Corrigé du T. D. B12
Déterminants

1 Vérifier la formule $\det AB = \det BA$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule grâce à la règle de l'alpha :

$$\det A = 10 - (-2) = 12 \qquad \text{et} \qquad \det B = 4 - 0 = 4$$

Les produits sont :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 19 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad BA = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Leurs déterminants sont :

$$\det(AB) = 10 - (-38) = 48 \qquad \text{et} \qquad \det(BA) = -8 - (-56) = 48$$

On a bien dans les deux cas :

$$\det(AB) = \det A \det B \qquad \text{et} \qquad \det(BA) = \det B \det A$$

2 Calculer les déterminants suivants en utilisant au choix :
- un développement par rapport à une colonne,
- un développement par rapport à une ligne,
- la règle de Sarrus.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d_5 = \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant d_1 est nul car deux lignes sont égales. On peut aussi le voir par développement par rapport à la ligne 3 :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 = 0$$

- Le déterminant d_2 est nul car une de ses colonnes est nulle. On peut aussi le voir par développement par rapport à la colonne 2 ou par la règle de Sarrus :

$$d_2 = \begin{vmatrix} -14 & 0 & 13 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0-0 = 0$$

- Pour le déterminant d_3 on peut développer par rapport à la deuxième colonne :

$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -1$$

On peut aussi appliquer la règle de Sarrus :

$$d_3 = \begin{vmatrix} 12 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0-1 = -1$$

- Pour le déterminant d_4 toutes les méthodes sont efficaces. Par exemple avec la règle de Sarrus :

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-1-0-0 = 1$$

- Le déterminant d_5 est triangulaire donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$d_5 = \begin{vmatrix} 2 & -34 & 1 \\ 0 & 15 & 27 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times 15 \times 10 = 300$$

Ceci ce voit aussi avec la règle de Sarrus, ou en développant par rapport à la première colonne ou la troisième ligne.

- Pour le déterminant d_6 la règle de Sarrus et les développements nécessitent des calculs. Par exemple le développement par rapport à la troisième colonne est :

$$\begin{aligned} d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times 3 - 6 \times (-3) + 9 \times (-3) = 9 + 18 - 27 = 0 \end{aligned}$$

Il est plus simple d'utiliser le pivot de Gauss. Ici on applique les opérations $(C_3 \leftarrow \frac{1}{3}C_3)$, puis $(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$ et $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$, et on constate que deux colonnes sont proportionnelles :

$$d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Quoi qu'il en soit, ce déterminant est nul. Ceci montre que ses trois colonnes sont liées, ou que ses trois lignes sont liées.
On constate effectivement que $L_3 = L_1 + L_2$, et pour les colonnes : $C_1 + C_3 = 2C_2$.

3 Dans $\mathcal{S}_3$ on note $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

a. Calculer $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, σ^2.

b. Vérifier que tous les éléments de $\mathcal{S}_3$ sont ainsi obtenus.

c. Vérifier que $\tau_1 = (1\ 2)$ et $\tau_2 = (2\ 3)$ permettent aussi d'obtenir tous les éléments de $\mathcal{S}_3$.

a. On obtient $\tau\sigma = (2\ 3)$, $\sigma\tau = (1\ 3)$, $\sigma^2 = (1\ 3\ 2)$.

b. L'ensemble $\mathcal{S}_3$ contient $3! = 6$ éléments, ils sont donc au complet :

$$\mathcal{S}_3 = \left\{e, \tau, \tau\sigma, \sigma\tau, \sigma, \sigma^2\right\}$$

c. On constate que $\tau_1\tau_2 = \sigma$, donc d'après la question précédente on peut obtenir tous les éléments de $\mathcal{S}_3$ avec τ_1 et τ_2.

On peut aussi remarquer que $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = \tau\sigma$, donc $\tau_1\tau_1 = \tau^2\sigma = \sigma$.

4 On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & 5 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer $\tau\sigma$, puis les signatures de σ, τ et $\tau\sigma$.

On obtient
$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 5\ 4)(2\ 7\ 8\ 3\ 6) && \text{de signature } 1 \\ \tau &= (2\ 3)(4\ 8\ 7) && \text{de signature } -1 \\ \tau\sigma &= (1\ 5\ 8\ 2\ 4)(3\ 6) && \text{de signature } -1. \end{aligned}$$

En effet la signature d'un cycle de longueur p est $(-1)^{p-1}$.

5 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a. Soit τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que l'application $\sigma \mapsto \tau\sigma$ réalise une bijection de $\mathcal{S}_n$.

b. En déduire que $\mathcal{S}_n$ possède autant de permutations de signature 1 que de permutations de signature -1.

Vérifier ceci avec $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.

a. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{S}_n & \longrightarrow & \mathcal{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \tau\sigma \end{array}$

Cette application est bien définie car la composée de deux permutations de $\mathcal{S}_n$ est une permutation de $\mathcal{S}_n$. De plus, comme $\tau^2 = e$ alors $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_n}$, donc f est bijective, égale à sa propre réciproque.

b. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations de signature 1.

Alors pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_n$, la signature de $\tau\sigma$ est :

$$\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma) = (-1) \times 1 = -1$$

Ceci car la signature est un morphisme de groupes de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{\pm 1\}, \times)$.
On en déduit que $f(\mathcal{A}_n)$ est l'ensemble des permutations de signature -1.
De plus comme f est bijective alors les ensembles $\mathcal{A}_n$ et $f(\mathcal{A}_n)$ sont de même cardinal.
De plus $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \cup \tau\mathcal{A}_n$, cette union est disjointe, donc $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\frac{n!}{2}$.
Par exemple pour $\mathcal{S}_3$ les permutations de signature 1 sont e, (1 2 3) et (1 3 2) alors que les permutations des signature -1 sont (1 2), (1 3), et (2 3).
Pour $\mathcal{S}_4$ on obtient deux ensembles de 12 éléments :
Les permutations de signature 1 sont l'identité, les 8 3-cycles comme (1 2 3), les 3 produits de deux transpositions à support disjoints comme (1 2)(3 4).
Les permutations de signature -1 sont les 6 transpositions comme (1 2) et les 6 4-cycles comme (1 2 3 4).

6 Soit $u_1 = (2, 1)$, $u_2 = (1, -2)$ et :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (5x + 2y, 2x + 2y) \end{array}$$

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis dans la base $\mathcal{B}$.

c. Calculer de deux façons différentes le déterminant de f. Justifier que f est un isomorphisme.

d. Démontrer que $f \circ f = 7f - 6\mathrm{Id}_E$.

a. Le déterminant de la famille $\mathcal{B}$ est :

$$\det \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Comme il n'est pas nul alors la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule les images de u_1 et u_2 par f et on les exprime en fonction de u_1 et u_2. Comme :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alors $f(u_1) = 6u_1$ et $f(u_2) = u_2$, donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Par propriété le déterminant de f est le déterminant de sa matrice dans toute base de $\mathbb{R}^2$, donc :

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \qquad \text{et} \qquad \det f = \det B = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Comme ce déterminant n'est pas nul alors f est un isomorphisme.

d. On constate que :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 7B - 6I_2 = \begin{pmatrix} 42 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les endomorphismes $f \circ f$ et $7f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$ et donc ils sont égaux : $f \circ f = 7f - 6\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$

7 Soit p un projecteur de E de rang r, et s la symétrie de E associée à p. Calculer les déterminants de p et de s.

Comme p est un projecteur alors son noyau et son image sont supplémentaires.
Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\operatorname{im} p$ et $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker p$.
Alors par le théorème de la base adaptée, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
Par définition du projecteur :

$$\forall u \in \operatorname{im} p \quad p(u) = u \qquad \text{et} \qquad \forall u \in \ker p \quad p(u) = 0_E$$

La matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$P = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{n}$$

Par définition de la symétrie associé à p :

$$\forall u \in \operatorname{im} p \quad s(u) = u \qquad \text{et} \qquad \forall u \in \ker p \quad s(u) = -u$$

La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$S = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{n}$$

On aurait aussi pu remarquer que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, donc $S = 2P - I_n$.
Les déterminants des endomorphismes p et s sont les déterminants des matrices P et S. Comme ces matrices sont diagonales il s'agit du produit de leurs coefficients diagonaux. On obtient :

$$\det p = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n \\ 1 & \text{si } r = n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \det s = (-1)^{n-r}$$

8 Soit $\vec{u} = (-2, 0, 1)$ et $\vec{v} = (0, -2, 1)$ deux vecteurs de l'espace. Donner une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont coplanaires, donc tels que :

$$\det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{OM}\right) = 0$$

On note (x, y, z) les coordonnées du point M. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad & \iff \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & x \\ 0 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \\ & \iff \quad 2x + 2y + 4z = 0 \end{aligned}$$

La plan $\mathcal{P}$ admet donc pour équation : $\quad x + y + 2z = 0$

9 Résoudre les systèmes :

a. $\begin{cases} 13x + 42y = 4 \\ 7x + 20y = 10 \end{cases}$ b. $\begin{cases} (\lambda^2 - 1)x - 2\lambda y = -2 \\ 2\lambda x + (\lambda^2 - 1)y = \lambda^3 + 3\lambda \end{cases}$ avec λ réel fixé.

a. Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 42 \\ 7 & 20 \end{vmatrix}$$

On applique les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2)$ puis $(C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 34 \end{vmatrix} = -34$$

Ce déterminant n'est pas nul donc le système est de Cramer. Pour le résoudre on calcule :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 42 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 0 & 17 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17 \times 20 = -340 \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1) \\ (L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2) \\ (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \end{array}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} = 6 \times 17 \quad \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ (L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1) \\ (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \end{array}$$

On en déduit l'unique solution du système :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 10 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -3$$

b. On calcule le déterminant du système :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2-1)^2 + 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2$$

Comme λ est réel alors ce déterminant ne peut être nul, et donc le système est de Cramer. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{vmatrix} -2 & -2\lambda \\ \lambda^3 + 3\lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} && (L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1) \\
&= -2\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda^3 + 3\lambda & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 - \lambda C_1) \\
&= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^3 + 3\lambda & -\lambda^4 - 2\lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^2+1)^2 \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -2 \\ 2\lambda & \lambda^3 + 3\lambda \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -2 \\ 2 & \lambda^2 + 3 \end{vmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2 - C_1) \\
&= \lambda\begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -\lambda^2 - 1 \\ 2 & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&= \lambda\begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -\lambda^2 - 1 \\ \lambda^2 + 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2+1)^2
\end{aligned}$$

On en déduit l'unique solution du système :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \lambda$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Soit p et q deux entiers tels que $1 < q < p$, et $a_1, \dots, a_p$ des entiers distincts.

a. Calculer $(a_1 \ \dots \ a_q)(a_q \ \dots \ a_p)$. Vérifier la concordance avec la signature.

b. Calculer $(a_1 \ a_2)(a_2 \ a_3)\dots(a_{p-1} \ a_p)$.

c. Simplifier $\sigma = (1\ 2\ 3)(1\ 4\ 5)(2\ 6)$ grâce au a.

Les permutations du a et du b valent $(a_1 \ \dots \ a_p)$.

La première se démontre rigoureusement sans oublier le cas où x n'est pas l'un des a_i.

La seconde se démontre à l'aide de la première.

En c on obtient $\sigma = (1\ 4\ 5\ 2\ 6\ 3)$.

2 Soit $n \geqslant 2$.

a. Soit a et b deux entiers naturels. Démontrer que la transposition $(a\ b)$ s'écrit comme produit de transpositions de la forme $(i\ i+1)$.

b. Démontrer par récurrence que tous les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont obtenus par produits des transpositions $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, ..., $(n-1\ n)$.

a. On montre que $(a\ b) = (a\ a+1)(a+1\ a+2)\dots(b-1\ b)(b-2\ b-1)\dots(a\ a+1)$.

b. On sait que toute permutation est produit de transpositions, donc d'après la question précédente toute permutation est produit des transpositions $(i\ i+1)$.

3 Soit $n \geqslant 2$, puis $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$ et $\tau = (1\ 2)$.

a. Calculer $\sigma^{n-1}\tau\sigma^2$.

b. Démontrer par récurrence que tous les éléments de $\mathcal{S}_n$ peuvent être obtenus par produits uniquement de τ et σ.

On obtient $\sigma^{n-1}\tau\sigma^2 = (1\ 2\ \dots\ n-1)$.

Soit $\rho \in \mathcal{S}_n$, et $k = \rho(n)$.

Si $k = n$ alors ρ est une permutation de $\{1, \dots, n-1\}$, par hypothèse de récurrence il est produit de τ et $(1\ 2\ \dots\ n-1)$, donc de τ et σ.

Sinon $\sigma^{n-k}\rho$ envoie n sur n, donc on conclut de la même façon.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ de signature 1.

a. Démontrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

b. On suppose que $n \geqslant 4$. Démontrer que $(1\ 2)(3\ 4)$ est un produit de deux 3-cycles.

c. Démontrer que tout élément de $\mathcal{A}_n$ se décompose en produit de 3-cycles.

a. $\mathcal{A}_n$ est inclus dans $\mathcal{S}_n$, contient e, et est stable par $\circ$.
Ou directement : $\mathcal{A}_n$ est le noyau de la signature.

b. On essaie avec $(1\ 2\ 3)$, on obtient $(1\ 2)(3\ 4) = (1\ 4\ 3)(1\ 2\ 3)$. On peut aussi écrire :
$$\begin{aligned}(1\ 2)(3\ 4) &= (1\ 2)(2\ 3)(2\ 3)(3\ 4)\\ &= (1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)\end{aligned}$$

c. Toute permutation est produit de transpositions. Si une permutation est de signature 1 alors elle est produit d'un nombre pair de transpositions. On peut donc les assembler deux à deux.

D'après la question précédente un produit $(a\ b)(c\ d)$ est produit de deux 3-cycles si a, b, c, d sont distincts. Sinon $(a\ b)(b\ c) = (a\ b\ c)$.

5 Soit n entier naturel non-nul.

a. Soit $\sigma = (a_1 \ \dots \ a_p)$ et ρ deux éléments de $\mathcal{S}_n$.
Démontrer que $\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(a_1) \ \dots \ \rho(a_p))$.

b. On suppose que $n \geqslant 5$. Démontrer que si $\sigma = (a \ b \ c)$ alors il existe une permutation ρ de signature 1 telle que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1 \ 2 \ 3)$.

a. On note $b_i = \rho(a_i)$. On vérifie que $\rho\sigma\rho^{-1}(b_i) = b_{i+1}$. Si un entier x n'est pas l'un des b_i alors $\rho^{-1}(x)$ n'est pas l'un des a_i, donc $\rho\sigma\rho^{-1}(x) = x$.

b. Il faut que ρ vérifie $\rho(a) = 1$, $\rho(b) = 2$ et $\rho(c) = 3$.
Il existe forcément une telle permutation, car a, b, c sont distincts. Si elle est de signature -1 alors on la remplace par $\tau\rho$ où $\tau = (4 \ 5)$, on démontre que $\tau\rho\sigma\rho^{-1}\tau = (1 \ 2 \ 3)$.
On peut donc énoncer la même propriété avec $(a' \ b' \ c')$ au lieu de $(1 \ 2 \ 3)$. On en déduit que $\mathcal{A}_n$ est un groupe *simple*, élément essentiel de la preuve de Galois sur la non-résolubilité des équations algébriques de degrés au moins 5.

6 Soit $u_1 = (10, 1)$, $u_2 = (1, 10)$ et :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{9}(10x - 55y, 46x - 10y) \end{array}$$

Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base. L'application f est-elle un isomorphisme ?

Le déterminant de la famille $\mathcal{B}$ est :

$$\det \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 99$$

Il est non-nul donc la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de f dans la base canonique est $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & -55 \\ 46 & -10 \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & -55 \\ 46 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 45 \\ 450 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad f(u_1) = 5u_2$$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 & -55 \\ 46 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -540 \\ -54 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \quad f(u_2) = -6u_1$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de f est :

$$\det f = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

Il n'est pas nul donc f est un isomorphisme.

7 Les familles suivantes sont-elles des bases de E ? On discutera éventuellement suivant les valeurs des paramètres.

a. $E = \mathbb{R}^2 \quad u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1) \quad u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$

b. $E = \mathbb{R}^3 \quad u_1 = (4-\lambda, 2, 5) \quad u_2 = (1, 2-\lambda, -4) \quad u_3 = (1, 2, -4-\lambda)$

c. $E = \mathbb{R}_1[X] \quad P_1 = 32X + 47 \quad P_2 = 23X + 34$

d. $E = \mathbb{R}_2[X] \quad P_1 = 4X^2 + 3X - 1 \quad P_2 = 2X^2 - 2X + 3 \quad P_3 = 3X^2 + 2X - 4$

e. $E = \mathbb{R}_2[X] \quad P_1 = (X-\alpha)(X-\beta) \quad P_2 = (X-\alpha)(X-\gamma) \quad P_3 = (X-\beta)(X-\gamma)$

a. $\det(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2\lambda+3 \\ 3\lambda+1 & 5\lambda+4 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-9)$

La famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si son déterminant est non-nul, donc si et seulement si λ est différent de -1 et de 9.

Effectivement si $\lambda = -1$ alors $u_1 = (2, -2)$ et $u_2 = (1, -1)$, et si $\lambda = 9$ alors $u_1 = (12, 28)$ et $u_2 = (21, 49)$, dans le deux cas u_1 et u_2 sont colinéaires.

b. $\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 5 & -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-5)(\lambda+3)$

La famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si son déterminant est non-nul, donc si et seulement si λ est différent de 0, 5 et -3.

c. Le déterminant de la famille (P_1, P_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$\det(P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 47 & 34 \\ 32 & 23 \end{vmatrix}$$

On le calcule grâce aux opérations $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$, $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$, $(C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1)$:

$\det(P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 13 & 34 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7$

Le déterminant de la famille (P_1, P_2) n'est pas nul donc cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

d. Le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\det(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

On le calcule par opérations élémentaires sur les lignes, en suivant l'algorithme du pivot de Gauss :

$\det(P_1, P_2, P_3) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 14 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49$

Comme son déterminant n'est pas nul la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

e. On développe les polynômes P_1, P_2, P_3 :

$$\begin{aligned} P_1 &= X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta \\ P_2 &= X^2 - (\alpha+\gamma)X + \alpha\gamma \\ P_3 &= X^2 - (\beta+\gamma)X + \beta\gamma \end{aligned}$$

Le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc :

$$\det(P_1,P_2,P_3) = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ -\alpha-\beta & -\alpha-\gamma & -\beta-\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Les opérations élémentaires $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$ puis $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$ donnent :

$$\det(P_1,P_2,P_3) = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha(\gamma-\beta) & \beta(\gamma-\alpha) \\ -\alpha-\beta & \beta-\gamma & \alpha-\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha & \beta \\ -\alpha-\beta & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Enfin l'opération $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$ donne :

$$\det(P_1,P_2,P_3) = (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha & \beta-\alpha \\ -\alpha-\beta & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalement :

$$\det(P_1,P_2,P_3) = (\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)$$

Ce déterminant est nul si et seulement si deux des trois réels α, β, γ sont égaux, donc la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si α, β, γ sont tous distincts.

8 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 5-\sqrt{11} & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 5+\sqrt{11} \end{vmatrix} \qquad d_5 = \begin{vmatrix} 863 & 43 \\ 21 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_6 = \begin{vmatrix} 77 & 23 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} \qquad d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 81 & 6401 \end{vmatrix} \qquad d_8 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$d_9 = \begin{vmatrix} -17 & 21 \\ 43 & -54 \end{vmatrix} \qquad d_{10} = \begin{vmatrix} \pi^2+\pi & \pi-1 \\ \pi^2-1 & \pi+2 \end{vmatrix} \qquad d_{11} = \begin{vmatrix} a^2-2a & a^2+a-7 \\ a^2+3 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}$$

- Grâce aux opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$ puis $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$:
$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- On factorise les lignes et les colonnes :
  $d_2 = \begin{vmatrix} 20 & 35 \\ 6 & 42 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 5 \times 6 \times 7 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times 6 \times 7$

- $d_3 = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -i^2 - 1 = 0$
  Effectivement les colonnes sont colinéaires dans $\mathbb{C}^2$: $i\binom{i}{1} = \binom{-1}{i} = -\binom{1}{-i}$

- $d_4 = \begin{vmatrix} 5-\sqrt{11} & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & 5+\sqrt{11} \end{vmatrix} = (5-\sqrt{11})(5+\sqrt{11}) - (\sqrt{14})^2 = 25 - 11 - 14 = 0$
  Là encore les colonnes sont colinéaires, mais c'est difficile à voir.
- Grâce aux opérations $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$, puis factorisation de la première colonne :
  $d_5 = \begin{vmatrix} 863 & 43 \\ 21 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 820 & 43 \\ 20 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 41 & 43 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -40$

- On additionne les deux lignes puis on soustrait les colonnes :
  $d_6 = \begin{vmatrix} 77 & 23 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 100 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 23 & 77 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 23 & 54 \end{vmatrix} = 5\,400$

- Soustraction de lignes, puis factorisation et soustraction de lignes :
  $d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 81 & 6401 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 80 & 6400-80 \end{vmatrix} = 80 \begin{vmatrix} 1 & 81 \\ 1 & 80-1 \end{vmatrix} = 80 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 79 \end{vmatrix} = -160$
- Plutôt que de développer on tente des opérations pour obtenir une forme factorisée plutôt que développée. Ici on commence par $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$ puis $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$:
  $d_8 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\lambda \\ \lambda & \lambda+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\lambda \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -\lambda \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 30 - \lambda$
  On peut vérifier certaines valeurs. Par exemple :
  - Pour $\lambda = 0$: $d_8 = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 30 = 30 - \lambda$
  - Pour $\lambda = 1$: $d_8 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 1 = 29 = 30 - \lambda$
  - Pour $\lambda = 5$: $d_8 = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 25 = 30 - \lambda$
  - Pour $\lambda = 30$: $d_8 = \begin{vmatrix} -25 & -30 \\ 30 & 36 \end{vmatrix} = -5 \times 6 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 = 30 - \lambda$

  De plus on sait que ce déterminant est nul uniquement pour la valeur $\lambda = 30$.
- Opérations $(C_2 \leftarrow C_2 + C_1)$, puis $(C_1 \leftarrow C_1 + 4C_2)$:
  $d_9 = \begin{vmatrix} -17 & 21 \\ 43 & -54 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 \\ 43 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -11 \end{vmatrix} = 11 - (-4) = 15$

- Opération $(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$, factorisation de la première colonne, puis soustraction de colonnes $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$:

$$d_{10} = \begin{vmatrix} \pi^2+\pi & \pi-1 \\ \pi^2-1 & \pi+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi+1 & -3 \\ \pi^2-1 & \pi+2 \end{vmatrix} = (\pi+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \pi-1 & \pi+2 \end{vmatrix}$$
$$= (\pi+1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ \pi-1 & 3 \end{vmatrix} = (\pi+1)(4\pi-1)$$

- Opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$, $(C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$:
$$d_{11} = \begin{vmatrix} a^2-2a & a^2+a-7 \\ a^2+3 & a^2+3a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2a & a^2+a-7 \\ 2a+3 & 2a+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2a & 3a-7 \\ 2a+3 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 6(a^2-2a) - (2a+3)(3a-7) = 6a^2 - 12a - 6a^2 + 5a + 21$$
$$= 21 - 7a = 7(3-a)$$
On vérifie certaines valeurs :
  - Pour $a = 0$: $d_{10} = \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 21$
  - Pour $a = 3$: $d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 12 & 20 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

  La formule semble convenir.

9 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} \qquad d_5 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2-3 & 2 \\ 3 & 4\lambda & \lambda \\ 2 & 2\lambda+1 & 1 \end{vmatrix} \qquad d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix} \qquad d_9 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \qquad d_{11} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ 2b+2c & a & a \end{vmatrix} \qquad d_{12} = \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ a-2b & 3a-4b & 2a-3b \\ 2a-b & a-2b & 2a-2b \end{vmatrix}$$

- Par la règle de Sarrus :
$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^3$$

- De même :
$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4a - 4a - 2 = -2$$

Ou par l'opération ($C_1 \leftarrow C_1 - C_3$) puis développement par rapport à la première colonne :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

- Opération ($C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$) puis développement par rapport à la troisième colonne :

$$d_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

- Opération ($L_1 \leftarrow L_1 - L_3$) puis pivot de Gauss sur les colonnes, développement par rapport à la première ligne :

$$d_4 = \begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -9 \\ 11 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

- On pourrait remarquer que $10C_1 + C_2 = 9C_3$, donc $d_5 = 0$, mais sinon grâce aux opération ($C_3 \leftarrow C_3 - C_1$) puis pivot de Gauss usuel sur les lignes :

$$d_5 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- Opérations ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$), ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$), puis ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$), ($C_2 \leftarrow C_2 - C_1$), et développement par rapport à la troisième ligne :

$$d_6 = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 1 & 29 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

- On commence par l'opération ($C_2 \leftarrow C_2 - \lambda C_1$), puis ($C_2 \leftarrow C_2 - C_3$) et développement par rapport à la seconde colonne.

$$d_7 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 - 3 & 2 \\ 3 & 4\lambda & \lambda \\ 2 & 2\lambda + 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -3 & 2 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -5 & 2 \\ 3 & 0 & \lambda \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-5)\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(3 - 2\lambda)\text{On}$$

peut vérifier que d_7 est nul pour $\lambda = \frac{3}{2}$, par exemple car les lignes L_2 et L_3 sont colinéaires.

- À titre préliminaire on peut calculer certaines valeurs de d_8 :

  - Pour $\theta = 0$: $d_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

  - Pour $\theta = \pi$: $d_8 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car} \quad C_3 = C_1$

- Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $d_8 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{car} \quad C_3 = -C_1$

- Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{car} \quad C_3 = C_2 - C_1$

- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$: $d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Il semble que d_8 soit généralement nul. Pour démontrer ceci on applique l'algorithme du pivot de Gauss. Les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 - \cos\theta L_1)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - \cos 2\theta L_1)$ donnent :

$$d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta - \cos^2\theta & \cos 3\theta - \cos\theta\cos 2\theta \\ 0 & \cos 3\theta - \cos\theta\cos 2\theta & \cos 4\theta - \cos^2 2\theta \end{vmatrix}$$

On utilise les formules d'addition :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \begin{array}{rl} \text{Comme} & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \text{alors} & \cos(a+b) - \cos a \cos b = -\sin a \sin b \end{array}$$

Elle montrent que :

$$d_8 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & -\sin^2\theta & -\sin\theta\sin 2\theta \\ 0 & -\sin\theta\sin 2\theta & -\sin^2 2\theta \end{vmatrix}$$

On factorise la ligne L_2 par $-\sin\theta$ et la ligne L_3 par $-\sin 2\theta$:

$$d_8 = \sin\theta\sin 2\theta \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta \end{vmatrix} = 0$$

En effet, les lignes L_2 et L_3 sont égales donc $d_8 = 0$.

- La règle de Sarrus donne : $d_9 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 1 & a \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2ab$

- On applique le pivot de Gauss classique sur les lignes, en commençant par $(L_1 \leftarrow L_1 + L_3)$ puis $(L_1 \leftarrow -L_1)$:

$$d_{10} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 8 & 36 \\ 0 & 1 & -29 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -29 \end{vmatrix}$$

L'opération $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$ donne :

$$d_{10} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -30 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -30 \end{vmatrix} = -4 \times 67$$

- On commence par $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$ puis $(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)$:
$$d_{11} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ 2b+2c & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c-b \\ a & c & b-c \\ 2b+2c & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b+c & 0 \\ a & c & b-c \\ 2b+2c & a & 0 \end{vmatrix}$$
On développe par rapport à la troisième colonne, on factorise la première colonne par 2, et on développe :
$$d_{11} = -(b-c)\begin{vmatrix} 2a & b+c \\ 2b+2c & a \end{vmatrix} = 2(c-b)\begin{vmatrix} a & b+c \\ b+c & a \end{vmatrix} = 2(c-b)(a-b-c)(a+b+c)$$

- On applique le pivot de Gauss classique sur les lignes :
$$d_{12} = \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ a-2b & 3a-4b & 2a-3b \\ 2a-b & a-2b & 2a-2b \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{matrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ 0 & a-3b & a-2b \\ 3b & -3a & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a-2b & 2a-b & a-b \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2)$$
$$= -3\begin{vmatrix} a & -b & a-b \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2)$$
$$= -3\begin{vmatrix} a-b & a-b & a-b \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix} = -3(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & -a & 0 \\ 0 & a-3b & a-2b \end{vmatrix}$$
On continue avec les opérations $(C_2 \leftarrow C_2 - C_3)$ puis $(C_3 \leftarrow C_3 - C_1)$:
$$d_{12} = -3(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b & -a & 0 \\ 0 & -b & a-2b \end{vmatrix} = -3(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -a & -b \\ 0 & -b & a-2b \end{vmatrix} = 3(a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a-2b \end{vmatrix}$$
On termine par les opérations $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$ puis $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$:
$$d_{12} = 3(a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ a-b & a-b \end{vmatrix} = 3(a-b)\begin{vmatrix} a-b & b \\ 0 & a-b \end{vmatrix} = 3(a-b)^3$$
On peut en conclure que d_{12} est nul si $a = b$, ce qui se vérifie car dans ce cas :
$$d_{12} = \begin{vmatrix} -a & a & 0 \\ -a & -a & -a \\ a & -a & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{car les lignes } L_1 \text{ et } L_3 \text{ sont liées.}$$
Mais on sait aussi que c'est le seul cas où d_{12} est nul.

10 Calculer les déterminants suivants.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix} \qquad d_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} \qquad d_6 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & a \end{vmatrix} \qquad d_8 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & x+a \end{vmatrix} \qquad d_9 = \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$$

- On utilise l'algorithme classique du pivot de Gauss sur les lignes, c'est-à-dire qu'on applique les opérations élémentaires $(L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1)$, $(L_4 \leftarrow L_4 + 10L_2)$ puis $(L_4 \leftarrow L_4 - 30L_3)$:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -119 \end{vmatrix} = -119$$

- On applique les opérations $(L_4 \leftarrow L_4 - L_3)$, $(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On utilise le pivot de la ligne L_2 :

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On permute deux fois deux lignes $(L_1 \leftrightarrow L_2)$ puis $(L_2 \leftrightarrow L_4)$:

$$d_2 = 16(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

On continue l'algorithme : $(L_4 \leftarrow L_4 - L_2)$ puis $(L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3)$

$$d_2 = 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 160$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes :

$$d_3=\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\i&1&i&1\\1&-1&1&-1\\1&i&i&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&2&2i&0\\0&-1-i&2&-1+i\\0&0&1+i&1+i\end{vmatrix}$$

$$=2(1+i)\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&1&i&0\\0&-1-i&2&-1+i\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2(1+i)\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&1&i&0\\0&-i&2+i&-1+i\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=2(1+i)\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&1&i&0\\0&0&1+i&-1+i\\0&0&1&1\end{vmatrix}=-2(1+i)\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&1&i&0\\0&0&1&1\\0&0&1+i&-1+i\end{vmatrix}$$

$$=-2(1+i)\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&1&i&0\\0&0&1&1\\0&0&i&-2+i\end{vmatrix}=-2(1+i)\begin{vmatrix}1&i&-1&-i\\0&1&i&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=4(1+i)$$

- On applique les opérations $(L_4\leftarrow L_4-3L_3)$, $(L_3\leftarrow L_3-2L_2)$ puis $(L_2\leftarrow L_2-L_1)$:

$$d_4=\begin{vmatrix}0!&1!&2!&3!\\1!&2!&3!&4!\\2!&3!&4!&5!\\3!&4!&5!&6!\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0!&1!&2!&3!\\0&1!&2.2!&3.3!\\0&2!&2.3!&3.4!\\0&3!&2.4!&3.5!\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne, on factorise les colonnes C_2 et C_3 puis on recommence :

$$d_4=\begin{vmatrix}1!&2.2!&3.3!\\2!&2.3!&3.4!\\3!&2.4!&3.5!\end{vmatrix}=2\times3\times\begin{vmatrix}1!&2!&3!\\2!&3!&4!\\3!&4!&5!\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1!&2!&3!\\0&2!&2.3!\\0&3!&2.4!\end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}2!&2.3!\\3!&2.4!\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix}2!&3!\\3!&4!\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix}2!&3!\\0&3!\end{vmatrix}=12^2=144$$

- On applique les opérations $(L_4\leftarrow L_4-L_3)$, $(L_3\leftarrow L_3-L_2)$ puis $(L_2\leftarrow L_2-L_1)$:

$$d_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&a&a&a\\1&a&a^2&a^2\\1&a&a^2&a^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-1&a-1&a-1\\0&0&a^2-a&a^2-a\\0&0&0&a^3-a^2\end{vmatrix}=a^3(a-1)^3$$

Ce déterminant est donc nul pour $a=0$ et $a=1$, ce qui se voit tout de suite, mais seulement dans ces cas-là.

- On développe par rapport à la première ligne :

$$d_6=\begin{vmatrix}\lambda&1&0&0\\2&\lambda&1&0\\0&1&\lambda&1\\0&0&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\1&\lambda&1\\0&2&\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1&0\\0&\lambda&1\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^3-3\lambda)+2\begin{vmatrix}\lambda&1\\2&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4-3\lambda^2+2(\lambda^2-2)=\lambda^4-5\lambda^2+4=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$$

On aurait pu faire apparaître ce déterminant sous forme factorisée, par exemple en commençant par les opérations $(C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$, $(C_1 \leftarrow C_1 - C_3)$, $(C_1 \leftarrow C_1 + 2C_4)$.

- Par opérations élémentaires sur les lignes puis sur les colonnes :

$$d_7 = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ a-b & a & a+b & a+b \\ a-b & a-b & a & a+b \\ a-b & a-b & a-b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b & a+b \\ -b & -b & 0 & 0 \\ -b & -2b & -b & 0 \\ -b & -2b & -2b & -b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ -b & 0 & b & b \\ -b & -b & 0 & b \\ -b & -b & -b & 0 \end{vmatrix} = -b^3 \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b^3 \begin{vmatrix} 0 & b & a+b & a+b \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= b^3 \begin{vmatrix} b & a+b & a+b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} b & 0 & a+b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b^3 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = b^4$$

On peut vérifier par exemple que si $a = b$ ou $a = -b$ alors ce déterminant est égal à b^4, car il est triangulaire.

- En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$d_8 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & x+a \end{vmatrix} = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- On commence par les opérations $(L_1 \leftarrow L_1 - L_3)$ puis $(L_2 \leftarrow L_2 - L_4)$:

$$d_9 = \begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & 0 & c-a & 0 \\ 0 & a-c & 0 & c-a \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix} = (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$$

On continue avec $(C_3 \leftarrow C_3 + C_1)$ et $(C_4 \leftarrow C_4 + C_2)$, puis on développe :

$$d_9 = (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & b & a+c & 2b \\ b & c & 2b & a+c \end{vmatrix} = (a-c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a+c & 2b \\ c & 2b & a+c \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)^2 \begin{vmatrix} a+c & 2b \\ 2b & a+c \end{vmatrix} = (a-c)^2(a+c-2b)(a+c+2b)$$

11 Soit a et b deux réels, et :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

a. Justifier que la matrice M n'est pas inversible si $a = b$.

b. Existe-t-il d'autres cas où la matrice M n'est pas inversible ?

a. Si $a = b$ alors :

$$M = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible car elle est de rang 1 (ou 0 si $a = 0$).

b. On calcule le déterminant de M en commençant par les opérations ($L_2 \leftarrow L_2 - L_1$) et ($L_3 \leftarrow L_3 - L_1$), puis en factorisant les lignes 2 et 3 :

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On termine avec le règle de Sarrus :

$$\det M = (b-a)^2(a+2b)$$

Ceci montre que le déterminant de M est nul si $a = b$ ou $a = -2b$.
Il existe donc un autre cas où la matrice n'est pas inversible, c'est le cas où $b = -2a$.
En effet dans ce cas :

$$M = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible, par exemple car la somme des trois colonnes est nulle, donc $C_3 = -(C_1 + C_2)$.

12 Démontrer qu'une matrice antisymétrique de taille (n, n) avec n impair n'est jamais inversible.

Une matrice est antisymétrique si et seulement si : ${}^tM = -M$

Pour toute matrice M : $\det {}^tM = \det M$

Si M est de taille (n, n) alors par multilinéarité du déterminant : $\det(-M) = (-1)^n \det M$

Donc si n est impair alors : $\det(-M) = -\det M$

Et donc si M est antisymétrique est n est impair alors $\det M = -\det M$, ce qui donne $\det M = 0$, et donc M n'est pas inversible.

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on définit le déterminant de taille (n, n) suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Exprimer d_{n+2} en fonction de d_{n+1} et de d_n, et en déduire une formule générale pour d_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le développement de d_{n+2} par rapport à la première colonne donne :

$$d_{n+2} = 2\cos\theta \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & 1 & \cos\theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Ces deux déterminants sont de taille $(n+1, n+1)$, le premier est d_{n+1}. Quant au second, on peut le développer par rapport à la ligne L_1, on obtient alors d_n. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_{n+2} = 2\cos\theta\, d_{n+1} - d_n$$

Il s'agit d'une relation de double-récurrence. Le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1 = 0$$

Son discriminant est $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta = (2i\sin\theta)^2$, donc ses racines sont :

$$\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

On suppose que ces deux racines sont distinctes, c'est-à-dire que θ n'est pas un multiple de π. Alors il existe deux constantes α et β, éventuellement complexes, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$$

Ceci s'écrit aussi :

$$d_n = (\alpha+\beta)\cos(n\theta) + (\alpha-\beta)i\sin(n\theta)$$

En posant $A = (\alpha+\beta)$ et $B = (\alpha-\beta)i$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$$

On calcule les premiers termes :

$$d_1 = \det(\cos\theta) = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & \cos\theta \end{vmatrix} = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

On en déduit $A = 1$ et $B = 0$, ce qui montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = \cos(n\theta)$$

Si maintenant θ est un multiple de π, alors $\alpha = k\pi$ où k est un entier. L'équation caractéristique admet $e^{i\theta} = (-1)^k$ pour unique solution, donc le terme général de d_n est :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = (\alpha n + \beta)(-1)^{kn}$$

On calcule :

$$d_1 = \cos(k\pi) = (-1)^k \qquad \text{et} \qquad d_2 = \cos(2k\pi) = 1$$

On en déduit $(\alpha + \beta)(-1)^k = (-1)^k$ et $2\alpha + \beta = 1$, d'où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = (-1)^{kn}$$

Or $\cos(nk\pi) = (-1)^{nk}$ donc la formule obtenue dans le premier cas est toujours valable. Finalement, dans tous les cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = \cos(n\theta)$$

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et a, b deux réels. On note d_n le déterminant de taille $(2n, 2n)$ suivant.

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ & \ddots \quad \iddots & \\ 0 & & 0 \\ & \iddots \quad \ddots & \\ b & 0 & a \end{vmatrix}$$

a. Exprimer d_n en fonction de d_{n-1}.

b. En déduire la valeur de d_n.

a. En développant par rapport à la première ligne puis par rapport à la dernière ligne on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \qquad d_n = (a^2 - b^2)d_{n-1}$$

b. On calcule $d_1 = a^2 - b^2$, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad d_n = (a^2 - b^2)^n$$

15 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaires. On note $V_n(a_0, \dots, a_n)$ le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & \dots & a_n^0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On convient que $a_k^0 = 1$ même si a_k est nul.

a. Soit $P(X) = V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$. Démontrer que P est un polynôme de degré au plus n en X, et que $a_0 \dots a_{n-1}$ en sont racines.

b. En déduire que :

$$P(X) = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

On isolera le cas où les a_k ne sont pas tous distincts.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

a. On peut écrire :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0^n & \cdots & a_{n-1}^n & X^n \end{vmatrix}$$

Le développement par rapport à la dernière colonne montre que P est un polynôme de degré au plus n.

De plus, si X prend la valeur de l'un des a_k alors la dernière colonne est égale à la colonne de a_k, donc le déterminant est nul.

Ceci montre que $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont racines de P.

b. Supposons que les a_k sont distincts.

Alors le polynôme P est de degré au plus n et il a n racines distinctes, donc il s'écrit :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k)$$

où λ est son coefficient dominant.

Le développement du déterminant $P(X)$ dans la question précédente montre que le coefficient en X^n est $V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$, donc $\lambda = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$ et on obtient bien le résultat attendu.

Si maintenant deux des a_k sont égaux, alors deux colonnes sont égales dans les déterminants $V_n(a_0, \dots, a_{n-1}, X)$ et $V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1})$, donc ils sont nuls et ainsi l'égalité demandée est vraie aussi.

c. La question précédente donne, en spécialisant en a_n :

$$V_n(a_0, \dots, a_n) = V_{n-1}(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=0}^{n-1} (a_n - a_k)$$

On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad V_n(a_0,\dots,a_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=0}^{i-1}(a_i - a_k)\right)$$

Ceci donne bien :

$$V_n(a_0,\dots,a_n) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)$$

16 Soit n un entier strictement positif, et

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le rang de A_n en fonction de n.

b. Calculer le déterminant de A_n.

c. Soit $B_n = A_n - I_n$. En considérant l'application linéaire canoniquement associée à B_n, déterminer B_n^n.

d. Dans le cas où A_n est inversible, démontrer que son inverse est une combinaison linéaire des B_n^k.

a. Le noyau de A_n est l'ensemble des vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$x_1 = -x_2 = x_3 = \cdots = (-1)^{n-1}x_n = (-1)^n x_1$$

Ceci donne :

$$\ker A_n = \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^n}\} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \mathrm{Vect}\left((1,-1,1,\dots,-1)\right) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Ce noyau est de dimension nulle si n est impair, 1 si n est pair. D'après le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}\, A_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est impair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

b. On développe par rapport à la première colonne :

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1)^n$$

Ceci confirme que A_n est inversible si n est impair, car dans ce cas $\det A_n = 2$, mais pas si n est pair, car dans ce cas $\det A_n = 0$.

c. L'application canoniquement associée à B_n est :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) \end{array}$$

On constate que la composée n fois de f est l'identité, donc $B_n^n = I_n$.

d. On suppose que n est impair. Alors A_n est inversible.

On résout l'équation $A_n \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k B_n^k = I_n$, en remplaçant A_n par $B_n + I_n$ et en faisant apparaître un télescopage. On obtient qu'il existe bien une solution :

$$\lambda_0 = -\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = \frac{1}{2}$$

Ainsi l'inverse de A_n est $A_n^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k B_n^k$, ce qui s'écrit :

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Au-dessus de la diagonale, une diagonale sur deux contient des $\frac{1}{2}$, l'autre contient des $-\frac{1}{2}$. En dessous c'est également le cas mais la seconde diagonale contient des $\frac{1}{2}$, puis on alterne.

17 Soit A une matrice carrée

a. Démontrer que si A est inversible alors :

$$\begin{array}{rrl} & \mathrm{Com}({}^tA) & = {}^t\mathrm{Com}(A) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} & \mathrm{Com}(\lambda A) & = \lambda^{n-1}\,\mathrm{Com}(A) \\ & \mathrm{Com}\left(A^{-1}\right) & = \left(\mathrm{Com}(A)\right)^{-1} \end{array}$$

b. Démontrer que les deux premiers résultats restent vrais si A n'est pas inversible.

a. Tout se démontre grâce à la relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)A = (\det A)I_n$.

b. Il faut utiliser la définition de la comatrice.

Les cofacteurs c_{ij} sont $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, et on remarque que $A_{ji} = ({}^tA)_{ij}$.

Ensuite $\det(\lambda A)_{ij} = \lambda^{n-1} \det A_{ij}$.

18 Soit A une matrice inversible. Déterminer toutes les matrices M telles que :
$$\mathrm{Com}(M) = A$$

Si M est solution alors $M\,{}^t\!A = \det(M)I_n$.

Le cas où $\det M = 0$ est exclus.

On aboutit à $M = \zeta\,{}^t\!A^{-1}$ où ζ est une racine $(n-1)^{\text{ème}}$ de $\det A$.

On vérifie, sachant que pour toute matrice B inversible : $\mathrm{Com}(B) = \det(B)\,{}^t\!B^{-1}$, on obtient $\mathrm{Com}(M) = A$.

19 Soit A une matrice de taille (n, n).

a. Quel est le rang de $\mathrm{Com}(A)$ si A est de rang n ?

b. Démontrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$ alors $\mathrm{Com}(A)$ est nulle.

c. On suppose que A est de rang $n-1$. Démontrer que $\mathrm{im}\,{}^t\mathrm{Com}(A) \subset \ker A$ et en déduire le rang de $\mathrm{Com}(A)$.

d. Démontrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \lambda A$, où λ est un scalaire à déterminer.

a. Si A est de rang n alors A est inversible, donc $\mathrm{Com}(A)$ est inversible, donc $\mathrm{Com}(A)$ est de rang n.

b. Si $\mathrm{rg}\,A \leqslant n-2$ alors aucune sous-matrice de A de taille $(n-1, n-1)$ n'est inversible, donc tous les cofacteurs de A sont nuls.

c. Si $\mathrm{rg}\,A = n-1$ alors $\ker A$ est une droite vectorielle. Comme $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = 0_n$ alors $\mathrm{im}({}^t\mathrm{Com}(A)) \subseteq \ker A$, donc $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.

d. On obtient $\lambda = (\det A)^{n-2}$.

On le démontre si A est inversible, avec au passage $\det \mathrm{Com}(A) = (\det A)^{n-1}$.

Pour $n = 2$ on a toujours $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = A$.

Sinon c'est en fonction du rang. Par exemple pour le rang $n-1$, $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1 avec $1 \leqslant n-2$ donc $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = 0_n$.

20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau.

b. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\det A \in \mathbb{Z}$.

c. Justifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors $\mathrm{Com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
Démontrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $AB = I_n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.
En déduire que les éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ sont les matrices de déterminants ± 1.

a. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +)$ est un groupe, le produit de deux matrices entières est une matrice entière, la matrice identité est entière, et la distributivité est vérifiée.

b. On utilise la formule

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

c. Les coefficients de la comatrice sont, au signe prêt, des déterminants de matrices extraites de A, donc d'après la question précédente ce sont des entiers.

d. On utilise la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ pour le sens direct, et la relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_n$ pour le sens indirect.
Si $AB = I_n$ alors $BA = I_n$ car les matrices entières sont réelles.