Réponses
Feuille de TD. B13

Exercices de cours

(1) Pour démontrer que l'application est définie positive, on remarque que pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(u \mid u) = 5x^2 + 2xy + y^2 = (2x)^2 + (x + y)^2$$

Ceci montre que $(u \mid u)$ est positif, et nul si et seulement si $u = 0_{\mathbb{R}^2}$.

(3) D'après l'identité de polarisation $(u \mid v) = 1$ donc u et v ne sont pas orthogonaux.

(5) On obtient $u = 3u_1 - u_2 + u_3$.

(6) On obtient $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$.

(7) On obtient :

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$$
$$\varepsilon_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$$
$$\varepsilon_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

(8) On applique la première égalité aux sous-espaces vectoriels $F^\perp$ et $G^\perp$.
L'égalité $A^{\perp\perp} = A$ permet de conclure.

(9) On obtient :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d(v, F) = 5\sqrt{2}$$

(10) On obtient :

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(11) On obtient la base orthonormée :

$$e_0(x) = 1$$
$$e_1(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$$
$$e_2(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

Ensuite $p(\exp) = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ avec :

$\lambda_0 = e - 1$ $\lambda_1 = \sqrt{3}(3 - e)$ $\lambda_2 = \sqrt{5}(7e - 19)$

En notant $f = p(\exp)$:

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = (e - 1) + 3(3 - e)(2x - 1) + 5(7e - 19)(6x^2 - 6x + 1)$$

On calcule par ordinateur :

$$d(\exp, f) = ||\exp - f|| = \left(\int_0^1 (e^x - f(x))^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}0053$$

On peut voir sur le graphique de la figure 1 qu'effectivement la fonction polynomiale du second degré f est une bonne approximation de la fonction exponentielle sur l'intervalle $[0, 1]$.
L'écart maximal entre f et exp est 0,015.

Travaux dirigés

1 Toutes les applications sont bilinéaires.
a. $\varphi(u, u) < 0$ pour $u = (0, 1)$.
b. φ n'est pas symétrique.
c. φ est un produit scalaire.

$$\varphi(u, u) = (x - 2y)^2 + 2y^2$$

d. $\varphi(u, u) < 0$ pour $u = (1, 2)$.

3
a. N est la norme associée au produit scalaire :

$$(u \mid v) = xx' + \tfrac{1}{2}(xy' + x'y) + yy'$$

Pour démontrer que ce produit scalaire est défini positif on écrit :

$$(u \mid u) = \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$$

b. Par exemple $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -2)$.

4 Par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} ||\lambda u + (1 - \lambda)v|| &\leqslant |\lambda| ||u|| + |1 - \lambda| ||v|| \\ &\leqslant \lambda + (1 - \lambda) = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des $\lambda u + (1 - \lambda)v$ pour $\lambda \in [0, 1]$ est le segment $[u, v]$.

5 En développant $||u + \lambda v||^2$ on obtient :

$$||v||^2 \lambda^2 + 2\,(u \mid v)\,\lambda \geqslant 0$$

Si v est nul alors u et v sont orthogonaux. Sinon le discriminant du polynôme ci-dessus est $-4\,(u \mid v)^2$, il doit être nul.

6 On démontre que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale. Elle est donc libre.
On pose, pour tout vecteur u :

$$v = u - \sum_{i=1}^{p} (u \mid e_i)\, e_i$$

On démontre que $||v|| = 0$. La famille est donc génératrice.

7 Raisonner sur la dimension.

8 On démontre que f est linéaire, puis que f est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}\,(v)$.

$\boxed{9}$

a. On développe $(u+v \,|\, f(u+v))$.

b. On démontre que $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont orthogonaux grâce à la question précédente, puis on applique le théorème du rang.

$\boxed{10}$ Tout vecteur $u \in E$ s'écrit $u = v + w$ avec $v = p(u)$ et $w \in \ker p$. Si p est un projecteur orthogonal alors v et w sont orthogonaux, donc le théorème de Pythagore permet de conclure.

Dans l'autre sens on écrit $||v|| \leqslant ||v + \lambda w||$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\boxed{11}$

a. $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = (0,1,1)$

$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

b. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

$\boxed{12}$ $P = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$p(u) = \frac{5}{3}(1,1,1) \qquad u - p(u) = \frac{1}{3}(1,-2,1)$

$d(u,F) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\boxed{13}$

a. $F^\perp = \operatorname{Vect}((2,-8,3,2))$, $u_4 = \frac{1}{9}(2,-8,3,2)$.

b. $q(u) = (u \,|\, e_4)\, e_4$ et $p - \operatorname{Id}_E - q$ donc :

$$Q = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 4 & -16 & 6 & 4 \\ -16 & 64 & -24 & -16 \\ 6 & -24 & 9 & 6 \\ 4 & -16 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \qquad P = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 77 & 16 & -6 & -4 \\ 16 & 17 & 24 & 16 \\ -6 & 24 & 72 & -6 \\ -4 & 16 & -6 & 77 \end{pmatrix}$$

$\boxed{14}$ On obtient $S = \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 41 & 36 & 108 \\ 36 & -113 & 24 \\ 108 & 24 & -49 \end{pmatrix}$

$\boxed{15}$

a. Utiliser l'identité de polarisation, ou développer $||f(u+v)|| = ||u+v||$.

b. Si f est une symétrie alors :

$$(f(u) \,|\, v) = (f \circ f(u) \,|\, f(v)) = (u \,|\, f(v))$$

Réciproquement :

$$(f \circ f(u) \,|\, v) = (f(u) \,|\, f(v)) = (u \,|\, v)$$

Donc $f \circ f(u) - u$ est orthogonal à tout vecteur de E, donc est nul.

Enfin, si $f(u) = u$ et $f(v) = -v$ alors :

$$(u \,|\, v) = (f(u) \,|\, -f(v)) = -(u \,|\, v)$$

Donc u et v sont orthogonaux.

c. Si f est une symétrie alors l'égalité $(f(e_i) \,|\, e_j) = (e_i \,|\, f(e_j))$ montre que $a_{ij} = a_{ji}$.

Pour la réciproque il faut démontrer que si f est orthogonale alors ${}^tAA = I_n$.

$\boxed{16}$

a. Pour toute fonction f, la fonction u appartient à F, donc si $f \in F^\perp$ alors $(f \,|\, u) = 0$. La fonction $t \mapsto tf^2(t)$ est positive continue, donc elle est nulle. Ainsi f est nulle sur $]0,1]$, puis par continuité f est nulle.

Ainsi $F^\perp = \{0_E\}$.

b. $F^{\perp\perp} = E$, alors que $F \neq E$.

$F \oplus F^\perp = F \neq E$.

$\boxed{17}$ Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors :

$$(A \,|\, B) = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$$

a. On écrit $(A \,|\, B) = (B \,|\, A)$.

Si ${}^tA = A$ et ${}^tB = -B$ alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(-BA) = -\operatorname{tr}(AB)$, donc $(A \,|\, B) = 0$.

Comme $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont l'orthogonal l'un de l'autre.

b. On obtient des bases orthonormées avec les E_{ii} et les $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}+E_{ji})$ pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et les $\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij}-E_{ji})$ pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

c. $p(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, ce que l'on peut démontrer directement car $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

$\boxed{18}$

a. F est le noyau de la trace qui est une forme linéaire non-nulle, donc F est un hyperplan de E.

On constate que $(I_n \,|\, A) = 0$ pour toute matrice de F, donc I_n est orthogonal à F. Ainsi $F^\perp = \operatorname{Vect}(I_n)$.

b. Une base orthonormée de $F^\perp$ est $J = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n$.

Soit p le projecteur orthogonal de E sur $F^\perp$. Alors $p(A) = (A \,|\, J)\, J = \frac{\operatorname{tr} A}{n} I_n$.

La distance de A à F est $||p(A)|| = \frac{|\operatorname{tr} A|}{\sqrt{n}}$.

$\boxed{19}$

a. $F = \operatorname{Vect}((1,-1,1))$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

b. On choisit $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ et $\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.

c. On obtient $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

d. f est la rotation de l'espace d'axe F et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Avec $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

On obtient la rotation d'axe $\operatorname{Vect}((1,0,1))$ et d'angle $\theta = -\arccos \frac{1}{3}$.

20

a. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. Donc E^* est de dimension n.

b. Par linéarité à gauche du produit scalaire, l'application $u \mapsto (\, u \,|\, v)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in E$.

c. Par linéarité à droite du produit scalaire on obtient $\varphi_{\lambda v+v'} = \lambda\varphi_v + \varphi_{v'}$.

d. L'application Φ est injective, car $\varphi_v(v) = ||v||^2$. Par corollaire du théorème du rang, comme $\dim E = \dim E^*$ alors Φ est un isomorphisme.

Donc tout élément φ de E^* admet un et un seul antécédent par Φ.

21

a. L'application $w \mapsto \det(u,v,w)$ est une forme linéaire, donc d'après l'exercice précédent il existe un et un seul $x \in E$ tel que :

$$\forall w \in E \qquad (\, x \,|\, w) = \det(u,v,w)$$

b. Par bilinéarité du produit scalaire et trilinéarité du déterminant on montre que pour tout $w \in E$:

$$(\, \lambda(u \wedge v) + u' \wedge v \,|\, w) = \det(\lambda u + u', v, w)$$

Par unicité du produit vectoriel :

$$\lambda(u \wedge v) + u' \wedge v = (\lambda u + u') \wedge v$$

De même on démontre la linéarité à droite du produit vectoriel.

Par antisymétrie du déterminant et bilinéarité du produit scalaire on montre que pour tout $w \in E$:

$$(\, -(u \wedge v) \,|\, w) = \det(v,u,w)$$

Par unicité du produit vectoriel $v \wedge u = -u \wedge v$

Ainsi le produit vectoriel est antisymétrique, et par équivalence il est alterné.

c. Pour $w = u$ on obtient :

$$(\, u \wedge v \,|\, u) = \det(u,v,u) = 0$$

Donc $u \wedge v$ est orthogonal à u.

De même $u \wedge v$ est orthogonal à v.

d. On note $w = (x,y,z)$. On développe le déterminant $\det(u,v,w)$ par rapport à la troisième colonne, et on obtient par identification :

$$u \wedge v = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

On peut démontrer également que le triplet de vecteur (u,v,w) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $w = u \wedge v$.

Aussi, si θ est une mesure de l'angle entre u et v alors :

$$||u \wedge v|| = ||u||\,||v||\,|\sin\theta|$$