Réponses du T. D. B12
Espaces vectoriels euclidiens

① Pour tous $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$ on pose :

$$(u \mid v) = 5xx' + xy' + x'y + yy'$$

Démontrer que cette application est un produit scalaire.

Pour démontrer que l'application est définie positive, on remarque que pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(u \mid u) = 5x^2 + 2xy + y^2 = (2x)^2 + (x + y)^2$$

Ceci montre que $(u \mid u)$ est positif, et nul si et seulement si $u = 0_{\mathbb{R}^2}$.

② Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels distincts fixés. Démontrer que l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(\alpha_k)Q(\alpha_k)$$

est un produit scalaire.

La bilinéarité est conséquence de la linéarité de la spécialisation des polynômes.
Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\varphi(P, Q)$ est un réel donc φ est une forme bilinéaire.
La symétrie est immédiate.
φ est définie positive car si $\varphi(P, P) = 0$ alors P admet $n + 1$ racines, et comme P est degré au plus n alors P est nul.

③ Démontrer les égalités suivantes, valables pour tous vecteurs u, v d'un espace vectoriel préhilbertien.

a. Identité de polarisation :

$$(u \mid v) = \frac{1}{4}\left(||u + v||^2 - ||u - v||^2\right)$$

b. Identité du parallélogramme :

$$2(||u||^2 + ||v||^2) = ||u + v||^2 + ||u - v||^2$$

On écrit :

$$||u+v||^2 = (u+v\,|\,u+v) = ||u||^2 + 2\,(u\,|\,v) + ||v||^2$$
$$||u-v||^2 = (u-v\,|\,u-v) = ||u||^2 - 2\,(u\,|\,v) + ||v||^2$$

La soustraction est l'addition des deux lignes donnent les deux formules.

4 Soit u et v deux vecteurs de E tels que :

$$||u+v|| = 5 \qquad \text{et} \qquad ||u-v|| = 1$$

Ces vecteurs peuvent-ils être orthogonaux ?

D'après l'identité de polarisation $(u\,|\,v) = 1$ donc u et v ne sont pas orthogonaux.

5 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que :

$$F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp \qquad \text{et} \qquad F^\perp + G^\perp \subseteq (F\cap G)^\perp$$

Pour un contre-exemple voir l'exercice de T.D. **18**.

6 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et :

$$u_1 = \tfrac{1}{3}(2,2,1) \qquad u_2 = \tfrac{1}{3}(-2,1,2) \qquad u_3 = \tfrac{1}{3}(1,-2,2)$$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est orthonormée, et en déduire que c'est une base orthonormée de E.
b. Donner les coordonnées du vecteur $(3,1,1)$ dans cette base.

Réponse : $u = 3u_1 - u_2 + u_3$.

7 Orthonormaliser la base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$, où

$$u_1 = (1,1) \qquad \text{et} \qquad u_2 = (1,2)$$

Réponse : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ $\qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

8 Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ où :

$$u_1 = (1, 1, -1) \qquad u_2 = (1, -1, 1) \qquad u_3 = (-1, 1, 1)$$

Réponse : $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1) \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1).$

9 Démontrer que l'inclusion de l'exercice **5** est une égalité si E est euclidien.

On applique la première égalité aux sous-espaces vectoriels $F^\perp$ et $G^\perp$.
L'égalité $A^{\perp\perp} = A$ permet de conclure.

10 (Suite de l'exercice **7**) Soit $F = \text{Vect}\,(u_1)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.
b. Quelle est la distance de $v = (13, 3)$ à F ?

Réponses : $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad d(v, F) = 5\sqrt{2}.$

11 (Suite de l'exercice **8**) Soit $F = \text{Vect}\,(u_1, u_2)$.

a. Calculer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.
b. En déduire la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de E par rapport à F.

Réponses : $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

12 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$. On munit E du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2 \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

Pour tout $k = 0, 1, 2$ on pose $g_k(x) = x^k$. Enfin on note $F = \text{Vect}\,(g_0, g_1, g_2)$.

a. Orthonormaliser la base (g_0, g_1, g_2) de F.
b. Calculer le projeté orthogonal de la fonction exponentielle sur F, et la distance de cette fonction à F.

On obtient la base orthonormée :

$$e_0(x) = 1 \qquad e_1(x) = \sqrt{3}(2x-1) \qquad e_2(x) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)$$

Ensuite $\quad p(\exp) = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \quad$ avec :

$$\lambda_0 = e-1 \qquad \lambda_1 = \sqrt{3}(3-e) \qquad \lambda_2 = \sqrt{5}(7e-19)$$

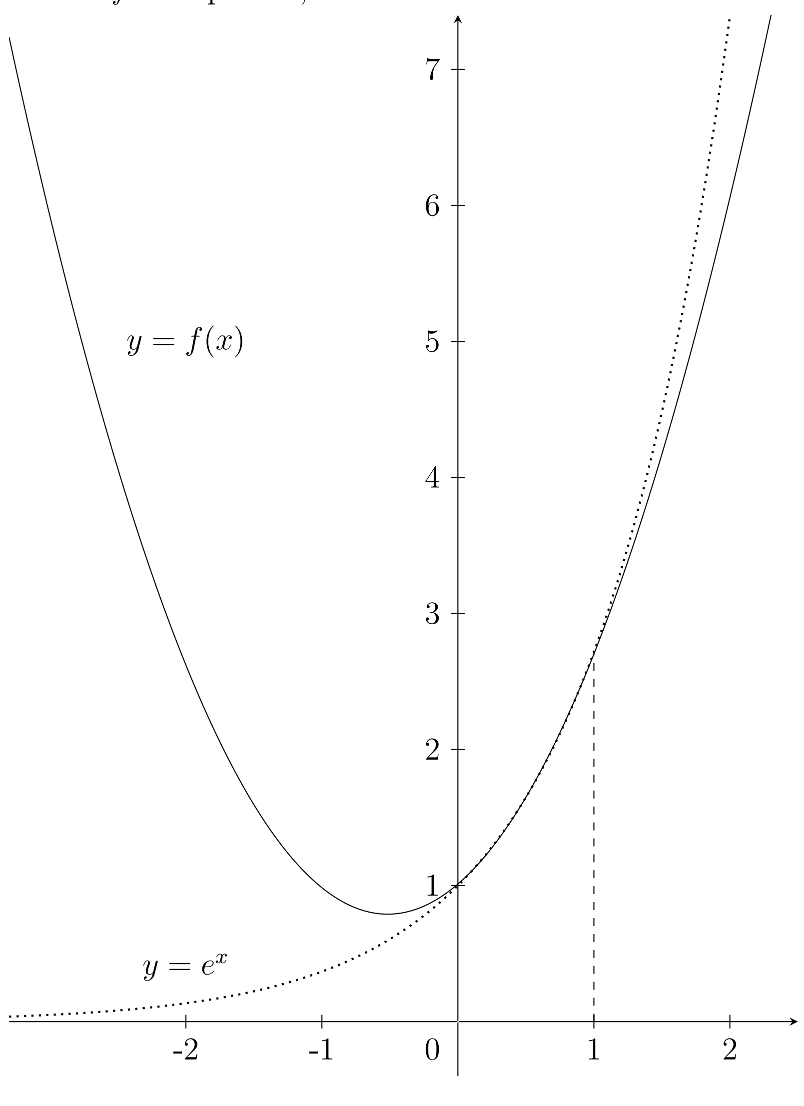
En notant $f = p(\exp)$:

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) = (e-1) + 3(3-e)(2x-1) + 5(7e-19)(6x^2-6x+1)$$

Par ordinateur :

$$d(\exp, f) = ||\exp - f|| = \left(\int_0^1 (e^x - f(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}0053$$

Le graphique ci-dessous montre qu'effectivement la fonction polynomiale du second degré f est une bonne approximation de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0,1]$.
L'écart maximal entre f et exp est 0,015.



1 Dans $E = \mathbb{R}^2$ on note $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$.

Les applications φ suivantes sont-elles des produits scalaires ?

a. $\varphi(u, v) = xx' - 2yy'$
b. $\varphi(u, v) = xy' - x'y$
c. $\varphi(u, v) = xx' - 2xy' - 2x'y + 6yy'$
d. $\varphi(u, v) = xx' - 4xy' - 4x'y + yy'$

Toutes les applications sont bilinéaires.

a. $\varphi(u, u) < 0$ pour $u = (0, 1)$.
b. φ n'est pas symétrique.
c. φ est un produit scalaire.

$$\varphi(u, u) = (x - 2y)^2 + 2y^2$$

d. $\varphi(u, u) < 0$ pour $u = (1, 2)$.

3 Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in E$ on pose :

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

a. Démontrer que N est une norme euclidienne sur E, c'est-à-dire qu'elle provient d'un produit scalaire.
b. Donner une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

a. L'identité de polarisation montre que N est la norme associée au produit scalaire :

$$(u \mid v) = xx' + \tfrac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$$

Pour démontrer que ce produit scalaire est défini positif, écrire :

$$(u \mid u) = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

b. Par orthonormalisation on obtient par exemple $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -2)$.

4 Soit u, v, u', v' quatre vecteurs d'une espace préhilbertien tels que :

$$u + v = u' + v' \qquad ||u|| = ||u'|| \qquad ||v|| = ||v'||$$

Démontrer que $u + v$ et $u - u'$ sont orthogonaux.

Écrire $||v|| = ||v'||$ avec $v' = u + v - u'$.

5 Soit u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel E.

Démontrer que si $||u|| \leqslant 1$ et $||v|| \leqslant 1$ alors :

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad ||\lambda u + (1-\lambda)v|| \leqslant 1$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

Par inégalité triangulaire :

$$||\lambda u + (1-\lambda)v|| \leqslant |\lambda|.||u|| + |1-\lambda|.||v|| \leqslant \lambda + (1-\lambda) = 1$$

L'ensemble des $\lambda u + (1-\lambda)v$ pour $\lambda \in [0,1]$ est le segment $[u,v]$.
si deux points sont dans la boule de centre 0 et de rayon 1 alors tout le segment les reliant est dans cette boule.

6 Soit E un espace préhilbertien réel, et u, v deux vecteurs de E.

Démontrer que u et v sont orthogonaux si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad ||u|| \leqslant ||u + \lambda v||$$

Le sens direct est conséquence du théorème de Pythagore.
Pour le sens indirect, comme $||u+\lambda v||^2 - ||u||^2 \geqslant 0$ alors :

$$||v||^2 \lambda^2 + 2\,(u\,|\,v)\,\lambda \geqslant 0$$

Si v est nul alors u et v sont orthogonaux. Sinon le discriminant du polynôme ci-dessus est $-4\,(u\,|\,v)^2$, il doit être nul.

7 Soit E un espace préhilbertien réel.

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall u \in E \qquad ||u||^2 = \sum_{i=1}^{p} (u\,|\,e_i)^2$$

Démontrer que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de E.

On démontre que la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est orthogonale. Elle est donc libre.
On pose, pour tout vecteur u :

$$v = u - \sum_{i=1}^{p} (u\,|\,e_i)\,e_i$$

On démontre que $||v|| = 0$. La famille est donc génératrice.

8 Soit E un espace euclidien, et soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Démontrer que si F et G sont orthogonaux alors $F = G^{\perp}$ et $G = F^{\perp}$.

Raisonner sur la dimension.

9 Soit E un espace préhilbertien réel et v un vecteur non-nul de E. Décrire l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \frac{(u \mid v)}{||v||^2} v \end{aligned}$$

On démontre que f est linéaire, puis que f est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\,(v)$.

10 Soit E un espace vectoriel euclidien, et f un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall u \in E \qquad (u \mid f(u)) = 0$$

a. Démontrer que :

$$\forall (u, v) \in E^2 \qquad (u \mid f(v)) = -\,(f(u) \mid v)$$

b. Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.

a. Développer $(u + v \mid f(u + v))$.
b. Démontrer que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont orthogonaux grâce à la question précédente, puis appliquer le théorème du rang.

11 Soit E un espace préhilbertien réel, et p un projecteur de E. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E \qquad ||p(u)|| \leqslant ||u||$$

On pourra utiliser un vecteur $v + \lambda w$.

Tout vecteur $u \in E$ s'écrit $u = v + w$ avec $v = p(u)$ et $w \in \ker p$. Si p est un projecteur orthogonal alors v et w sont orthogonaux, donc le théorème de Pythagore permet de conclure.
Pour l'autre sens écrire $||v|| \leqslant ||v + \lambda w||$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

12 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel et :

$$u_1 = (0,1,1) \quad u_2 = (1,0,1) \quad u_3 = (1,1,0)$$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E et orthonormaliser celle-ci.
b. Donner les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base.

a. Réponses : $\quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = (0,1,1) \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$
b. Les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ dans cette base sont : $\quad \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

13 Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, et p le projecteur orthogonal de E sur F, plan vectoriel d'équation $x - 2y + z = 0$.

a. Donner la matrice de p dans la base canonique de E.
b. Quelle est la distance du point de coordonnées $(2,1,2)$ au plan F ?

La matrice de p dans la base canonique est : $\quad P = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

En notant $u = (2,1,2)$: $\quad p(u) = \frac{5}{3}(1,1,1) \qquad u - p(u) = \frac{1}{3}(1,-2,1) \qquad d(u,F) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

14 Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. On souhaite déterminer le projecteur de E sur :

$$F = \{\, (x,y,z,t) \in E \mid 2x - 8y + 3z + 2t = 0 \}$$

a. Donner une base orthonormée de $F^\perp$.
b. Soit q le projecteur orthogonal sur $F^\perp$. Exprimer $q(u)$ en fonction de u et de la base de la question précédente.
c. En déduire la matrice de q, puis celle du projecteur orthogonal de E sur F dans la base canonique.

a. Réponse : $F^\perp = \mathrm{Vect}\,((2,-8,3,2))$, $u_4 = \frac{1}{9}(2,-8,3,2)$ est de norme 1.
b. $\forall u \in E \quad q(u) = (\,u \,|\, e_4)\, e_4 \qquad$ et $\qquad p = \mathrm{Id}_E - q$

Les matrices de q et p sont :

$$Q = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & -16 & 6 & 4 \\ -16 & 64 & -24 & -16 \\ 6 & -24 & 9 & 6 \\ 4 & -16 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 77 & 16 & -6 & -4 \\ 16 & 17 & 24 & 16 \\ -6 & 24 & 72 & -6 \\ -4 & 16 & -6 & 77 \end{pmatrix}$$

15 Soit E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $u_0 = (9, 2, 6)$.

Réponse : $S = \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 41 & 36 & 108 \\ 36 & -113 & 24 \\ 108 & 24 & -49 \end{pmatrix}$

16 Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer l'ensemble F des points fixes de A, en donner une base orthonormée $\mathscr{F}$.
b. Compléter la famille $\mathscr{F}$ en une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
c. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
d. Vérifier que $F^\perp$ est stable par f. Décrire la restriction de f à $F^\perp$, puis décrire l'application f géométriquement.

a. Réponses : $F = \text{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$.
b. Par exemple : $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$.
c. Quelle que soit la base choisie, si elle est directe on obtient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d. f est la rotation de l'espace d'axe F et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, où l'orientation du plan $F^\perp$ est donnée par la règle de la main droite.

17 Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

On dit que f est une *isométrie vectorielle* si :

$$\forall u \in E \qquad ||f(u)|| = ||u||.$$

On dit que f est *orthogonal* si :

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad (\, f(u) \,|\, f(v)) = (\, u \,|\, v\,)\,.$$

a. Démontrer que f est une isométrie vectorielle si et seulement si f est orthogonal, et que dans ce cas f est un automorphisme.

b. Démontrer qu'un endomorphisme orthogonal est une symétrie si et seulement si :

$$\forall (u,v) \in E^2 \qquad (\, f(u) \,|\, v) = (\, u \,|\, f(v))$$

Démontrer qu'alors f est une symétrie orthogonale.

c. On suppose que f est un endomorphisme orthogonal, et on note A sa matrice dans une base orthonormée de E. Démontrer que si f est une symétrie alors A est symétrique.

a. Utiliser l'identité de polarisation, ou développer $||f(u+v)|| = ||u+v||$.

b. Si f est une symétrie alors :

$$(\, f(u) \,|\, v) = (\, f \circ f(u) \,|\, f(v)) = (\, u \,|\, f(v))$$

Réciproquement :

$$(\, f \circ f(u) \,|\, v) = (\, f(u) \,|\, f(v)) = (\, u \,|\, v)$$

Donc $f \circ f(u) - u$ est orthogonal à tout vecteur de E, donc est nul.

Enfin, si $f(u) = u$ et $f(v) = -v$ alors :

$$(\, u \,|\, v) = (\, f(u) \,|\, -f(v)) = -\,(\, u \,|\, v)$$

Donc u et v sont orthogonaux.

c. Si f est une symétrie alors l'égalité $(\, f(e_i) \,|\, e_j) = (\, e_i \,|\, f(e_j))$ montre que $a_{ij} = a_{ji}$.

18 Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (\, f \,|\, g) = \int_0^1 fg$$

On note F le sous-espace vectoriel de E contenant les fonctions nulles en 0.

a. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer son orthogonal.

On pourra utiliser la fonction $u(t) = tf(t)$.

b. A-t-on $F^{\perp\perp} = F$? $\quad E = F \oplus F^{\perp}$?

a. Pour toute fonction f, la fonction u appartient à F, donc si $f \in F^\perp$ alors $(f \mid u) = 0$. La fonction $t \mapsto tf^2(t)$ est positive continue, donc elle est nulle. Ainsi f est nulle sur $]0,1]$, puis par continuité f est nulle.

   Ainsi $F^\perp = \{0_E\}$.

b. Les deux égalités sont fausse : $F^{\perp\perp} = E$, alors que $F \neq E$, et $F \oplus F^\perp = F \neq E$.

19 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (A,B) \in E^2 \qquad (A \mid B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$$

a. Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
b. Donner une base orthonormée de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
c. Pour toute matrice A de E, calculer le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors :

$$(A \mid B) = \textstyle\sum_{ij} a_{ij}b_{ij}$$

a. On écrit $(A \mid B) = (B \mid A)$.

   Si ${}^tA = A$ et ${}^tB = -B$ alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(-BA) = -\operatorname{tr}(AB)$, donc $(A \mid B) = 0$.

   Comme $E = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont l'orthogonal l'un de l'autre.

b. On obtient des bases orthonormées avec les E_{ii} et les $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji})$ pour $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et les $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji})$ pour $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout vecteur de la base canonique : $p(E_{k\ell}) = \frac{1}{2}(E_{k\ell} + E_{\ell k})$.

   Ceci montre que le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est : $p(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

   Ceci peut être obtenu directement grâce à l'égalité $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

20 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exercice précédent.

Soit F l'ensemble des matrices de E de traces nulles.

a. Justifier que F est un hyperplan de E et en donner un supplémentaire orthogonal.
b. Pour toute matrice A de E, Déterminer la distance de A à F.

a. F est le noyau de la trace qui est une forme linéaire non-nulle, donc F est un hyperplan de E.

   On constate que $(I_n \mid A) = 0$ pour toute matrice de F, donc I_n est orthogonal à F. Ainsi $F^\perp = \operatorname{Vect}(I_n)$.

b. Une base orthonormée de $F^\perp$ est (J) où $J = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n$.

   Soit p le projecteur orthogonal de E sur $F^\perp$. Alors $p(A) = (A \mid J)\, J = \frac{\operatorname{tr} A}{n} I_n$.

   La distance de A à F est $||p(A)|| = \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{n}}$.

21 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

a. Quelle est la dimension de E^* ?

b. Pour tout $v \in E$ on note $\varphi_v : u \mapsto (u \,|\, v)$. Justifier que φ_v appartient à E^*.

c. Démontrer que l'application $\Phi : v \mapsto \varphi_v$ est linéaire.

d. Démontrer que pour toute forme linéaire φ de E il existe un et un seul vecteur v de E tel que :

$$\forall u \in E \quad \varphi(u) = (u \,|\, v)$$

a. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies alors $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. Donc E^* est de dimension n.

b. Par linéarité à gauche du produit scalaire, l'application $u \mapsto (u \,|\, v)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

c. Par linéarité à droite du produit scalaire on obtient $\varphi_{\lambda v + v'} = \lambda \varphi_v + \varphi_{v'}$.

d. L'application Φ est injective, car $\varphi_v(v) = ||v||^2$. Par corollaire du théorème du rang, comme $\dim E = \dim E^*$ alors Φ est un isomorphisme.

Donc tout élément φ de E^* admet un et un seul antécédent par Φ.