Corrigé du Devoir à la Maison n°14

Exercice 1 : Endomorphisme nilpotent de rang maximal.

1. Comme f^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul alors il existe $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_E$.

2. (a) Pour $k = 0, \dots, n$ on note $\mathcal{P}_k$ la propriété : la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.
Démontrons par récurrence finie que cette propriété est vraie pour tout $k = 0, \dots, n$.
<u>Initialisation.</u> Pour $k = 0$ la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est la famille vide, elle est libre.
<u>Hérédité.</u> Supposons que pour un entier $k \in \{1, \dots, n\}$ la propriété $\mathcal{P}_{k-1}$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ une famille de scalaires telle que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E. \tag{1}$$

Par définition des u_i :

$$\lambda_1 f^{n-1}(u_n) + \lambda_2 f^{n-2}(u_n) + \cdots + \lambda_k f^{n-k}(u_n) = 0_E.$$

Par application de f :

$$f\Big(\lambda_1 f^{n-1}(u_n) + \lambda_2 f^{n-2}(u_n) + \cdots + \lambda_k f^{n-k}(u_n)\Big) = f(0_E).$$

Comme f est linéaire :

$$\lambda_1 f^{n}(u_n) + \lambda_2 f^{n-1}(u_n) + \cdots + \lambda_k f^{n-k+1}(u_n) = 0_E.$$

Comme f^n est l'endomorphisme nul :

$$\lambda_2 f^{n-1}(u_n) + \cdots + \lambda_k f^{n-(k-1)}(u_n) = 0_E.$$

Par définition des u_i :

$$\lambda_2 u_1 + \ldots + \lambda_k u_{k-1} = 0_E.$$

La famille $(u_1, \dots, u_{k-1})$ est libre par hypothèse de récurrence, donc :

$$\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

L'égalité (1) donne alors $\lambda_1 u_1 = 0$. Or $u_1 = f^{n-1}(u_n)$ donc u_1 est non-nul par choix de u_n, donc $\lambda_1 = 0$.
On a démontré que la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie.
L'hérédité est démontrée.
<u>Conclusion.</u> Par récurrence finie la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k = 0, \dots, n$.

(b) En particulier la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
Elle est de cardinal n qui est la dimension de E, donc elle est libre maximale et ainsi c'est une base de E.

3. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$ et i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant k$.
   Alors $f^k(u_i) = f^k(f^{n-i}(u_n)) = f^{n+k-i}(u_n)$.
   Comme $i \leqslant k$ alors $n + k - i \geqslant n$, donc $f^k(u_i) = f^n(f^{k-i}(u_n))$, et comme f^n est l'endomorphisme nul alors $f^k(u_i) = 0_E$, *i.e.*, $u_i \in \ker f^k$.
   On a démontré que pour tout $i = 1, \dots, k$: $u_i \in \ker f^k$.
   La famille $(u_1, \dots, u_k)$ est donc une famille libre de $\ker f^k$, et ainsi $\dim \ker f^k \geqslant k$.
   Soit maintenant j un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant n-k$. Alors $u_j = f^{n-j}(u_n) = f^{k+(n-k-j)}(u_n)$.
   Comme $j \leqslant n - k$ alors $n - k - j \geqslant 0$ donc $u_j = f^k(f^{n-k-j}(u_n))$, et $u_j \in \operatorname{im} f^k$.
   La famille $(u_1, \dots, u_{n-k})$ est donc une famille libre de $\operatorname{im} f^k$, et ainsi $\dim \operatorname{im} f^k \geqslant n-k$.
   D'après le théorème du rang, comme E est de dimension finie et f^k est linéaire :
   $$\dim \ker f^k + \dim \operatorname{im} f^k = \dim E = n.$$
   Autrement dit :
   $$\dim \operatorname{im} f^k = n - \dim \ker f^k.$$
   Nous avons démontré que $\dim \operatorname{im} f^k \geqslant n - k$ et $\dim \ker f^k \geqslant k$, donc :
   $$n - k \leqslant \dim \operatorname{im} f^k = n - \dim \ker f^k \leqslant n - k.$$
   Ceci montre que $\dim \operatorname{im} f_k = n - \dim \ker f^k = n - k$, et :
   $$\dim \operatorname{im} f^k = n - k \qquad \text{et} \qquad \dim \ker f^k = k$$
   Les familles $(u_1, \dots, u_k)$ et $(u_1, \dots, u_{n-k})$ sont donc des familles libres maximales respectivement de $\ker f^k$ et $\operatorname{im} f^k$.
   Finalement :
   - La famille $(u_1, \dots, u_k)$ est une base de $\ker f^k$,
   - La famille $(u_1, \dots, u_{n-k})$ est une base de $\operatorname{im} f^k$.
4. On constate :
   $$\forall i = 2, \dots, n \qquad f(u_i) = f(f^{n-i}(u_n)) = f^{n-i+1}(u_n) = u_{i-1}.$$
   De plus $f(u_1) = f^n(u_n) = 0_E$.
   On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de taille (n, n) suivante :
   $$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
   Cette matrice est de rang $n - 1$, donc f est de rang $n - 1$.
   Effectivement, d'après la question précédente : $\dim \operatorname{im} f = n - 1$.

5. (a) Si g commute avec f alors g commute avec f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut le démontrer par récurrence.
Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors :

$$g(u_i) = g(f^{n-i}(u_n)) = f^{n-i}(g(u_n))$$

Les coordonnées de $g(u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ donc :

$$g(u_i) = f^{n-i}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n)$$

Par linéarité de f^{n-i} et définition des u_k :

$$g(u_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^{n-i}(u_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^{n-i-k}(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^{n-k}(u_i)$$

Cette égalité est valable pour tous les vecteurs u_i de la base $\mathcal{B}$.
Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base, donc :

$$g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-j} f^j.$$

Ceci montre que g est combinaison linéaire de $f^0, \dots, f^{n-1}$.

(b) Soit C l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f :

$$C = \{ g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f \}.$$

D'après la question précédente :

$$C \subseteq \operatorname{Vect}\left\{ f^k \;\middle|\; k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

La réciproque est immédiate : toutes les puissances de f commutent avec f, et toute combinaison linéaire de ces puissances commute avec f.
Donc par double inclusion :

$$C = \operatorname{Vect}\left\{ f^k \;\middle|\; k = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

Exercice 2 : Interpolation de Lagrange.

1. (a) Pour tout scalaire α l'application de spécialisation $P \mapsto P(\alpha)$ est linéaire, donc toutes les composantes de Φ sont linéaires et ainsi Φ est linéaire.

   Le noyau de Φ est l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que :

$$P(\alpha_0) = \cdots = P(\alpha_n) = 0.$$

   Si P est un tel polynôme alors il admet au moins $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ pour racines. Comme les α_i sont distincts alors P admet au moins $n+1$ racines. Mais P est de degré inférieur ou égal à n, donc P est nul.

   Ainsi $\ker \Phi = \{0_E\}$, et Φ est injective.

   Or $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n+1$, de même que $\mathbb{K}^{n+1}$.

   Par corollaire du théorème du rang, comme Φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension alors Φ est bijective.

   Finalement Φ est un isomorphisme.

   (b) Soit $\beta_0, \ldots, \beta_n$ des scalaires. Alors le n-uplet $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ appartient à $\mathbb{K}^{n+1}$.

   Comme Φ est bijective alors il admet un et un seul antécédent par Φ et donc il existe un et un seul polynôme P de degré au plus n tel que $\Phi(P) = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$, donc tel que pour tout $i = 0, \ldots, n$: $P(\alpha_i) = \beta_i$.

2. La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $\mathcal{B}_c = (1, X, \ldots, X^n)$.

   Pour tout $i = 0, \ldots, n$: $\Phi(X^i) = (\alpha_0^i, \ldots, \alpha_n^i)$.

   La matrice de Φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$ est donc :

$$A = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_0}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots\cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots\cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots\cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \left(\alpha_i^j\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$$

   Ses coefficients sont, pour tout i et j allant de 0 à n : $a_{i,j} = \alpha_i^j$.

   Comme Φ est un isomorphisme alors sa matrice est inversible, donc A est inversible.

3. Soit $j = 0, \ldots, n$. On note $P_j = \Phi^{-1}(e_j)$. Alors $\Phi(P_j) = e_j$ donc :

$$\forall i = 0, \ldots, n \qquad P_j(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

   Les scalaires α_i pour $i \neq j$ sont racines de P_j, et comme ils sont distincts alors P_j est multiple du produit des $(X - \alpha_i)$ avec $i \neq j$. Comme ce produit est de degré n et P est de degré au plus n alors il existe un scalaire λ tel que :

$$P_j = \lambda \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} (X - \alpha_i).$$

Comme $P_j(\alpha_j) = 1$ alors $\lambda = \left(\prod_{i\neq j}(\alpha_j - \alpha_i)\right)^{-1}$, si bien que :

$$P_j = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{(X-\alpha_i)}{(\alpha_j-\alpha_i)}.$$

4. Pour tout $j = 0, \dots, n$ les scalaires $b_{0,j}, \dots, b_{n,j}$ sont les coordonnées P_j dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, donc la matrice $B = (b_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ est la représentation matricielle de la famille $(P_0, \dots, P_n)$ dans la base canonique.
   Cette famille $(P_0, \dots, P_n)$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ par Φ^{-1}.
   Comme Φ est un isomorphisme alors Φ^{-1} est un isomorphisme, et l'image d'une base par un isomorphisme est une base, donc la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   En conséquence la matrice B est la représentation matricielle de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_c$, donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.
   Autrement dit B est la matrice de l'identité de $\mathbb{K}_n[X]$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_c$:

$$B = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}\right).$$

   Or la matrice A est la matrice de Φ dans les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_0$:

$$A = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_0}(\Phi).$$

   Par propriété des représentations matricielles :

$$AB = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}\left(\Phi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{K}_n[X]}\right) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}_0}(\Phi).$$

   Ainsi la matrice AB est la représentation matricielle de l'application Φ dans les bases $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ et $\mathcal{B}_c = (e_0, \dots, e_n)$.
   Par définition des P_j : $\quad \forall j = 0, \dots, n \quad \Phi(P_j) = e_j$.
   La représentation matricielle de Φ dans les bases $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ et $\mathcal{B}_c = (e_0, \dots, e_n)$ est donc la matrice identité, ce qui montre que :

$$AB = I_{n+1}.$$

   Comme les matrices A et B sont carrées alors A et B sont inverses l'une de l'autre :

$$B = A^{-1}.$$

5. Si $n = 2$ alors la matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}.$$

   Pour obtenir sa matrice inverse on développe les polynômes P_0, P_1, P_2.
   D'après la question 3 ces polynômes sont :

$$P_0 = \frac{(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)} \qquad P_1 = \frac{(X-\alpha_0)(X-\alpha_2)}{(\alpha_1-\alpha_0)(\alpha_1-\alpha_2)} \qquad P_2 = \frac{(X-\alpha_0)(X-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Notons $\delta = (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)$. Alors δ est non-nul et on développe :

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{\delta}\Big(\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)X + X^2\Big) \\
P_1 &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_0)}{\delta}\Big(\alpha_2\alpha_0 - (\alpha_2 + \alpha_0)X + X^2\Big) \\
P_2 &= \frac{(\alpha_0 - \alpha_1)}{\delta}\Big(\alpha_0\alpha_1 - (\alpha_0 + \alpha_1)X + X^2\Big).
\end{aligned}$$

La matrice inverse de A est donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_2)} \begin{pmatrix} \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^2 & \alpha_2^2\alpha_0 - \alpha_2\alpha_0^2 & \alpha_0^2\alpha_1 - \alpha_0\alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 - \alpha_1^2 & \alpha_0^2 - \alpha_2^2 & \alpha_1^2 - \alpha_0^2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_0 & \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi l'écrire :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)} & \frac{\alpha_2\alpha_0}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_0)} & \frac{\alpha_0\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)} \\ \frac{-\alpha_1-\alpha_2}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)} & \frac{-\alpha_2-\alpha_0}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_0)} & \frac{-\alpha_0-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)} \\ \frac{1}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)} & \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_0)} & \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)} \end{pmatrix}.$$