Feuille de T. D. A13
Fonctions de deux variables

Exercices de cours

(1) Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y. \end{array}$

a. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner ses dérivées partielles.

c. En composant avec la fonction $x \mapsto (x,x)$ calculer la dérivée de $x \mapsto x^x$.

d. Calculer de même la dérivée de $x \mapsto x^{x^x}$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad \det(u, \nabla f(u)) = 0$$

a. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Démontrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = h(x^2+y^2)$$

Pour ceci, composer avec la fonction :

$$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

(3) Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+xy+3x+y \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} \end{array}$$

Travaux dirigés

1 Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles des ouverts de $\mathbb{R}^2$?

$$A = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^2 \qquad D = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} B\left((i,j), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \qquad E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \neq y \right\}$$

2 Représenter le graphe des fonctions suivantes :

$f_1 : (x,y) \mapsto x^2 - x$ $\qquad f_2 : (x,y) \mapsto x+y$

$f_3 : (x,y) \mapsto xy$ $\qquad f_4 : (x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}$

$f_5 : (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Démontrer que f est continue.

b. Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et donner leur valeur.

c. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

4 Reproduire l'exercice précédent avec la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5 Démontrer que l'application norme :

$$N : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ mais pas en $(0,0)$.

Vérifier que son gradient indique la direction de la plus grande pente et qu'il est orthogonal aux lignes de niveau.

6 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto f\left(t^3, t^2\right)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

b. Vérifier avec $f(x,y) = xy$ puis $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

7 Soit $U = (\mathbb{R}^*)^2$ et :

$$f : \begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\arctan\frac{x}{y}, \arctan\frac{y}{x}\right) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

a. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Soit a un point de $\mathbb{R}^2 \setminus U$. La fonction f admet-elle une limite en a ?

c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et donner ses dérivées partielles.

d. Calculer le gradient de $g \circ f$.

8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Démontrer que si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ alors il existe une fonction φ dérivable telle que :

$$\forall (x,y) \in U \qquad f(x,y) = \varphi(x).$$

$\boxed{\textbf{9}}$ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Pour ceci, composer avec l'application :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u+v, u-v). \end{array}$$

$\boxed{\textbf{10}}$ Déterminer les extrema des fonctions suivantes.

$$f_1 : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$$

$$f_2 : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$$

$$f_3 : (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$$

$$f_4 : (x,y) \mapsto x^y$$

$$f_5 : (x,y) \mapsto (x^2 - y)(2x^2 - y)$$

$$f_6 : (x,y) \mapsto xe^y + ye^x$$