Corrigé du Devoir à la Maison n°14

Exercice 1. La dure loi de la jungle

1. On réalise n expériences identiques et indépendantes : passer la rivière.

   La probabilité de réussite est $1-p$ à chaque expérience, et X est le nombre de réussites, donc par définition X suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.
2. Si l'événement $X = k$ a lieu alors il reste $n-k$ gnous.

   On réalise $n-k$ expériences identiques et indépendantes : survivre aux lionnes.

   La probabilité de réussite est $1-r$ à chaque expérience, Y est le nombre de réussites, donc par définition Y sachant $X = k$ suit une loi binomiale de paramètres $n-k$ et $1-r$.
3. Par propriété de la loi binomiale :

$$X(\Omega) = \{0, \dots, n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in X(\Omega) \quad P(X = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$$

   Comme $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ et Y peut prendre toutes les valeurs entre 0 et X alors $Y(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. En effet le nombre de gnous survivants est un entier compris entre 0 et n. Par propriété de la loi binomiale :

$$\forall i \in Y(\Omega) \qquad P_{X=k}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i}(1-r)^i r^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$

   La famille $\{X = k \mid k = 0, \dots, n\}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in Y(\Omega) \qquad P(Y = i) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) P_{X=k}(Y = i).$$

   Ceci donne :

$$P(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} \binom{k}{i}(1-r)^i r^{k-i}$$

   On calcule :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{k!}{i!((k-i)!)} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

   Donc :

$$P(Y = i) = (1-r)^i \binom{n}{i} \sum_{k=i}^{n} \binom{n-i}{k-i}(1-p)^k p^{n-k} r^{k-i}$$

Par changement de variable $j = k - i$:

$$\begin{aligned} P(Y=i) &= (1-r)^i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (1-p)^{i+j} p^{n-i-j} r^j \\ &= \binom{n}{i} ((1-r)(1-p))^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} ((1-p)r)^j p^{n-i-j} \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme :

$$P(Y=i) = \binom{n}{i} ((1-r)(1-p))^i ((1-p)r + p)^{n-i}.$$

4. On remarque que :
$$(1-r)(1-p) + (1-p)r + p = 1$$
Comme de plus $Y(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$ alors Y suit une loi binomiale de paramètres n et $(1-p)(1-r)$.

Pour expliquer ceci reconsidérons la situation : chaque gnou tente de passer la rivière puis les lionnes. Il a la probabilité $(1-p)$ de passer la rivière puis $(1-r)$ de passer les lionnes. Comme ces deux événements sont supposés indépendants alors il a la probabilité $(1-p)(1-r)$ de passer les deux épreuves.

Ainsi on répète n expériences identiques et indépendantes : passer la rivière et les lionnes. La probabilité de réussite est $(1-p)(1-r)$ et Y est le nombre de réussites donc Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, (1-p)(1-r))$.

Exercice 2. Fléchettes

1. La variable aléatoire T est égale à 1 si le joueur triche et 0 sinon.

   Or si le joueur triche alors il ajoute 1 point à son score, sinon il n'en ajoute pas, donc T est le nombre de points que s'ajoute le joueur, et $Y = X + T$.

   Comme T prend uniquement les valeurs 0 et 1 alors T suit une loi de Bernoulli. Son paramètre est $P(T=1) = E(T) = t$, *i.e.*, T suit une loi $\mathscr{B}(t)$.

   Comme $Y = X + T$ alors par linéarité de l'espérance $E(Y) = E(X) + E(T) = E(X) + t$.
2. Calculons la loi de Y. Le score du joueur est un entier compris entre 0 et n donc :
$$X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$$
   Le joueur ajoute parfois un point à son score, donc $X \leqslant Y \leqslant X + 1$, et :
$$Y(\Omega) \subseteq \{0, \ldots, n+1\}$$
   Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Comme $Y = X + T$ et $T(\Omega) = \{0, 1\}$ alors :
$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{i=0}^{1} P((X = k-i) \cap (T = i)) \\ &= P((X=k) \cap (T=0)) + P((X=k-1) \cap (T=1)) \end{aligned}$$

Par énoncé on sait que :

$$P_{X=k}(T=1) = a_k$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}P(Y=k) &= P_{X=k}(T=0)P(X=k) + P_{X=k-1}(T=1)P(X=k-1)\\ &= (1-a_k)P(X=k) + a_{k-1}P(X=k-1)\end{aligned}$$

3. Comme $Y = X + T$ alors :

$$V(Y) = V(X) + V(T) + 2\,\mathrm{Cov}(X,T).$$

De plus par bilinéarité de la covariance :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, X+T) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,T) = V(X) + \mathrm{Cov}(X,T).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= V(X) + \frac{1}{2}(V(Y) - V(X) - V(T))\\ &= \frac{1}{2}(V(X) + V(Y) - V(T))\end{aligned}$$

4. La famille $\{X = k \mid k = 0, \dots, n\}$ est un système complet d'événements donc la formule des probabilités totales donne :

$$P(T=1) = \sum_{k=0}^{n} P_{X=k}(T=1)P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} a_k P(X=k)$$

On calcule :

$$P(T=1) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$$

On reconnaît l'espérance de X, donc :

$$t = 1 - \frac{E(X)}{n}$$

5. Dans la première question on a montré que $Y(\Omega) \subseteq \{0, \dots, n+1\}$. La formule obtenue pour la loi de Y donne :

$$\forall k = 0, \dots, n+1 \qquad P(Y=k) = \frac{k}{n}P(X=k) + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)P(X=k-1)$$

Comme $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$ alors :

$$P(Y=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(Y=n+1) = 0$$

Ceci montre que $Y(\Omega) \subseteq \{1, \dots, n\}$.

6. On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$ donc :

$$X(\Omega)=\{0,\ldots,n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k\in\{0,\ldots,n\} \quad P(X=k)=\frac{1}{n+1}$$

(a) On applique la formule de la question 2 pour en déduire la loi de Y :

$$\forall k\in\{1,\ldots,n\} \qquad P(Y=k)=\frac{k}{n}\frac{1}{n+1}+\frac{n+1-k}{n}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}$$

On a donc montré que :

$$Y(\Omega)=\{1,\ldots,n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k\in\{1,\ldots,n\} \quad P(Y=k)=\frac{1}{n}$$

Ainsi Y suit la loi uniforme de paramètre n, notée $\mathscr{U}(n)$.

(b) L'espérance de X est :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k=\frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}$$

Comme Y suit une loi $\mathscr{U}(n)$ alors $E(Y)=\frac{n+1}{2}$.
On en déduit par linéarité : $E(T)=E(Y-X)=E(Y)-E(X)=\frac{1}{2}$.
Effectivement de résultat de la question 4 donne : $t=1-\frac{E(X)}{n}=\frac{1}{2}$.
Ainsi le joueur s'ajoute en moyenne un demi point en trichant.

(c) Par propriété de la loi uniforme : $V(Y)=\frac{n^2-1}{12}$.
Par propriété de la loi de Bernoulli : $V(T)=t(1-t)=\frac{1}{4}$.
Comme X suit une loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$ alors $X+1$ suit une loi uniforme sur $\{1,\ldots,n+1\}$ notée $\mathscr{U}(n+1)$ donc $V(X+1)=\frac{(n+1)^2-1}{12}$. Ainsi $V(X)=V(X+1)=\frac{n(n+2)}{12}$.
La formule de la question 3 donne :

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2-1}{12}+\frac{n(n+2)}{12}-\frac{1}{4}\right)=\frac{(n-1)(n+2)}{12}$$

Le coefficient de corrélation linéaire du couple (X,Y) est :

$$r(X,Y)=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\sqrt{\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}}=\sqrt{1-\frac{2}{n(n+1)}}$$

On constate :

- La covariance est positive. Effectivement, si X est grand alors Y est grand.
- Si $n=1$ alors $V(Y)=\operatorname{Cov}(X,Y)=0$. Effectivement dans ce cas le joueur réalise un score entre 0 et 1, s'il obtient 0 alors il inscrit 1 donc Y est constante égale à 1. Ainsi $V(Y)=0$, et X, Y sont indépendantes donc $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$.

7. Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ alors :

$$X(\Omega)=\{0,\dots,n\} \qquad \text{et} \qquad \forall k\in\{0,\dots,n\} \quad P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

On a noté $q=1-p$.

De plus $E(X)=np$ et $V(X)=npq$.

(a) On applique la formule de la question 2 pour en déduire la loi de Y. Pour tout $k\in\{1,\dots,k\}$ on obtient :

$$\begin{aligned}P(Y=k)&=\frac{n+1-k}{n}P(X=k-1)+\frac{k}{n}P(X=k)\\&=\frac{n+1-k}{n}\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n+1-k}+\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\\&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n+1-k}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^kq^{n-k}\\&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}(p+q)\\&=\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}\end{aligned}$$

Ceci montre en particulier que $Y(\Omega)=\{1,\dots,n\}$.

(b) Ainsi $(Y-1)(\Omega)=\{0,\dots,n-1\}$, et :

$$\forall k\in\{0,\dots,n-1\} \qquad P(Y-1=k)=P(Y=k+1)=\binom{n-1}{k}p^kq^{n-1-k}$$

Ceci montre que $Y-1$ suit une loi binomiale de paramètres $n-1$ et p, notée $\mathscr{B}(n-1,p)$.

(c) On en déduit :

$$E(Y-1)=(n-1)p$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(Y)=(n-1)p+1=np+1-p=np+q$$

Comme $T=Y-X$ alors : $E(T)=E(Y)-E(X)=q$. Ainsi $t=q$, le joueur s'ajoute en moyenne q point en trichant.

(d) La formule de la question 3 donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\frac{1}{2}(V(X)+V(X)-V(T))\\&=\frac{1}{2}(npq+(n-1)pq-q(1-q))=(n-1)pq.\end{aligned}$$

Encore une fois cette covariance est nulle lorsque $n=1$, de même que la variance de Y, car alors Y est constante égale à 1 et X, Y sont indépendantes.

De plus la covariance est positive car Y est grand si X est grand.

Le coefficient de corrélation linéaire est :

$$r(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\sqrt{1-\frac{1}{n}}.$$