geqslant 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = 1 - \tfrac{1}{(1+u_0)\cdots(1+u_n)}$

Les sommes partielles sont donc majorées par 1. De plus les v_k sont positifs donc la suite des sommes partielles est croissante.

Ainsi la série $\sum v_n$ est convergente.

b. La somme de la série $\sum v_n$ est égale à 1 si et seulement si $\prod(1+u_n) \to +\infty$, ce qui équivaut à $\sum \ln(1+u_n) \to +\infty$, puis à $\sum \ln(1+u_n)$ diverge.

Si $u_n \to 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, par TCSTP $\sum \ln(1+u_n)$ diverge ssi $\sum u_n$ diverge.

Si u_n ne converge pas vers 0 alors $\sum \ln(1+u_n)$ et $\sum u_n$ divergent grossièrement.