Réponses
Feuille de TD. A13

Exercices de cours

1 $\frac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x} = (1+\ln x)x^x$
$\frac{\mathrm{d}x^{x^x}}{\mathrm{d}x} = (1 + x(1+\ln x)\ln x)x^{x^x+x-1}$

2

a. Le gradient est *radial*, *i.e.,* dirigé vers ou à l'opposé de l'origine.

b. On obtient $\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta} = 0$, donc $f\circ\varphi$ ne dépend que de r.

3 $\nabla f(x,y) = (2x+y+3, x+1)$
Point critique en $(-1,-1)$
On obtient : $f(-1+h,-1+k) - f(-1,-1) = h^2+hk = \left(h+\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{1}{4}k^2$
C'est un point-selle.
$\nabla g(a) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y-2x+y(y^2-x^2) \\ x-2y+x(x^2-y^2)\end{pmatrix}$
Point critique en $(0,0)$
$g(x,y)-g(0,0) = -\frac{x^2+y^2-xy}{1+x^2+y^2}$
C'est un maximum.

Travaux dirigés

1 Pour la partie C, si $a=(x,y)\in C$ on suppose $x<y$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}(y-x)$. Pour tout $(x',y')\in B(a,\varepsilon)$ on a $x-\varepsilon \leqslant x' < \frac{x+y}{2} < y' \leqslant y+\varepsilon$ donc $x'\neq y'$.

3

a. L'inégalité triangulaire donne :
$$|f(x,y)| \leqslant 2||(x,y)||$$
donc f tend vers 0 en $(0,0)$.

b. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

c. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$
Si $y\neq 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

4 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^3y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
Ces deux fonctions sont continues, en utilisant l'inégalité triangulaire (ou les coordonnées polaires).

5 Les application partielles en $(0,0)$ ne sont pas dérivables.
Le gradient en (x,y) est $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$.

6 $\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{dt}f\left(t^3,t^2\right) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}\left(t^3,t^2\right) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}\left(t^3,t^2\right)$

7

b. La limite d'un côté est toujours l'opposé de la limite de l'autre côté : $\frac{\pi}{2}$ d'un côté, $-\frac{\pi}{2}$ de l'autre. De même en $(0,0)$, la limite de $f(x,x)$ est l'opposée de celle de $f(x,-x)$.

c. $df_{(x,y)}$ a pour matrice $\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y & -x \\ -y & x\end{pmatrix}$.

d. $\nabla f = (0,0)$. Effectivement $g\circ f$ est constante, égale à $\pm\frac{\pi}{2}$ selon les quarts de plan.

8 On pose $\varphi(x) = f(x,0)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction partielle $y\mapsto f(x,y)$ est constante donc $f(x,y) = f(x,0) = h(x)$.

9 $\frac{\partial(f\circ\gamma)}{\partial v} = 0$ donc f ne dépend que de u.
Il existe alors h telle que $f(x,y) = h(x+y)$.

10

f_1 admet $(0,0)$ pour point critique, ce n'est pas un extremum.

f_2 admet $a = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ pour point critique. C'est un minimum de valeur $-\frac{7}{3}$:
$f(a+(h,k)) - f(a) = h^2+hk+k^2$

f_3 admet trois points critiques : $(0,0)$, $(0,4)$ et $(0,-4)$.
Le premier est un point selle, le second un minimum local, le troisième un maximum local :
$f(4+h,k) - f(4,0) = h^2(6+h) + k^2(6+k)$
$f(h,-4+k) - f(0,-4) = -h^2(6-h) - k^2(6-k)$

f_4 admet $(1,0)$ pour point critique, ce n'est pas un extremum.
$f(1+t,t) - f(1,0) = t^2 + o(t)$
alors que $f(1+t,-t) - f(1,0) = -t^2 + o(t^2)$

f_5 admet $(0,0)$ pour point critique, ce n'est pas un extremum.
$f\left(t, \frac{3}{2}t^2\right) = -\frac{1}{4}t^4$ alors que $f(t,0) = 2t^4$.

f_6 admet $(-1,-1)$ pour point critique. Il faut le deviner, démontrer que c'est le seul grâce aux variations de $x\mapsto -xe^{\frac{1}{x}}$.
On montre que ce n'est pas un maximum en étudiant $f(-1+t,-1)$ et $f(-1+t,-1+t)$.