Chapitre A13
Fonctions de deux variables

I. Topologie du plan

Définition. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne définie par :

Remarque. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|x| \leqslant ||(x, y)||$ et $|y| \leqslant ||(x, y)||$

Définition. Si u et v sont deux points de $\mathbb{R}^2$ la distance de u à v est $d(u, v) = ||u - v||$.

A. Ouverts

Définition. Soit a un élément de $\mathbb{R}^2$, r un réel strictement positif. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$B(a, r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u - a|| < r \right\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\overline{B}(a, r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u - a|| \leqslant r \right\}.$$

Exemple. Une partie de $\mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule.

Définition. Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte, ou est un ouvert, si pour tout élément a de U il existe un réel ε strictement positif tel que :

$$B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

On dit aussi que U est voisinage de tous ses points.

Exemples.

(i) $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts.

(ii) La partie $A = [0,1] \times [0,1]$ n'est pas ouverte. En effet le point $a = (0,0)$ est élément de A, mais pour tout $\varepsilon > 0$ la boule ouverte $B(a, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans A. Elle contient par exemple le point $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, 0\right)$ qui n'appartient pas à A.

(iii) Démontrons que toute boule ouverte est une partie ouverte.

Soit $B(a, r)$ une boule ouverte.

(iv) Les parties $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad$ sont ouvertes.

Propositions.

(i) L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

(ii) L'union d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert.

(iii) Le produit de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*.*

<u>Démonstration</u>.

(i) Soit $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts, et U leur intersection.

Soit a un point de U. Alors a appartient à tous les U_i donc pour tout $i = 1, \ldots, n$ il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$.

Posons $\varepsilon = \operatorname{Min}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Alors $\varepsilon > 0$, et :

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \varepsilon \leqslant \varepsilon_i \quad \text{donc} \quad B(a, \varepsilon) \subseteq B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$$

Ceci montre que $B(a, \varepsilon) \subseteq U$. Ainsi U est un ouvert.

(ii) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts, et U leur union.

Soit a un point de U. Alors a appartient à l'un des U_i, notons-le U_j. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq U_j$, et donc $B(a, \varepsilon) \subseteq U$.

Pour tout $a \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq U$, donc U est un ouvert.

(iii) Soit a, b, c, d quatre éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $c < d$. Soit $U =]a, b[\times]c, d[$.

Soit $u = (x, y)$ un point de U. Alors $a < x < b$ et $c < y < d$. On pose

$$\varepsilon = \operatorname{Min}\{x - a, b - x, y - c, d - y\}$$

Les quatre réels étant strictement positifs, ε est strictement positif.

On démontre que la boule $B(u, \varepsilon)$ est incluse dans le pavé $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, lequel est inclus dans U. $\square$

Remarque. Une partie de $\mathbb{R}^2$ est fermée, ou est un fermé, si son complémentaire est ouvert.

On peut démontrer qu'une partie F est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, si (u_n) converge alors sa limite appartient à F.

B. Fonctions de deux variables

Définition. Une fonction de deux variables est une fonction

$$f: \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

où A une partie de $\mathbb{R}^2$.

On note aussi $f(u) = f(x,y)$, avec $u = (x,y)$.

Rappel. Si A et B sont deux ensembles, et $f : A \to B$ est une application, alors le graphe de f est l'ensemble $\Gamma = \{\,(a, f(a)) \mid a \in A\}$. C'est un sous-ensemble de $A \times B$.

Ainsi si A est une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, alors le graphe de f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, donc une partie de l'espace. On dit que ce graphe est une surface ou une nappe.

Le graphe est l'ensemble d'équation $z = f(x,y)$: $\Gamma = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$

Exemples. Fonctions

$$\begin{array}{ll} (x,y) \mapsto x^2 + y^2 & (x,y) \mapsto \sin x \\ (x,y) \mapsto x^2 - y^2 & (x,y) \mapsto \sin x + \sin y \\ (x,y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2} & (x,y) \mapsto e^x \cos y \end{array}$$

Remarque. L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et un anneau. L'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont définies de la manière habituelle.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de A. Soit $A_1 = \{\,t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2) \in A\}$ et $A_2 = \{\,t \in \mathbb{R} \mid (a_1, t) \in A\}$. On appelle applications partielles de f en a les applications

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} A_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, a_2) \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{rcl} A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(a_1, y) \end{array}$$

Remarque. Les applications partielles φ_1 et φ_2 sont des fonctions d'une seule variable.

C. Continuité

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un point de U. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est continue en a si :

La fonction f est continue si elle est continue en tout point.
On note $\mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Soit a un point adjacent à U, c'est-à-dire que toute boule ouverte centrée en a rencontre U. Soit ℓ un réel. Alors f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U \qquad ||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(u) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si a appartient à U, alors f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a.

Exemple. On note p_1 et p_2 les fonctions projections canoniques :

$$p_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y. \end{array}$$

Alors ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $a = (a_1, a_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$, et soit ε un réel strictement positif. Alors pour $\eta = \varepsilon$ on a bien :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad ||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |p_1(u) - p_1(a)| \leqslant \varepsilon$$

Ceci car :

$$|p_1(u) - p_1(a)| = |x - a_1| \leqslant ||(x - a_1, y - a_2)|| = ||(x, y) - (a_1, a_2)|| = ||u - a||$$

Propositions.

(i) *L'ensemble $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et un anneau.*

(ii) *Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Si $f : U \to I$ est continue, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue alors la composée $\varphi \circ f$ est continue.*

(iii) *Si f, $g : U \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, g ne s'annulant pas, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue.*

Remarques.

(i) Ainsi la somme et le produit de deux fonctions continues sont continues.

(ii) Comme les projections canoniques p_1 et p_2 sont continues, alors toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$, toute fraction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

(iii) La fonction $(x, y) \mapsto e^x \cos y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition et produit.

Exemple 1. Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Remarque. La continuité des applications partielles de f en a n'implique pas la continuité de f en a.

D. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition. Soit E un ensemble, et f une fonction de E dans $\mathbb{R}^2$.

On note $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$ les projections canoniques de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Alors les fonctions $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ sont appelées les composantes de f. Elles vérifient :

$$\forall t \in E \qquad f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

Exemple. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est représentée par une courbe de l'espace.

Définitions.

(i) Soit I une partie de $\mathbb{R}$, a un point de I et $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction. On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall t \in I \qquad |t - a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad ||f(t) - f(a)|| \leqslant \varepsilon$$

(ii) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a un point de U et $f : U \to \mathbb{R}^2$ une fonction. On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U \qquad ||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad ||f(u) - f(a)|| \leqslant \varepsilon$$

La dernière implication s'écrit :

$$f\Big(\overline{B}(a, \eta)\Big) \subseteq \overline{B}(f(a), \varepsilon)$$

Proposition. *La composée de fonctions continues d'une ou deux variables, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, est continue sur son ensemble de définition.*

Proposition. *Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est continue si et seulement si ses fonctions composantes sont continues.*

Démonstration. Nous avons vu que les projections canoniques sont continues, donc si f est continue alors par composition $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues, *i.e.,* f_1 et f_2 sont continues.

On démontre la réciproque en utilisant : $\quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad ||(x, y)|| \leqslant |x| + |y|$

Ceci montre que :

$$||f(u) - f(a)|| = ||(f_1(u) - f_1(a), f_2(u) - f_2(a))|| \leqslant |f_1(u) - f_1(a)| + |f_2(u) - f_2(a)| \quad \square$$

II. Calcul différentiel

Dans toute cette partie U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

A. Dérivées partielles

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $a = (a_1, a_2)$ un point de U. On dit que f admet une dérivée partielle selon x en a si l'application partielle

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2)$$

est dérivable en a_1. On note alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ la dérivée de cette application en a_1, et on l'appelle dérivée partielle selon x de f en a.
De même on dit que f admet une dérivée partielle selon y en a si l'application partielle

$$\varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

est dérivable en a_2. On note alors $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ la dérivée de cette application en a_2, et on l'appelle dérivée partielle selon y de f en a.

Remarque. Les dérivées partielles sont donc :

On peut remarquer que les notations $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont ambiguës car x et y sont des variables muettes.

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y^2}{x^2+1} \end{array}$

Exemple 1 (suite). Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$

Remarque. L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.

B. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ en un point a de U si elle admet des dérivées partielles en a et si les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en a.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout point de U.

On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Proposition. *L'ensemble $\mathscr{C}^1(U)$ est un espace vectoriel réel et un anneau, en particulier la somme et le produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$.*

Le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Théorème (développement limité à l'ordre 1). *Soit $a = (a_1, a_2)$ un point de U et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ en a.*

Alors il existe une fonction $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que :

Corollaire. *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en a alors f est continue en a.*

Démonstration. Le développement limité ci-dessus montre, par inégalité triangulaire, que :

$$\forall u = (x, y) \in U \qquad |f(u) - f(a)| \leqslant |x - a_1| \left| \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right| + |y - a_2| \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| + ||u - a|| |\varepsilon(u)|$$
$$\leqslant ||u - a|| \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right| + |\varepsilon(u)| \right)$$

Par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{u \to a} f(u) = f(a)$. Ainsi f est continue en a. □

Remarques. Notons $a = (x_0, y_0)$ et $z_0 = f(a)$.

(i) Le développement limité ci-dessus peut s'écrire :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(||(h, k)||)$$

(ii) Le plan d'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

est appelé plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ en a.

C. Gradient

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et a un point de U.
Le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$ est appelé gradient de f en a. On note :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

On définit ainsi une fonction gradient de f :

$$\begin{aligned} \nabla f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\longmapsto \nabla f(a) \end{aligned}$$

Remarques.

(i) Le gradient de f en un point a est un vecteur du plan, donc le gradient de f peut être vu comme un *champ de vecteur*.

(ii) Le développement limité de f peut être écrit :

$$f(u) = f(a) + (\nabla f(a) \,|\, u - a) + ||u - a||\varepsilon(u) \qquad \text{avec} \quad \lim_{u \to a} \varepsilon(u) = 0$$

$$\text{ou} \qquad f(a + v) = f(a) + (\nabla f(a) \,|\, v) + ||v||\varepsilon'(v) \qquad \text{avec} \quad \lim_{v \to 0} \varepsilon'(v) = 0$$

Le gradient joue le rôle du coefficient directeur de la tangente pour les fonctions d'une seule variable.

Exemple 2. Soit $f : \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$

Alors pour tout point $a \in \mathbb{R}^2$: $\nabla f(a) = 2a$.

D. Généralisation

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ une fonction, de composantes f_1 et f_2.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si f_1 et f_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Remarque. Les fonctions de deux variables et leurs dérivées partielles sont notées en colonnes :

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad f : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Exemple 3. Soit $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2}{1+y^2}\right) \end{array}$

Les composantes de f sont les fonctions $f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ et $f_2 : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{1+y^2}$, par quotient elles admettent des dérivées partielles en tout point de U (*i.e.*, en tout couple (x,y) tel que $y \neq 0$).

Les quatre dérivées partielles sont continues sur U donc f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. La différentielle de f en a est l'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ canoniquement associée à la matrice Df_a :

- Si $f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$ $\quad Df_t = (f'(t))$
- Si $f : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ $\quad Df_t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$
- Si $f : (x,y) \mapsto f((x,y)) \in \mathbb{R}$ $\quad Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$
- Si $f : (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ $\quad Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

Remarque. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ alors sa différentielle est l'application $\mathrm{d}f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ u & \longmapsto & \mathrm{d}f_u. \end{array}$

E. Dérivation d'une composée

Lemme. *Soit n, p, q trois entiers, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $g : U \to V$ et $f : V \to \mathbb{R}^q$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $u \in U$:*

$$\mathrm{d}(f \circ g)_u = \mathrm{d}f_{g(u)}\mathrm{d}g_u$$

Théorème (Première règle de la chaîne).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, telles que : $\forall t \in I \quad (x(t), y(t)) \in U$
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et pour tout $t \in I$:

Démonstration. Posons $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Alors $\varphi : I \to U$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et on note $\varphi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

▷ **Exercice 1.**

Théorème (Seconde règle de la chaîne).
Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors la fonction $f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et pour $(x, y) \in V$:

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

Remarque. Soit $u = (x, y)$. D'après le lemme :

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi)_u = \mathrm{d}f_{\varphi(u)}\mathrm{d}\varphi_u$$

On en déduit :

Exemple 4. Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{y}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ par quotient des projections canoniques $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.
La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ car ses composantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ par produit.
On calcule $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r}$ et $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \theta}$ en tout point (r, θ).

▷ **Exercice 2.**

F. Dérivée selon un vecteur

Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, a un point de U, et v un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. On dit que f admet une dérivée selon le vecteur v en a si la fonction :

$$f_v : t \mapsto f(a + tv)$$

est dérivable en 0. On note :

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

Ce réel est appelé dérivée de f en a selon le vecteur v.

Remarques.

(i) Il s'agit donc d'une dérivée le long de la droite passant par a dirigée par v.

(ii) Les dérivées partielles de f sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ en un point a de U alors f admet des dérivées selon tout vecteur non-nul v en a. En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :*

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

En d'autres termes on peut écrire $D_v f(a) = (\nabla f(a) \mid v)$.

Démonstration. Soit $\varphi : t \mapsto a + tv$, et soit $a = (a_1, a_2)$.

Alors $\varphi(t) = (a_1 + \alpha t, a_2 + \beta t)$, donc φ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $f_v'(t) = (\alpha, \beta) = v$.

D'après la première règle de la chaîne la fonction $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

Remarques.

(i) Pour tout point a de U l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto D_v f(a) \end{aligned}$$

est la *différentielle de f au point a*, elle est linéaire de matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$.

(ii) D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \qquad (\nabla f(a) \mid v) \leqslant ||\nabla f(a)||\,||v||$$

On en déduit que pour tout vecteur unitaire v : $\quad D_v f(a) \leqslant ||\nabla f(a)||$

De plus le maximum est atteint si et seulement si v est colinéaire à $\nabla f(a)$.

On en déduit que le gradient de f en a indique la direction de la plus grande pente partant de $f(a)$ sur la surface d'équation $z = f(x, y)$.

G. Extrema

Théorème. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, a un point de U.*
Si f présente un extremum local en a alors ses dérivées partielles en a sont nulles.

Définition. Un point critique de f est un point a tel que $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
De façon équivalente : $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Démonstration. Si f présente un maximum local en a, alors il existe une boule ouverte $B(a,r)$ incluse dans U telle que :

$$\forall (x,y) \in B(a,r) \qquad f(x,y) \leqslant f(a)$$

Les applications partielles en $a = (a_1, a_2)$:

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

présentent donc elles aussi un maximum au voisinage respectivement de a_1 et a_2. Ainsi $\varphi_1'(a_1) = \varphi_2'(a_2) = 0$, soit $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$. $\square$

Remarques.

(i) Comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

- Si les dérivées partielles de f en a sont nulles, alors les applications partielles ne présentent pas forcément un extremum, comme le montre l'exemple de la fonction $(x,y) \mapsto x^3 + y^3$.
- Si les dérivées partielles de f sont nulles, et si les applications partielles présentent un extremum toutes les deux, alors là encore f ne présente pas forcément un extremum, comme le montre l'exemple de la fonction $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$.

  Il s'agit d'un *point-selle* ou *point-col*.
- Enfin si les applications partielles de f présentent toutes deux un extremum de même nature, alors là encore f ne présente pas obligatoirement un extremum, comme le montre l'exemple de la fonction $(x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 3xy$.

(ii) Dans la pratique, pour déterminer les extrema d'une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$, on cherche les points a où les dérivées partielles s'annulent, *i.e.,* les points critiques. Ce sont des extrema potentiels.

On détermine si chacun d'entre eux est un maximum, un minimum, ou un point-selle.

Exemple 5. Déterminer les extrema de :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x^2 + y^2 - 2x^3 \end{array}$$

$\triangleright$ **Exercice 3.**