Réponses
Feuille de TD. B14

Exercices de cours

1

$$F_1 = \frac{X^2+X+3}{X+5} \qquad F_2 = \frac{X+1}{X^2+X+1}$$

$$F_3 = \frac{X^4+1}{X^2+1} \qquad F_4 = \frac{3X^2+4X+2}{2X^2+4X+1}$$

2 $F_1 = X - 1 + \dfrac{2}{X+1}$

$F_2 = X^3 - X^2$

$F_3 = X^2 - 3X - 8 - \dfrac{19(X-1)}{X^2-2X+2}$

$F_4 = X^{n-1} + aX^{n-2} + \cdots + a^{n-1} + \dfrac{a^n}{X-a}$

$F_5 = X - 21 + \dfrac{P}{(X^2+3X+2)^7}$

6 $\dfrac{1}{X^n-1} = \displaystyle\sum_{\zeta\in\mathbb{U}_n} \frac{\zeta}{n(X-\zeta)}$

7

$F_1 = \dfrac{3}{X+4} - \dfrac{5}{(X+4)^2}$

$F_2 = \dfrac{1}{(X+1)} - \dfrac{3}{(X+1)^2} + \dfrac{3}{(X+1)^4}$

$F_3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{n}{i-1}}{(X-1)^i}$

Pour la dernière, utiliser la formule de Taylor ou la formule du binôme.

8 $F = \dfrac{X+3}{X^2+1} + \dfrac{2X-2}{(X^2+1)^2}$

9
$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{(X-1)^2(X+2)} \\ &= \frac{1}{9(X+2)} + \frac{1}{9(X-1)} + \frac{1}{3(X-1)^2} \end{aligned}$$

Pour trouver le coefficient de $\frac{1}{(X-1)}$ on peut trouver celui de $\frac{1}{(X-1)^2}$ et retrancher cette partie.

On peut aussi spécialiser en une valeur quelconque.

$$\begin{aligned} F_2 &= 1 + \frac{2X^3+2X^2-1}{(X-1)^2(X+1)^2} \\ &= 1 + \frac{3}{4(X-1)^2} + \frac{7}{4(X-1)} \\ &\qquad - \frac{1}{4(X+1)^2} + \frac{1}{4(X+1)} \end{aligned}$$

10

a. $(u_1\dots u_n)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} u_k\right)u_i' = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} u_k\right)\frac{u_i'}{u_i}$

b. $P = \lambda\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)^{m_i}$

$P' = \lambda\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}\right)m_i(X-\alpha_i)^{m_i-1}$

$\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{X-\alpha_i}$

c. $\displaystyle\int\frac{P'}{P} = \ln|P| = \ln|\lambda| + \sum_{i=1}^{n} m_i\ln|x-\alpha_i|$

D'où en dérivant le même résultat.

11 $F_1 = \dfrac{1}{4(X-1)} + \dfrac{1}{4(X+1)} - \dfrac{X}{2(X^2+1)}$

On peut soustraire les parties composées des pôles simples, ou passer par les complexes.

$F_2 = X - \dfrac{2X^3+X}{(X^2+1)^2} = X - \dfrac{2X}{X^2+1} + \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$

12 $F = 1 + \frac{1}{2(X-2)} + \frac{3}{2(X-4)}$

On écrit $F = \lambda + \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-4}$.

La limite en $+\infty$ donnc $\lambda = 1$.

La spécialisation en 1 et en 3 donne $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$

13

a. On écrit :

$$F = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\alpha'}{X+i} + \frac{\beta}{X-i\sqrt{2}} + \frac{\beta'}{X+i\sqrt{2}}$$

Par conjugaison $\alpha' = \bar{\alpha}$ et $\beta' = \bar{\beta}$.

On obtient $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = 1$ donc :

$$F = \frac{2X}{X^2+2} - \frac{X}{X^2+1}$$

b. On écrit :

$$F = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+2}$$

Comme F est impaire alors $b = d = 0$, par unicité.

On en déduit :

$$\frac{X^2}{(X^2+1)(X^2+2)} = \frac{a}{X^2+1} + \frac{c}{x^2+2}$$

On pose $Y = X^2$ et on obtient $a = -1$ et $c = 2$.

(14) On obtient :
$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$
Donc :
$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

(15) On doit avoir :
$$f(x) = ax + b + c\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + d\frac{1}{x^2+2x+2}$$
Donc $(ax+b)(x^2+2x+2) + 2cx + 2c + d = x^3$
Successivement $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ et $d = 2$.
$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1)$$

(16) On obtient :
$$f(x) = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$
Puis :
$$F(X) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x$$
On peut vérifier le développement en éléments simples avec les développements limités.

(17)

a. $$f(x) = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2}\right)$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right)$$

b. Poser $t = \tan u$.

(18) Ceci apparaît dans la décomposition en éléments simples réelle de $\frac{1}{X^n-1}$.
On obtient :
$$F(x) = \cos\theta\ln(x^2 - 2(\cos\theta)x + 1) - \sin\theta\arctan\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

(19)

a. $F_2(x) = \frac{1}{3}\ln(1-x^3)$

$F_2(x) + F_1(x) + F_0(x) = \ln(1-x)$

$f_1(x) - f_0(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$

$F_1(x) - F_0(x)$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

b. $F_0 = \frac{1}{2}(F_0+F_1+F_2) - \frac{1}{2}(F_1-F_0) - \frac{1}{2}F_2$

avec $F_2(x) = \frac{1}{3}\ln(1-x) + \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1)$

$$f_0(x) = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$$

(20) $$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4n^2+8n+3}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}$$
$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{k}{(k^2-1)^2} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \longrightarrow \frac{5}{16}$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+5}\right)$$
$$= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$
$$- \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \longrightarrow -\frac{43}{60}$$

Travaux dirigés

$\boxed{1}$ Si $\deg F_2 < 0$ et $\deg F_2 < 0$ alors :
$$\deg(F_1+F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2) < 0$$
Le noyau est l'ensemble $\mathbb{K}_-(X)$ des fractions rationnelles de degrés strictement négatifs.

L'image est $\mathbb{K}[X]$.

$\boxed{2}$

a. Il s'agit du théorème de Bézout. La condition équivaut à :
$$P_1Q_2 + P_2Q_1 = D$$

b. Les couples de polynômes (P_1, P_2) vérifiant l'identité sont les couples $(P_1 + AM, P_2 - AM)$ où M est le PPCM de Q_1 et Q_2 et A parcourt $\mathbb{K}[X]$.

c. La division euclidienne de P_1 par M fournit un polynôme de degré minimal, et le polynôme P_2 est alors également de degré minimal.

$\boxed{3}$

a. $$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{a-b}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x-b)^{n+1}}\right)$$

b. $$f^{(n)}(x) = n!\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right)$$

c. $$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right)$$

On obtient :
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (n-1)!(-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ $I_1 = \dfrac{\ln 3}{2} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}$

$I_2 = 1 + 5\ln 3 + \dfrac{25\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad I_3 = 8\ln 5 - 9\ln 3 - 4\ln 2$

$I_4 = \dfrac{\pi - \ln 2}{5}$ $\quad I_5 = -\dfrac{1}{144}$