ENTRAINEMENTS SUPPLEMENTAIRES — TD - PSI

Voici un panel de petits exos pris dans des livres (inspirés de sujet de concours)
Je vous conseille d'en faire régulièrement (par exemple 4 ou 5 par semaines) pour vous entrainer.
Je remercie Xavier Pessoles (professeur CPGE PSI) à l'origine de cette compilation de ressources.*

Exercice 218 – Moteur à courant continu⋆

B2-04

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t)=e(t)+Ri(t)+L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t)=K\omega(t)$;
- $c(t)=Ki(t)$;
- $c(t)-f\omega(t)=J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$.

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert* $H(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

Question 2 *Préciser l'ordre et la classe de* H.

Question 3 *Mettre* $H(p)$ *sous forme canonique.*

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

Question 5 *Vérifier l'homgénéité des différentes constantes.*

Éléments de corrigé :

1. $H(p)=\dfrac{K_m}{K_m^2+(R+Lp)(Jp+f)}$.
2. Ordre 2, classe 0.
3. $H(p)=\dfrac{\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}}{1+\dfrac{(RJ+Lf)}{K_m^2+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_m^2+Rf}p^2}$.
4. $K=\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K_m^2+Rf}{LJ}}$, $\xi=\dfrac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJ\left(K_m^2+Rf\right)}}$.

Corrigé voir 218.

Exercice 217 – Moteur à courant continu⋆

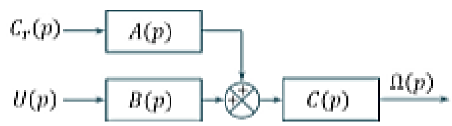
B2-07

On donne les équations du moteur à courant continu :

- $u(t)=e(t)+Ri(t)+L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$;
- $e(t)=K\omega(t)$;
- $c(t)=Ki(t)$;
- $c(t)+c_r(t)-f\omega(t)=J\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$.

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*

Question 2 *Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.*



Éléments de corrigé :

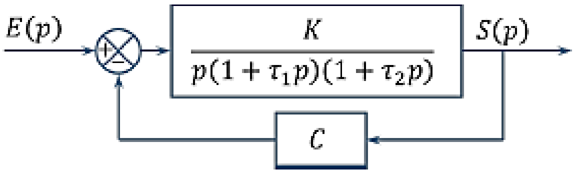
1. .
2. $A(p)=R+Lp$, $B(p)=K$, $C(p)=\dfrac{1}{K^2+(f+Jp)(R+Lp)}$ (plusieurs réponses possibles).

Corrigé voir 217.

Exercice 216 – Valeur finale⋆

C2-03

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 *Déterminer la valeur finale de* $s(t)$ *lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude* E_0.

Question 2 *En déduire la valeur de l'erreur statique.*

Question 3 *Déterminer la valeur finale de* $s(t)$ *lorsque l'entrée est une rampe de pente* k.

Question 4 *En déduire la valeur de l'erreur de traînage.*

Question 5 *Qu'en est-il si* $C=1$ *?*

Éléments de corrigé :

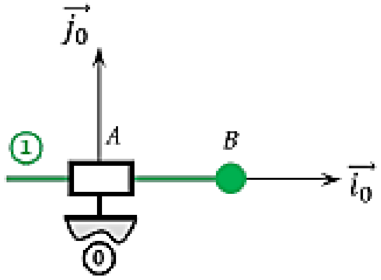
1. $s_\infty=\lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{E_0}{p}\dfrac{K}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)+CK}=\dfrac{E_0}{C}$.
2. $\lim\limits_{t\to+\infty}(e(t)-s(t))=E_0-\dfrac{E_0}{C}$.
3. $s_\infty=\infty$.
4. $\varepsilon_v=\infty$.
5. $\varepsilon_v=\dfrac{k}{K}$.

Corrigé voir 216.

Exercice 215 – Mouvement T – ⋆

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}$.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\lambda=10\,\text{mm}$.

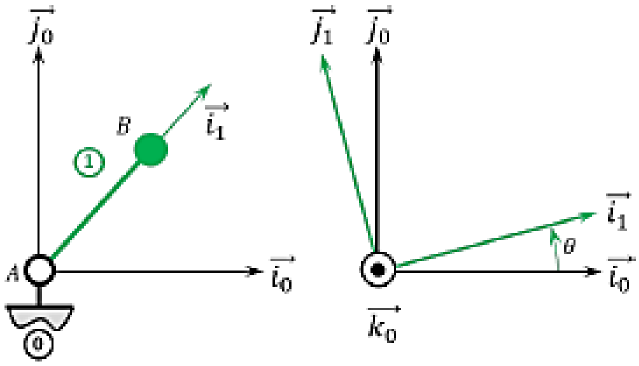
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\lambda=-20\,\text{mm}$.

Corrigé voir 215.

Exercice 214 – Mouvement R ⋆

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB}=R\overrightarrow{i_1}$ avec $R=20\,\text{mm}$.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ *rad.*

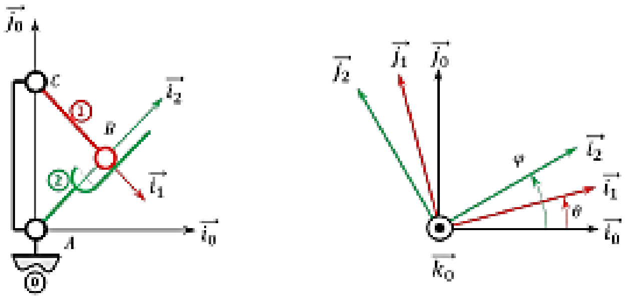
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta=\pi$ *rad.*

Corrigé voir 214.

Exercice 213 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC}=H\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB}=R\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H=120\,\text{mm}$ et $R=40\,\text{mm}$.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta(t)=\dfrac{\pi}{2}$ *rad.*

Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta(t)=75°$.

Question 4 *Dans l'hypothèse où la pièce **1** peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce **2**.*

Question 5 *Dans l'hypothèse où la pièce **2** fait* 12 cm, *quel sera le débattement maximal de la pièce **1**.*

Indications :
1. .
2. .
3. .
4. 160 mm.
5. 160,8 °.

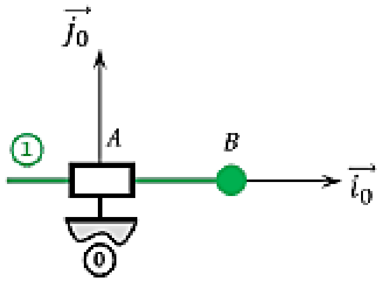
Corrigé voir 213.

Exercice 212 – Mouvement T – ⋆

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}$.



Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

Indications :
1. .
2. $x_B(t)=\lambda(t)$.

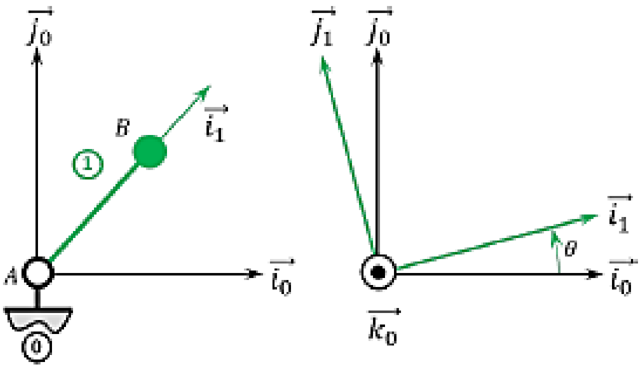
Corrigé voir 212.

Exercice 211 – Mouvement R ⋆

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20\,\text{mm}$.



Question 1 *Quel est le mouvement de* **1** *par rapport à* **0***.*

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à* **1** *par rapport à* **0***.*

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à* **1** *par rapport à* **0***.*

Indications :

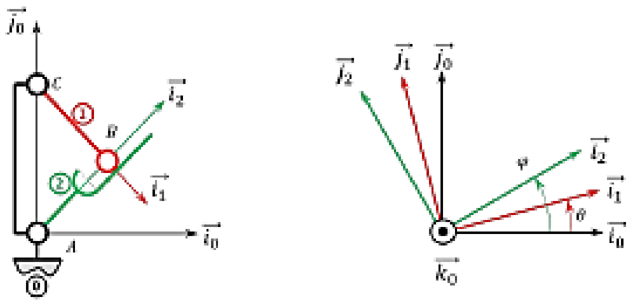
1. .
2. .
3. $x_B(t) = R\cos\theta(t)$ et $y_B(t) = R\sin\theta(t)$.

Corrigé voir 211.

Exercice 210 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



Question 1 *Calculer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$?*

Question 2 *Calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$?*

Question 3 *Justifier que $\overrightarrow{V(B,2/1)} \cdot \overrightarrow{j_2} = 0$.*

Question 4 *En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.*

Indications :

1. $\overrightarrow{V(B,1/0)} = R\dot\theta\,\overrightarrow{j_1}$.
2. $\overrightarrow{V(B,2/0)} = \lambda\dot\varphi\,\overrightarrow{j_2}$.
3. .
4. $\lambda\dot\varphi - R\dot\theta\cos(\varphi - \theta) = 0$.

Corrigé voir 210.

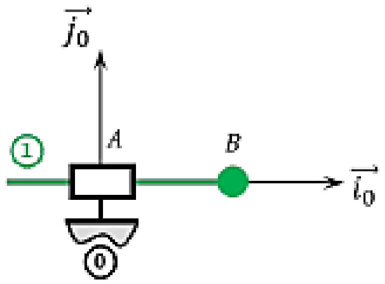
Exercice 209 – Mouvement T – ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB} = \lambda(t)\,\overrightarrow{i_0}$. On note m_1 la masse du solide **1**. On note G le centre d'inertie de **1** tel que $\overrightarrow{BG} = \ell\,\overrightarrow{j_1}$. La pesanteur est telle que $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{i_0}$. Un vérin pneumatique positionné entre **1** et **0** permet de maintenir **1** en équilibre.



Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir* **1** *en équilibre.*

Indications :

1. .
2. $\{\mathscr{T}(0\to1)\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{01}\,\overrightarrow{j_1} + Z_{01}\,\overrightarrow{k_1} \\ L_{01}\,\overrightarrow{i_1} + M_{01}\,\overrightarrow{j_1} + N_{01}\,\overrightarrow{k_1}\end{array}\right\}_A$, $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$, $\{\mathscr{T}(\text{ver}\to1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_v\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$.
3. $\{\mathscr{T}(0\to1)\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{01}\,\overrightarrow{j_1} \\ N_{01}\,\overrightarrow{k_1}\end{array}\right\}_A$, $\{\mathscr{T}(\text{pes}\to1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$, $\{\mathscr{T}(\text{ver}\to1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_v\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$.
4. TRS suivant $\overrightarrow{i_0}$.

Corrigé voir 209.

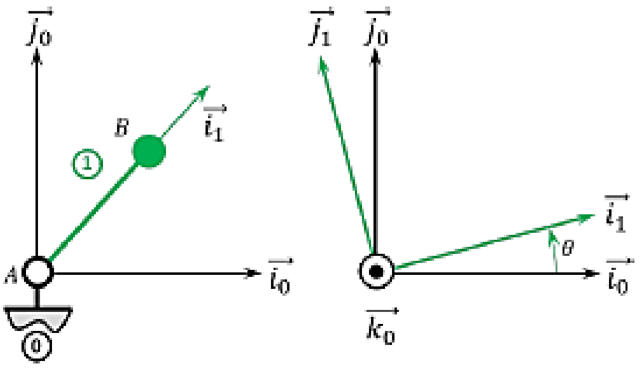
Exercice 208 – Mouvement R ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB} = R\,\overrightarrow{i_1}$ avec $R = 20\,\text{mm}$. La liaison pivot est motorisée par un moteur dont l'action mécanique sur **1** est donnée par $\overrightarrow{C_m} = C_m\,\overrightarrow{k_0}$. On note m_1 la masse du solide 1 et B son centre d'inertie. La pesanteur est telle que $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{j_0}$.



Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir 1 en équilibre.*

Indications :

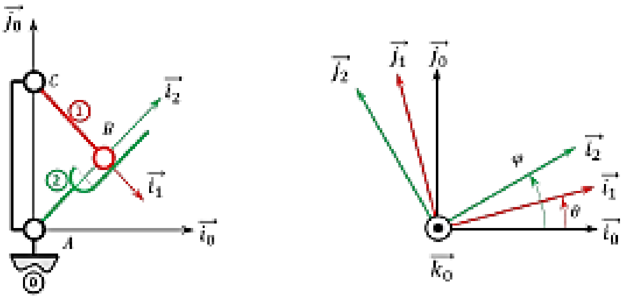
1. .
2. $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{i_1}+Y_{01}\overrightarrow{j_1}+Z_{01}\overrightarrow{k_1} \\ L_{01}\overrightarrow{i_1}+M_{01}\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_A$, $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$, $\{\mathscr{T}(\text{Mot}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A$.
3. $\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{01}\overrightarrow{i_1}+Y_{01}\overrightarrow{j_1} \\ M_{01}\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_A$, $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$, $\{\mathscr{T}(\text{Mot}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A$.
4. TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.

Corrigé voir 208.

Exercice 207 – Barrière Sympact ⋆⋆

C1-05

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ($\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f = 0$.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Pes}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\,\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*

Question 2 *Expliciter C_r en fonction des différents constantes $(k, \varphi_0, \varphi_f)$ et celles qui vous sembleraient utile.*

Question 3 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

Indications :

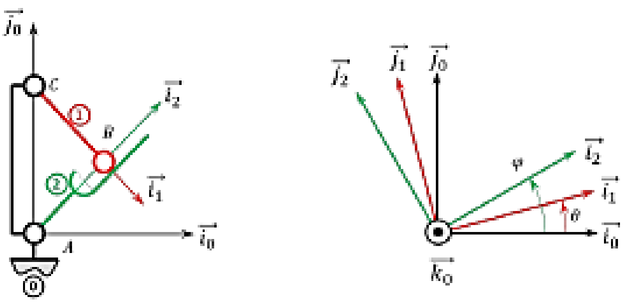
1. .
2. $C_r(\varphi) = k\dfrac{\pi}{2(\varphi_f-\varphi_0)}\varphi - k\dfrac{\pi\varphi_0}{2(\varphi_f-\varphi_0)}$ et $C_r(\varphi) = -k\varphi + k\dfrac{\pi}{2}$.
3. On isole 1, TMS sur $\left(C,\overrightarrow{k_0}\right)$. On isole 2, TMS sur $\left(A,\overrightarrow{k_0}\right)$.

Corrigé voir 207.

Exercice 206 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC} = H\,\overrightarrow{j_0}$ et $\overrightarrow{CB} = R\,\overrightarrow{i_1}$. De plus, $H = 120\,\text{mm}$ et $R = 40\,\text{mm}$.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

Question 3 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\theta(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.*

Indications :

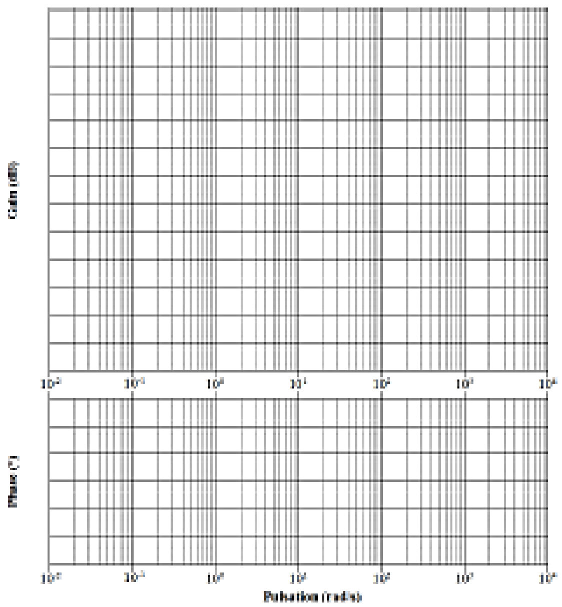
1. .
2. $\tan\varphi(t) = \dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$.
3. $\dot{\varphi}(t) = \dfrac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}$.
4. .

Corrigé voir 206.

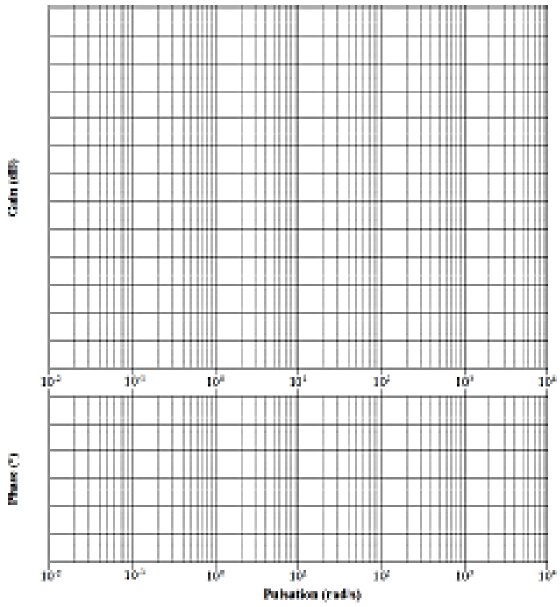
Exercice 205 – Ecart ⋆

C2-02

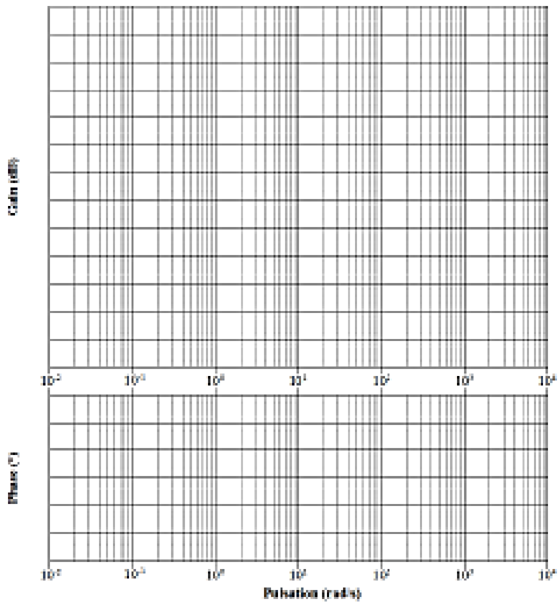
Question 1 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_1(p) = \dfrac{15}{1+10p}$.



Question 2 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_2(p) = \dfrac{10}{(1+10p)(10+p)}$.



Question 3 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_3(p) = \dfrac{40}{p(1+300p)}$.

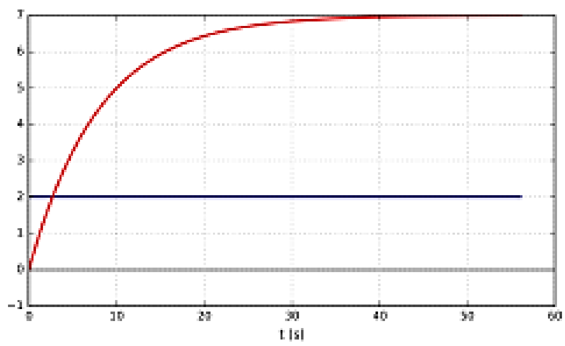


Corrigé voir 205.

Exercice 204 – Identification temporelle ⋆

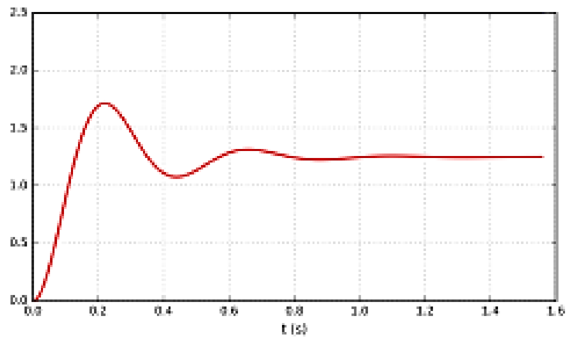
B2-06

Soit la réponse à un échelon.



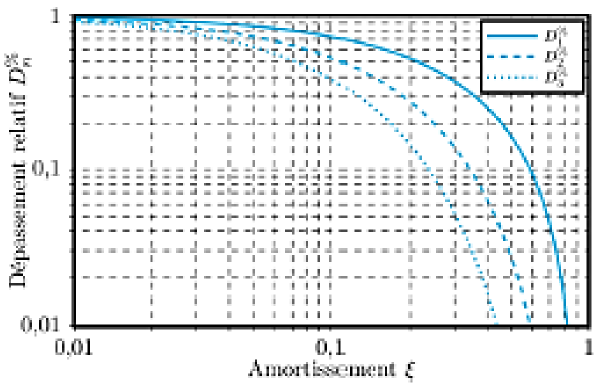
Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*

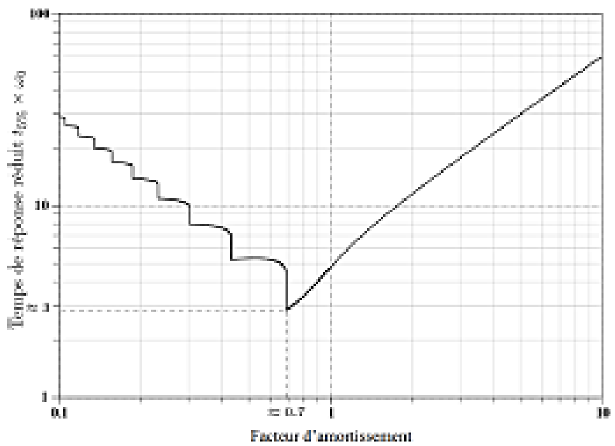
Soit la réponse à un échelon d'amplitude 2,5.



Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.*

Question 3 *Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.*





Indications :

1. $H(p) = \dfrac{3,5}{1+8p}$.
2. $H(p) = \dfrac{0,5}{1+\dfrac{2\times 0,1}{14,25}p+\dfrac{p^2}{14,25^2}}$.
3. $H(p) = \dfrac{0,5}{1+\dfrac{2\times 0,3}{16}p+\dfrac{p^2}{16^2}}$.

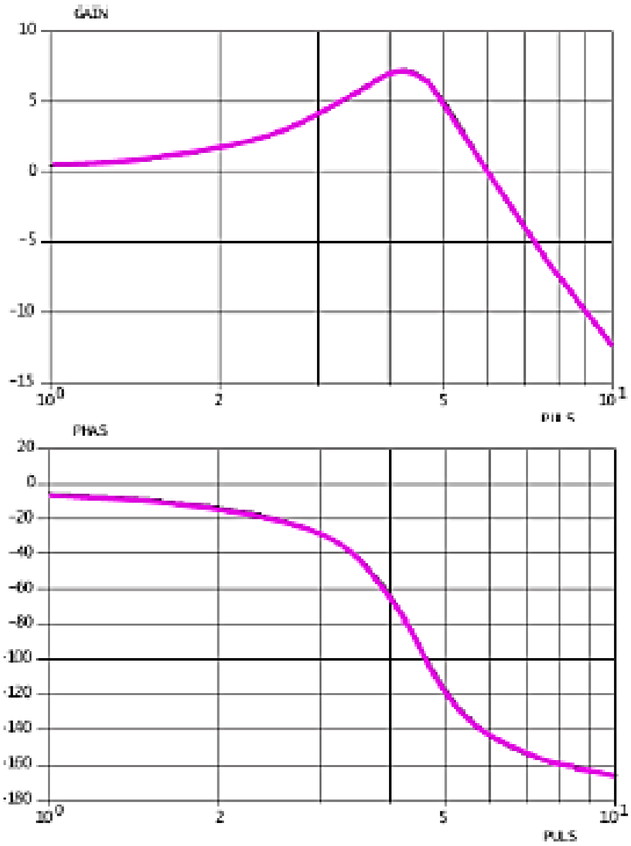
Corrigé voir 204.

Exercice 203 – Identification ⋆

B2-06

Voir exos 1^er^ année

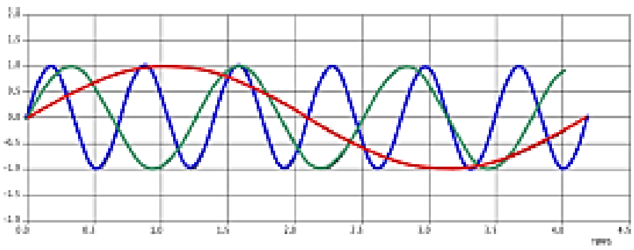
Soit un système dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



Question 1 *Tracer le diagramme de Bode asymptotique.*

Question 2 *Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.*

Le diagramme temporel ci-dessous présente 3 signaux d'entrée sinusoïdaux.



Question 3 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

Question 4 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*

Indications :

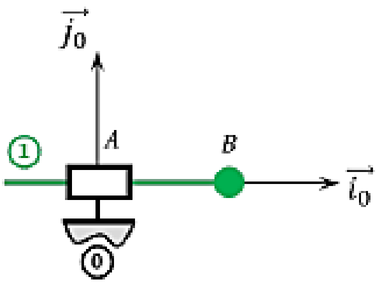
1. .
2. $H(p)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2\times 0,23}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.
3. .
   - Signal rouge : $T=4,2$ s et $\omega 1,5$ rad/s.
   - Signal vert : $T=3,6/3=1,2$ s et $\omega=5,2$ rad/s.
   - Signal bleu : $T=4,2/6=0,7$ s et $\omega=9$ rad/s.
4. .
   - $s(t)=1,12\sin(\omega t-0,17)$.
   - $s(t)=1,8\sin(\omega t-2,1)$.
   - $s(t)=0,3\sin(\omega t-2,8)$.

Corrigé voir 203.

Exercice 202 – Mouvement T ⋆

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On note $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}$. On note m_1 la masse du solide 1. On note G le centre d'inertie de 1 tel que $\overrightarrow{BG}=\ell\,\overrightarrow{j_1}$ ($\overrightarrow{j_1}=\overrightarrow{j_0}$). La pesanteur est telle que $\overrightarrow{g}=-g\,\overrightarrow{i_0}$. Un vérin pneumatique positionné entre 1 et 0 permet de maintenir 1 en équilibre.



On donne $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}-m_1 g\,\overrightarrow{i_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_G$ et $\{\mathscr{T}(\text{ver}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}F_v\,\overrightarrow{i_1}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_A$.

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

On isole 1 et on applique le théorème de la résultante statique en projection suivant $\overrightarrow{i_0}$.

Question 2 *Exprimer l'équation d'équilibre de la pièce 1.*

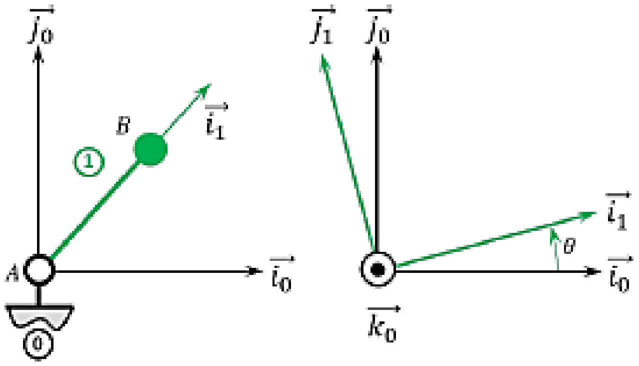
Question 3 *Déterminer l'ensemble des inconnues de liaison.*

Corrigé voir 202.

Exercice 201 – Mouvement R ⋆

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AB}=R\,\overrightarrow{i_1}$ avec $R=20$ mm. La liaison pivot est motorisée par un moteur dont l'action mécanique sur 1 est donnée par $\overrightarrow{C_m}=C_m\,\overrightarrow{k_0}$. On note m_1 la masse du solide 1 et B son centre d'inertie. La pesanteur est telle que $\overrightarrow{g}=-g\,\overrightarrow{j_0}$.



Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*

On donne $\{\mathscr{T}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}-m_1 g\,\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$ et $\{\mathscr{T}(\text{Mot}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_m\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A$.

On isole 1 et on réalise un théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.

Question 2 *Donner l'équation d'équilibre de la pièce 1.*

Question 3 *Déterminer l'ensemble des inconnues de liaisons.*

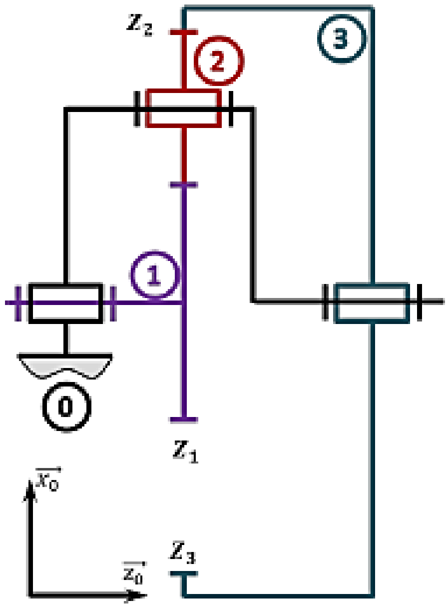
Corrigé voir 201.

Exercice 200 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

Question 3 *Donner une relation géométrique entre Z_1, Z_2 et Z_3 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.*

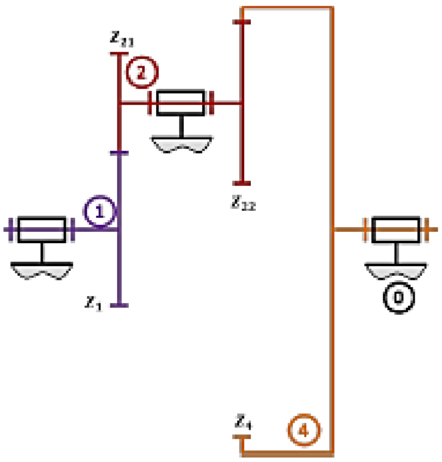
Corrigé voir 200.

Exercice 199 – Train simple ★

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

Question 3 *Donner une relation géométrique entre Z_1, Z_{21}, Z_{22} et Z_4 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).*

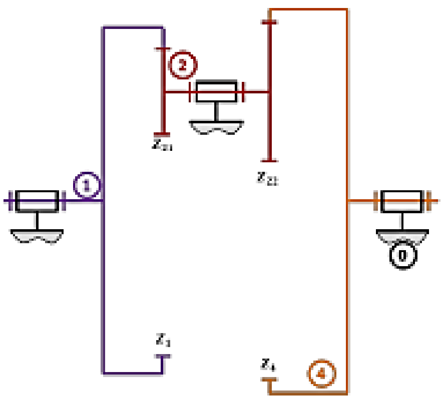
Corrigé voir 199.

Exercice 198 – Train simple ★

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

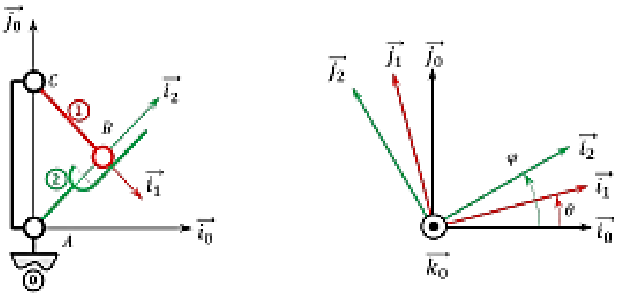
Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

Corrigé voir 198.

Exercice 197 – Barrière Sympact ★★

C2-07

Soit le mécanisme suivant. On a $\overrightarrow{AC}=H\,\overrightarrow{j_0}$, $\overrightarrow{CB}=R\,\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{AB}=\lambda\,\overrightarrow{i_2}$. De plus, $H=120$ mm et $R=40$ mm.



On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_m\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ C_r\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2.

On note $\{\mathscr{T}(\text{Pes}\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c}-M\,g\,\overrightarrow{j_0}\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\,\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*

Question 2 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

Question 3 *Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

Question 4 *Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M=1$ kg et $L=0{,}1$ m*

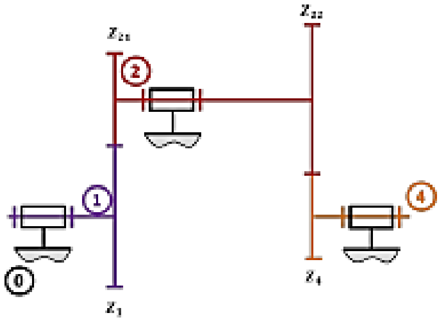
Corrigé voir 197.

Exercice 196 – Train simple ★

A3-05

C2-06

Soit le train d'engrenages suivant.



Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

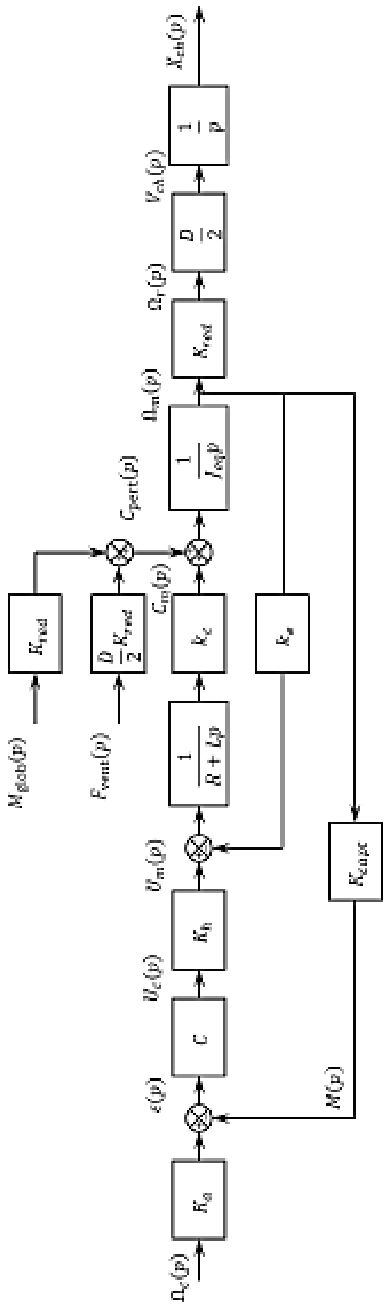
Question 2 *Déterminer* $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

Corrigé voir 196.

Exercice 195 – La Seine Musicale★

B2-07

Soit le schéma-blocs suivant.



Question 1 *En considérant que la perturbation* $C_{pert}(p)$ *est nulle, déterminer* $H_f(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ *sous forme canonique.*

Question 2 *En prenant* $\Omega_c(p) = 0$*, exprimer la fonction de transfert* $H_r(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ *en la mettant sous la forme :* $H_r(p) = -\frac{\alpha(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$*. Exprimer* α*,* τ*,* γ *et* δ *en fonction des différents paramètres de l'étude.*

Question 3 *Exprimer* $X_{ch}(p)$ *en fonction de* $\Omega_m(p)$ *et* $C_{pert}(p)$*.*

Indications :

1. $H_f(p)=\dfrac{K_g}{\left(k_e k_c+CK_h K_{capt} k_c\right)} \dfrac{CK_h k_c}{\dfrac{J_{eq}\left(R+Lp\right)}{k_e k_c+CK_h K_{capt} k_c}p+1}$.
2. $\alpha = -\dfrac{R}{\left(CK_h K_{capt}+k_e\right)k_c}$, $\tau = \dfrac{L}{R}$, $\gamma = \dfrac{R J_{eq}}{\left(CK_h K_{capt}+k_e\right)k_c}$, $\delta=\dfrac{L J_{eq}}{\left(CK_h K_{capt}+k_e\right)k_c}$.
3. $X_{ch}(p)=\left(H_f(p)\Omega_c(p)+H_r(p)C_{pert}(p)\right)\dfrac{DK_{red}}{2p}$.

Corrigé voir 195.

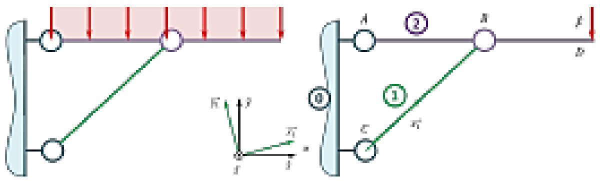
Exercice 194 – Détermination des efforts dans une structure étayée ⋆⋆

C2-07

Lors de la démolition d'une partie de la gare de Lyon Part-Dieu (en 2018), des étais ont du être posés afin de soutenir la structure supérieure.

Dans le but de dimensionner les étais, il est nécessaire de déterminer les actions mécanique dans chacune des liaisons.

Pour cela, on utilise la modélisation suivante.



Modèle initial Modèle retenu

On a $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{BD}=b\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{CB}=L\overrightarrow{x_1}$.

Question 1 *Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).*

Question 2 *Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.*

Question 3 *Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F.*

Éléments de corrigé :

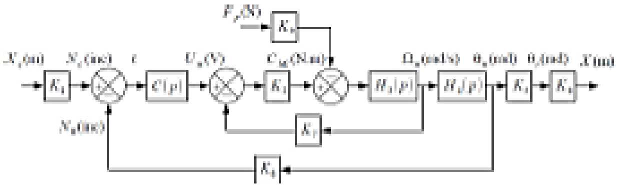
3. $X_{02}=-F\dfrac{a+b}{a\tan\alpha}$, $F_{01}=F\dfrac{a+b}{a\sin\alpha}$, $Y_{02}=-\dfrac{b}{a}F$.

Corrigé voir 194.

Exercice 193 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes : $u_m(t)=e(t)+Ri(t)$, $e(t)=k_e\omega_m(t)$ et $C_{M1}(t)=k_t i(t)$.

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M+m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t)=\frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r}-F_p(t)$$

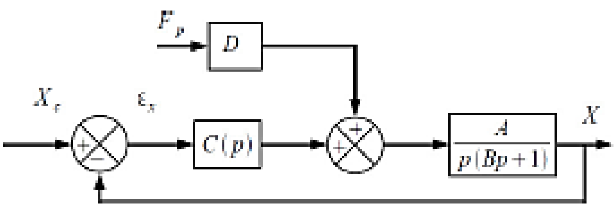
avec : M la masse du chariot et m la masse du support de pied, $\rho_1=\dfrac{1}{10}$ le rapport de réduction du réducteur, $r=46{,}1$ mm le rayon de la poulie du transmetteur poulie–courroie, $C_{M1}(t)$ le couple délivré par le moteur et $F_p(t)$ l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

1. ...
   - $K_2=\dfrac{k_t}{R}$;
   - $K_7=k_e$;
   - $K_9=\rho_1 r$ et $H_3(p)=\dfrac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
   - $H_4(p)=\dfrac{1}{p}$;
   - $K_8=\dfrac{2000}{2\pi}$;
   - t $K_5=\rho_1$ et $K_6=r$ (à convertir en mètres) ;
   - $K_1=\dfrac{K_8}{K_5 K_6}$.
2. $A=\dfrac{K_8}{k_e}$, $B=\dfrac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$ et $D=\dfrac{K_9 R r\rho_1}{K_8 k_t}$



Corrigé voir 193.

Corrections

Exercice 218 – Moteur à courant continu★

B2-04

Question 1 *Exprimer la fonction de transfert* $H(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$.

En passant les équations dans le domaine de Laplace, on a :

- $U(p)=E(p)+RI(p)+LpI(p)$;
- $E(p)=K_m\Omega(p)$;
- $C(p)=K_m I(p)$;
- $C(p)-f\Omega(p)=Jp\Omega(p) \Leftrightarrow C(p)=\Omega(p)(Jp+f)$.

Vous devez savoir qu'un moteur à courant continu est piloté en tension ($U(p)$) et qu'en sortie on observe le taux de rotation ($\Omega(p)$).

En ne conservant que $U(p)$ et $\Omega(p)$, on a donc $U(p)=E(p)+RI(p)+LpI(p) \Leftrightarrow U(p)=K_m\Omega(p)+(R+Lp)\dfrac{C(p)}{K_m} \Leftrightarrow$
$U(p)=K_m\Omega(p)+(R+Lp)\dfrac{\Omega(p)(Jp+f)}{K_m} \Leftrightarrow U(p)=\left(K_m+(R+Lp)\dfrac{(Jp+f)}{K_m}\right)\Omega(p) \Leftrightarrow U(p)=\dfrac{K_m^2+(R+Lp)(Jp+f)}{K_m}\Omega(p)$.

On a donc $H(p)=\dfrac{\Omega(p)}{U(p)}=\dfrac{K}{K^2+(R+Lp)(Jp+f)}$.

Question 2 *Préciser l'ordre et la classe de H.*

H est d'ordre 2 et de classe 0 car on ne peut pas mettre de p en facteur. Le terme de plus haut degré du dénominateur est de degré 2.

Question 3 *Mettre $H(p)$ sous forme canonique.*

$$H(p)=\frac{K_m}{K_m^2+Rf+(RJ+Lf)p+LJp^2} \Leftrightarrow H(p)=\frac{\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}}{1+\dfrac{(RJ+Lf)}{K_m^2+Rf}p+\dfrac{LJ}{K_m^2+Rf}p^2}.$$

Question 4 *Donner les caractéristiques de la fonction de transfert.*

En identifiant avec la forme canonique standard, $H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$ soit $K=\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}$, $\dfrac{2\xi}{\omega_0}=\dfrac{(RJ+Lf)}{K_m^2+Rf}$ et $\dfrac{1}{\omega_0^2}=\dfrac{LJ}{K_m^2+Rf}$.

Au final, $K=\dfrac{K_m}{K_m^2+Rf}$, $\omega_0=\sqrt{\dfrac{K_m^2+Rf}{LJ}}$, $\xi=\dfrac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJ\left(K_m^2+Rf\right)}}$.

Question 5 *Vérifier l'homgénéité des différentes constantes.*

Le gain doit être en $\text{rad}\,\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$.

D'une part, $[K_m]=\text{NmA}^{-1}$. D'autre part, $[K_m]=\text{Vrad}^{-1}\text{s}$. On a donc $\text{Vrad}^{-1}\text{s}=\text{NmA}^{-1}$. (On pourrait aussi le montrer par une analyse dimensionnelle...)

De plus $[R]=\Omega=\dfrac{\text{V}}{\text{A}}$ et $[f]=\text{Nmrad}^{-1}\text{s}$.

On a donc $[K]=\dfrac{\text{NmA}^{-1}}{(\text{NmA}^{-1})^2+\text{Nmrad}^{-1}\text{s}\times\text{VA}^{-1}}=\dfrac{1}{\text{NmA}^{-1}+\text{rad}^{-1}\text{sV}}=\dfrac{1}{\text{rad}^{-1}\text{sV}}=\text{rad}\,\text{s}^{-1}\text{V}^{-1}$.

La pulsation propre doit être en s^{-1} ou $\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

On a vu que $[K_m^2]=[Rf]$. De plus $[L]=H=\text{VsA}^{-1}$ et $[J]=\text{Nmrad}^{-1}\text{s}^2$ (PFD).

$[\omega_0]=\sqrt{\dfrac{\text{N}^2\text{m}^2\text{A}^{-2}}{\text{VsA}^{-1}\times\text{Nmrad}^{-1}\text{s}^2}}=\sqrt{\dfrac{\text{Nmrad}}{\text{VsAs}^2}}$. Or, $\text{W}=\text{Nmrad}\,\text{s}^{-1}=\text{VA}$.

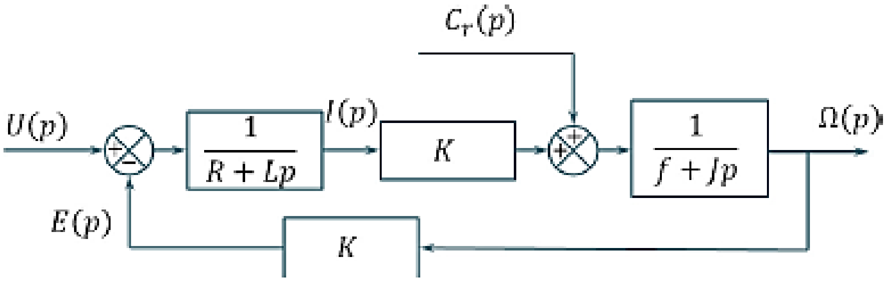
On a alors $[\omega_0]=\sqrt{\dfrac{\text{Nmrad}\,\text{s}^{-1}}{\text{Vs}^2\text{A}}}=\sqrt{\dfrac{1}{\text{s}^2}}=\text{s}^{-1}$.

Enfin, ξ est sans unité... à vérifier :)

Exercice 217 – Moteur à courant continu★

B2-07

Question 1 *Réaliser le schéma-blocs.*



Question 2 *Mettre le schéma-blocs sous la forme suivante.*

En utilisant le schéma-blocs proposé, on a $\Omega(p)=\left(C_r(p)A(p)+U(p)B(p)\right)C(p)$.

D'autre part, $\Omega(p)=\left(C_r(p)+\dfrac{K}{R+Lp}\left(U(p)-K\Omega(p)\right)\right)\dfrac{1}{f+Jp}$.

On a donc $(f+Jp)\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\dfrac{K}{R+Lp}$

$$\Leftrightarrow (f+Jp)\Omega(p)+\frac{K^2}{R+Lp}\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \left((f+Jp)+\frac{K^2}{R+Lp}\right)\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K^2+(f+Jp)(R+Lp)}{R+Lp}\Omega(p)=C_r(p)+U(p)\frac{K}{R+Lp}$$

$$\Leftrightarrow \Omega(p)=\left(C_r(p)+U(p)\frac{K}{R+Lp}\right)\frac{R+Lp}{K^2+(f+Jp)(R+Lp)}.$$

Dés lors plusieurs schéma-blocs peuvent répondre à la question. Par exemple, $A(p)=1$, $B(p)=\dfrac{K}{R+Lp}$,

$$C(p)=\frac{R+Lp}{K^2+(f+Jp)(R+Lp)}.$$

En poursuivant, on a aussi : $\Omega(p)=\left(C_r(p)(R+Lp)+U(p)K\right)\dfrac{1}{K^2+(f+Jp)(R+Lp)}$.

On a donc aussi, $A(p)=R+Lp$, $B(p)=K$, $C(p)=\dfrac{1}{K^2+(f+Jp)(R+Lp)}$

Exercice 216 – Valeur finale★

C2-03

Question 1 *Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude E_0.*

On a $H(p)=\dfrac{\dfrac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}}{1+\dfrac{CK}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}}=\dfrac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}$. En conséquence, $S(p)=E(p)\dfrac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}$.

$s_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}s(t)=\lim\limits_{p\to0}pS(p)=\lim\limits_{p\to0}pE(p)H(p)$. Dans le cas où $E(p)$ est un échelon, on a $E(p)=\dfrac{E_0}{p}$ et donc $s_\infty=\lim\limits_{p\to0}p\dfrac{E_0}{p}\dfrac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}=\dfrac{E_0}{C}$.

Question 2 *En déduire la valeur de l'erreur statique.*

L'erreur statique est donnée par $\lim\limits_{t\to+\infty}(e(t)-s(t))=E_0-\dfrac{E_0}{C}$.

Question 3 *Déterminer la valeur finale de $s(t)$ lorsque l'entrée est une rampe de pente k.*

On a maintenant $E(p)=\dfrac{k}{p^2}$. On a donc et donc $s_\infty=\lim\limits_{p\to0}p\dfrac{k}{p^2}\dfrac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}$ et $s_\infty=\infty$.

Question 4 *En déduire la valeur de l'erreur de trainage.*

$$\varepsilon_v=\lim_{t\to+\infty}(e(t)-s(t))=\lim_{p\to0}p\left(\frac{k}{p^2}-\frac{k}{p^2}\frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}\right)$$
$$=\lim_{p\to0}\frac{k}{p}\left(1-\frac{K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}\right)=\lim_{p\to0}\frac{k}{p}\frac{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK-K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}=+\infty$$

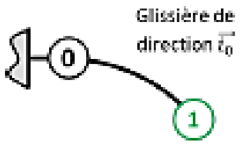
Question 5 *Qu'en est-il si $C=1$?*

$$\varepsilon_v=\lim_{p\to0}\frac{k}{p}\frac{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK-K}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+CK}=\lim_{p\to0}\frac{k}{p}\frac{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+K}=\lim_{p\to0}k\frac{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}{p(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)+K}=\frac{k}{K}.$$

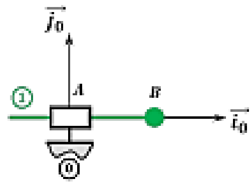
Exercice 215 – Mouvement T – ⋆

B2-12

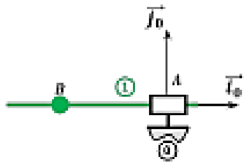
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\lambda = 10\,\text{mm}$.



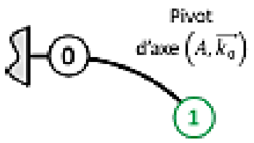
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\lambda = -20\,\text{mm}$.



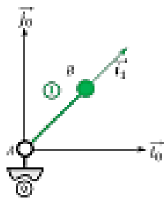
Exercice 214 – Mouvement R ⋆

B2-12

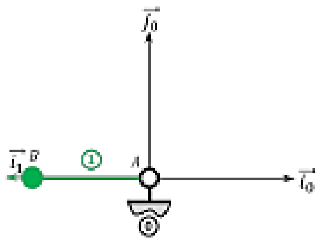
Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *rad.*



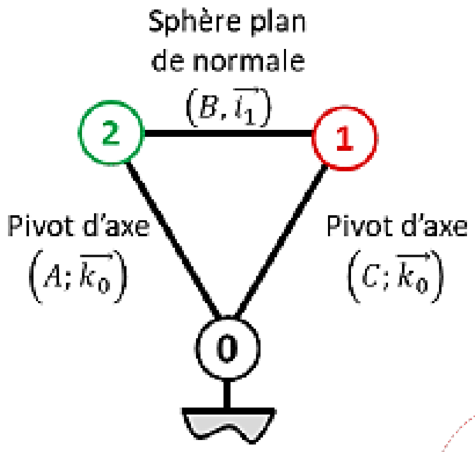
Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta = \pi$ *rad.*



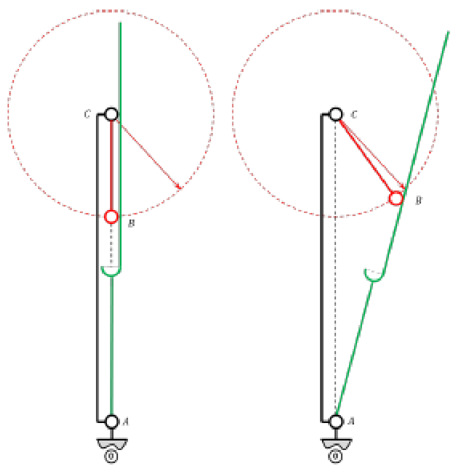
Exercice 213 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-12

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



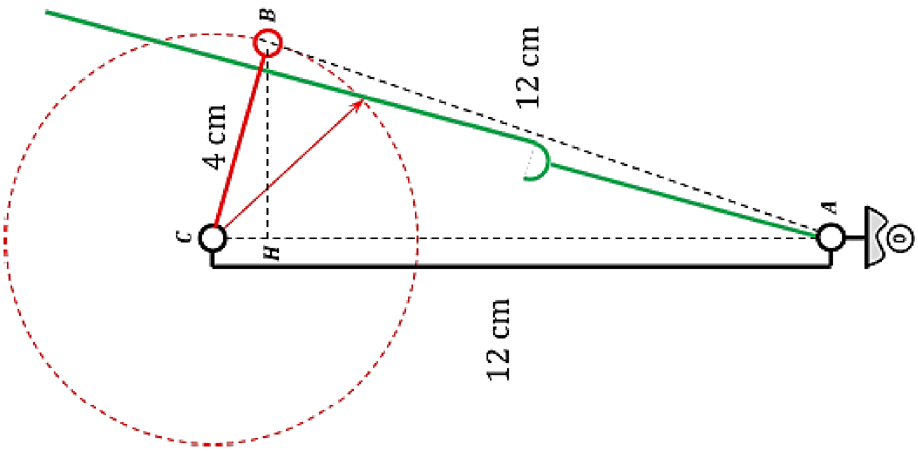
Question 2 *Retracer le schéma cinématique pour* $\theta(t) = \dfrac{\pi}{2}$ *rad.*



Question 3 *Retracer le schéma cinématique pour $\theta(t)=75°$.*

Question 4 *Dans l'hypothèse où la pièce **1** peut faire des tours complets, quelle doit être la longueur minimale de la pièce **2**.*
Dans cas, dans le pire des cas, A, B et C sont alignés (avec B au-dessus de C). Il faut donc $AB=AC+CB=160\,\text{mm}$.

Question 5 *Dans l'hypothèse où la pièce **2** fait* 12 cm, *quel sera le débattement maximal de la pièce **1**.*
Comme je suis paresseux, j'ai réalisé la construction avec geogebra. On mesure 160,8 °.



Exercice 212 – Mouvement T – ⋆

C2-05
B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*

1 est en translation de direction $\overrightarrow{i_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB}=\lambda(t)\overrightarrow{i_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t)=\lambda(t)\\ y_B(t)=0\\ z_B(t)=0\end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 211 – Mouvement R ⋆

C2-05
B2-13

Question 1 *Quel est le mouvement de **1** par rapport à **0**.*
1 est en rotation de centre A et d'axe $\overrightarrow{k_0}$ par rapport à **0**.

Question 2 *Quelle est la trajectoire du point B appartenant à **1** par rapport à **0**.*
B est est en rotation par rapport à **0** (cercle de centre A et de rayon R).

Question 3 *Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à **1** par rapport à **0**.*

On a $\overrightarrow{AB}=R\overrightarrow{i_1}=R\cos\theta\,\overrightarrow{i_0}+R\sin\theta\,\overrightarrow{j_0}$. La trajectoire du point B est donc donnée par $\left\{\begin{array}{l} x_B(t)=R\cos\theta(t)\\ y_B(t)=R\sin\theta(t)\\ z_B(t)=0\end{array}\right.$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{i_0},\overrightarrow{j_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Exercice 210 – Barrière Sympact ⋆⋆

B2-13

Question 1 *Calculer $\overrightarrow{V(B,1/0)}$?*
$\overrightarrow{V(B,1/0)}=\overrightarrow{V(C,1/0)}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\overrightarrow{0}-R\overrightarrow{i_1}\wedge\dot{\theta}\overrightarrow{k_0}=R\dot{\theta}\overrightarrow{j_1}$.
(Possibilité d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 2 *Calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$?*

$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(A,2/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{0} - \lambda \overrightarrow{i_2} \wedge \dot{\varphi} \overrightarrow{k_0} = \lambda \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2}$.

(**Impossibilité** d'utiliser la dérivation vectorielle.)

Question 3 *Justifier que $\overrightarrow{V(B,2/1)} \cdot \overrightarrow{j_2} = 0$.*

La liaison entre **2** et **1** est une liaison ponctuelle de normale $\overrightarrow{j_2}$. Il n'y a donc pas de vitesse sur cette direction (ce qui de plus provoquerait une rupture de contact en B).

Question 4 *En déduire une relation cinématique entre les différentes grandeurs.*

En utilisant la décomposition du vecteur vitesse, on a $\overrightarrow{V(B,2/1)} \cdot \overrightarrow{j_2} = \left(\overrightarrow{V(B,2/0)} - \overrightarrow{V(B,1/0)}\right) \cdot \overrightarrow{j_2} \Leftrightarrow 0 = \left(\lambda \dot{\varphi} \overrightarrow{j_2} - R\dot{\theta} \overrightarrow{j_1}\right) \cdot \overrightarrow{j_2} \Leftrightarrow 0 = \lambda \dot{\varphi} - R\dot{\theta} \cos(\varphi - \theta)$

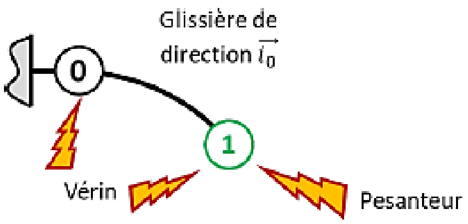
Exercice 209 – Mouvement T – ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

$$\{\mathscr{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \overrightarrow{j_1} + Z_{01} \overrightarrow{k_1} \\ L_{01} \overrightarrow{i_1} + M_{01} \overrightarrow{j_1} + N_{01} \overrightarrow{k_1} \end{array} \right\}_A$$

$$\{\mathscr{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

$$\{\mathscr{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G$$

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

$$\{\mathscr{F}(0 \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} Y_{01} \overrightarrow{j_1} \\ N_{01} \overrightarrow{k_1} \end{array} \right\}_A, \{\mathscr{F}(\text{pes} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G, \{\mathscr{F}(\text{ver} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} F_v \overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_G.$$

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le vérin pour maintenir 1 en équilibre.*

Mouvement de translation. On isole 1 et on applique le théorème de la résultante statique en projection suivant $\overrightarrow{i_0}$.

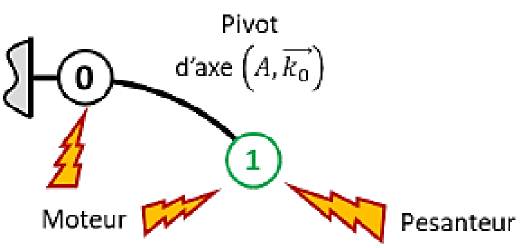
Exercice 208 – Mouvement R ⋆

B2-14

B2-15

C1-05

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.*

$\{\mathscr{F}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_1}+Y_{01}\,\overrightarrow{j_1}+Z_{01}\,\overrightarrow{k_1} \\ L_{01}\,\overrightarrow{i_1}+M_{01}\,\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_A$, $\{\mathscr{F}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$, $\{\mathscr{F}(\text{Mot}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A$.

Question 3 *Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.*

$\{\mathscr{F}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_1}+Y_{01}\,\overrightarrow{j_1} \\ M_{01}\,\overrightarrow{j_1}\end{array}\right\}_A$, $\{\mathscr{F}(\text{pes}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_B$, $\{\mathscr{F}(\text{Mot}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_A$.

Question 4 *Proposer une démarche permettant de déterminer l'effort que doit développer le moteur pour maintenir 1 en équilibre.*

On isole 1 et on réalise un théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$.

Exercice 207 – Barrière Sympact ★★

C1-05

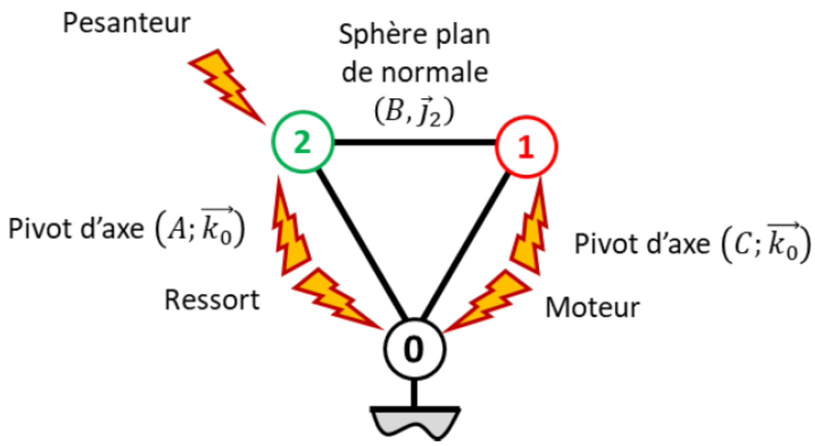
On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r\,\overrightarrow{k_0}\end{array}\right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2. Le raideur du ressort est telle qu'il exerce un couple de 45 Nm pour un angle de rotation 100°. On considère que le couple est nul lorsque la pièce 2 est à la verticale ($\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$). Il est au maximum lorsque $\varphi_f=0$.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Pes}\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c} -Mg\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG}=L\,\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*



Question 2 *Expliciter C_r en fonction des différents constantes (k,φ_o,φ_f) et celles qui vous sembleraient utile.*

Exprimons le couple du ressort par $C_r(\varphi)=a\varphi+b$. On a d'une part, $C_r(\varphi_0)=0$. D'autre part, on a une raideur k de 45 Nm pour un angle de rotation 100°soit $k=\dfrac{45}{100\dfrac{\pi}{180}}=26\,\text{Nm}\,\text{rad}^{-1}$. On a donc $C_r(\varphi_f)=k\dfrac{\pi}{2}$.

On a donc : $\left\{\begin{array}{l} a\varphi_0+b=0 \\ a\varphi_f+b=k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-a\varphi_0 \\ a\varphi_f-a\varphi_0=k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-a\varphi_0 \\ a\left(\varphi_f-\varphi_0\right)=k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-a\varphi_0 \\ a=k\dfrac{\pi}{2\left(\varphi_f-\varphi_0\right)}\end{array}\right.$

On a donc $C_r(\varphi)=k\dfrac{\pi}{2\left(\varphi_f-\varphi_0\right)}\varphi-k\dfrac{\pi\varphi_0}{2\left(\varphi_f-\varphi_0\right)}$.

Avec $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi_f=0$, on a $C_r(\varphi)=-k\varphi+k\dfrac{\pi}{2}$.

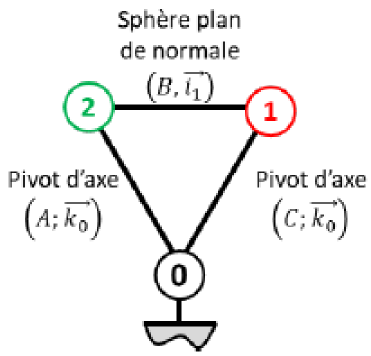
Question 3 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

Exercice 206 – Barrière Sympact ⋆

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*



Question 2 *Exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\theta(t)$.*

On a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$ soit $\lambda(t)\overrightarrow{i_2}-R\overrightarrow{i_1}-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

En exprimant l'équation vectorielle dans le repère $\mathcal{R}_0$, on a $\lambda(t)\left(\cos\varphi(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\varphi(t)\overrightarrow{j_0}\right)-R\left(\cos\theta(t)\overrightarrow{i_0}+\sin\theta(t)\overrightarrow{j_0}\right)-h\overrightarrow{j_0}=\overrightarrow{0}$.

On a alors $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)-R\cos\theta(t)=0\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)-R\sin\theta(t)-h=0\end{array}\right.$

soit $\left\{\begin{array}{l}\lambda(t)\cos\varphi(t)=R\cos\theta(t)\\ \lambda(t)\sin\varphi(t)=R\sin\theta(t)+h\end{array}\right.$.

En faisant le rapport des équations, on a donc : $\tan\varphi(t)=\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}$ (pour $\theta(t)\neq\dfrac{\pi}{2}\, mod \pi$).

Question 3 *Exprimer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$.*

On a : $\varphi(t)=\arctan\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)$.

Pour commencer, $(R\sin\theta(t)+h)'=R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)$ et $(R\cos\theta(t))'=-R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)$.

De plus, $\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)'$

$=\dfrac{R\dot{\theta}(t)\cos\theta(t)R\cos\theta(t)+R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$

$=\dfrac{R^2\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)+R\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)(R\sin\theta(t)+h)}{R^2\cos^2\theta(t)}$

$=\dfrac{R\dot{\theta}(t)\cos^2\theta(t)+R\sin^2\theta(t)\dot{\theta}(t)+h\dot{\theta}(t)\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$

$=\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}$.

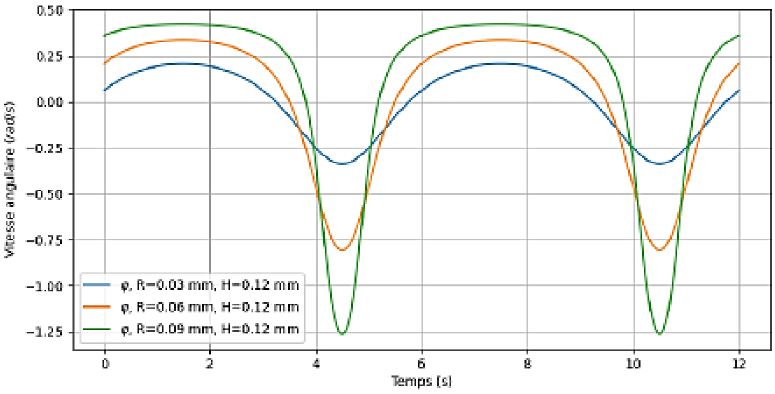
Au final,

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\left(\dfrac{R\sin\theta(t)+h}{R\cos\theta(t)}\right)^2}\;\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{1+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}.$$

$$\dot{\varphi}(t)=R^2\cos^2\theta(t)\frac{\dot{\theta}(t)\dfrac{R+h\sin\theta(t)}{R\cos^2\theta(t)}}{R^2\cos^2\theta(t)+\dfrac{(R\sin\theta(t)+h)^2}{R^2\cos^2\theta(t)}}=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+(R\sin\theta(t)+h)^2}.$$

$$\dot{\varphi}(t)=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2\cos^2\theta(t)+R^2\sin^2\theta(t)+h^2+2Rh\sin\theta(t)}=\frac{R\dot{\theta}(t)(R+h\sin\theta(t))}{R^2+h^2+2Rh\sin\theta(t)}.$$

Question 4 *En utilisant Python, tracer $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$. On considérera que la fréquence de rotation de la pièce 1 est de 10 tours par minute.*




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
from scipy.optimize import newton
from scipy.optimize import fsolve

R = 0.03 # m
H = 0.12 # m
w = 10 # tours /min
w = 10*2*m.pi/60 # rad/s

def calc_phi(theta):
    num = R*np.sin(theta)+H
    den = R*np.cos(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def calc_phip(theta):
    num = R*w*(R+H*np.sin(theta))
    den = R*R+H*H+2*R*H*np.sin(theta)
    return np.arctan2(num,den)

def plot_phi():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phi = calc_phi(les_theta)
    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Position angulaire ($rad$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phi,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()
```

```
def plot_phip():
    les_t = np.linspace(0,12,1000)
    les_theta = w*les_t
    les_phip = calc_phip(les_theta)

    plt.grid()
    plt.xlabel("Temps (s)")
    plt.ylabel("Vitesse angulaire ($rad/s$)")
    #plt.plot(les_t,les_theta,label=str("$\\theta$, R=")+str(R)+" mm,"+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.plot(les_t,les_phip,label=str("$\\varphi$, R=")+str(R)+" mm, "+str("H=")+str(H)+" mm")
    plt.legend()
    plt.show()

for R in [0.03,0.06,0.09]:
    plot_phip()
```

Exercice 205 – Ecart★

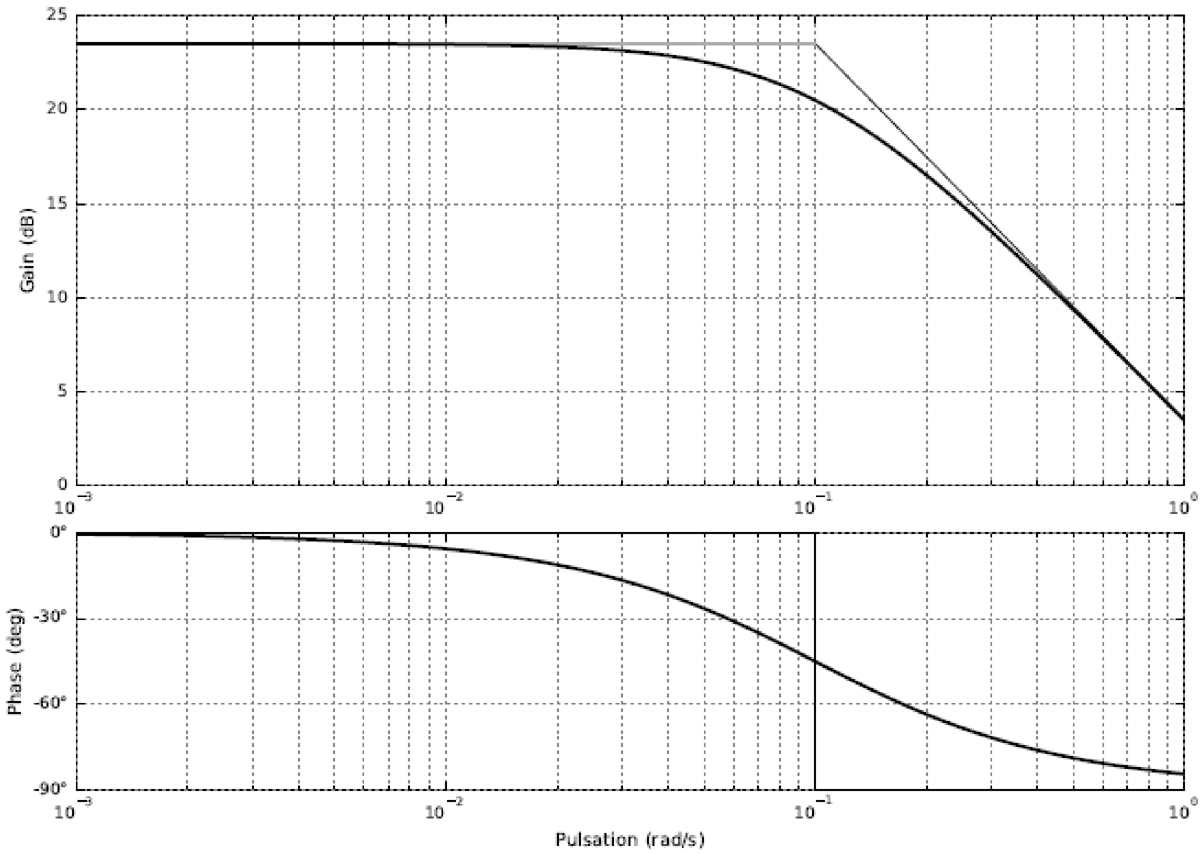
C2-02

Question 1 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_1(p) = \dfrac{15}{1+10p}$.

Tracer asymptotique

	$\omega \to 0$	$\omega = \dfrac{1}{10}\,\text{rad/s}$	$\omega \to \infty$
$H(p) = \dfrac{15}{1+10\text{p}}$	0 dB/décade 0°		−20 dB/décade −90°

Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, le gain tend vers $20\log 15 = 23{,}5\,\text{dB}$.



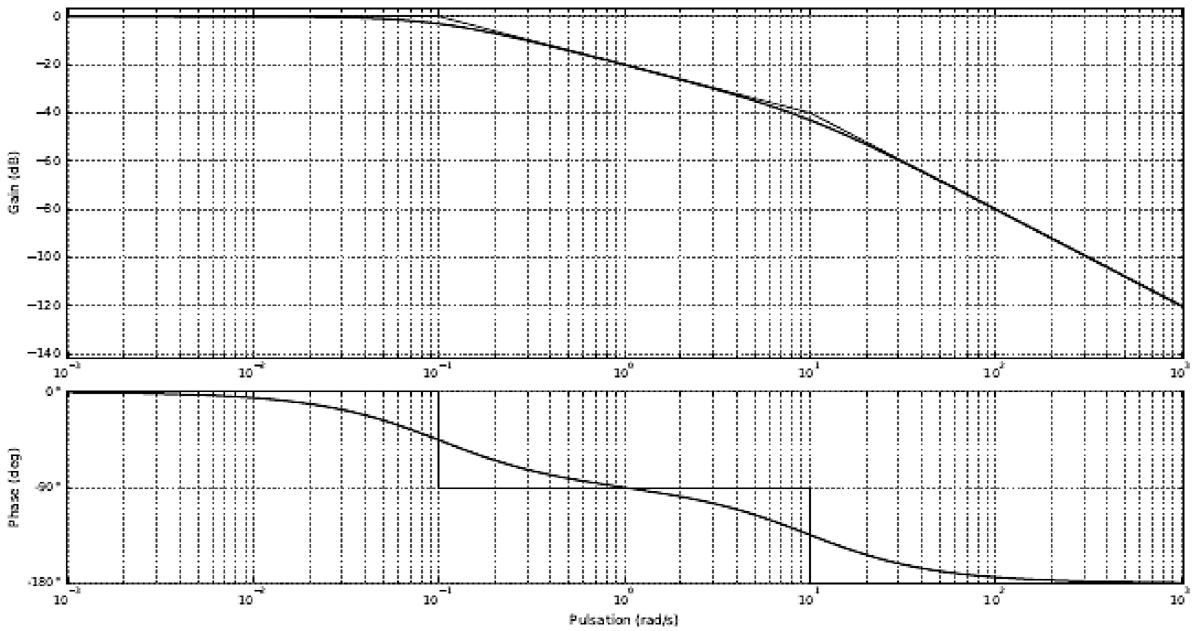
Question 2 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_2(p) = \dfrac{10}{(1+10p)(10+p)}$.

Tracer asymptotique

$$F_2(p) = \frac{1}{(1+10p)\left(1+\dfrac{p}{10}\right)}$$

<table>
<tr><td></td><td>$\omega \to 0$</td><td colspan="2">$\omega_1 = \dfrac{1}{10}$ rad/s</td><td colspan="2">$\omega_2 = 10$ rad/s</td><td>$\omega \to \infty$</td></tr>
<tr><td>$H_1(p) = \dfrac{1}{1+10p}$</td><td colspan="2">0 dB/décade
0°</td><td colspan="2">−20 dB/décade
−90°</td><td colspan="2">−20 dB/décade
−90°</td></tr>
<tr><td>$H_2(p) = \dfrac{1}{1+\frac{p}{10}}$</td><td colspan="2">0 dB/décade
0°</td><td colspan="2">0 dB/décade
0°</td><td colspan="2">−20 dB/décade
−90°</td></tr>
<tr><td>$F_2(p)$</td><td colspan="2">0 dB/décade
0°</td><td colspan="2">−20 dB/décade
−90°</td><td colspan="2">−40 dB/décade
−180°</td></tr>
</table>

Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, le gain tend vers $20\log 1 = 0\,\text{dB}$.

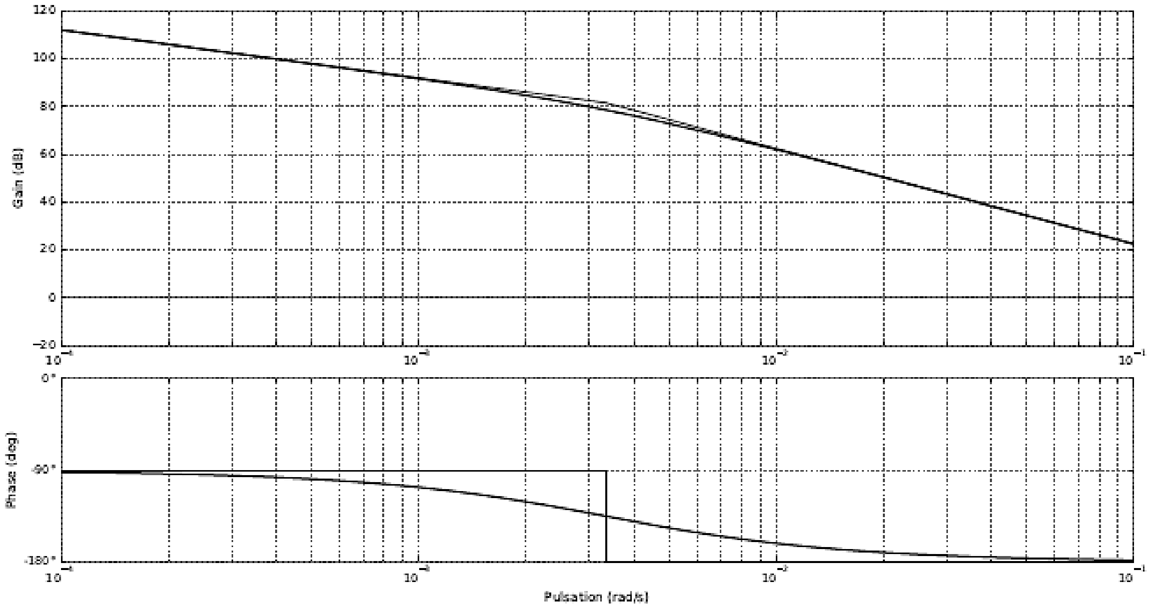


Question 3 *Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :* $F_3(p) = \dfrac{40}{p\,(1+300p)}$.

Tracer asymptotique

<table>
<tr><td></td><td>$\omega \to 0$</td><td>$\omega = \dfrac{1}{300}$ rad/s</td><td>$\omega \to \infty$</td></tr>
<tr><td>$H_1(p) = \dfrac{40}{p}$</td><td>−20 dB/décade
−90°</td><td colspan="2">−20 dB/décade
−90°</td></tr>
<tr><td>$H_2(p) = \dfrac{1}{1+300p}$</td><td>0 dB/décade
0°</td><td colspan="2">−20 dB/décade
−90°</td></tr>
<tr><td>$F_3(p)$</td><td>−20 dB/décade
−90°</td><td colspan="2">−40 dB/décade
−180°</td></tr>
</table>

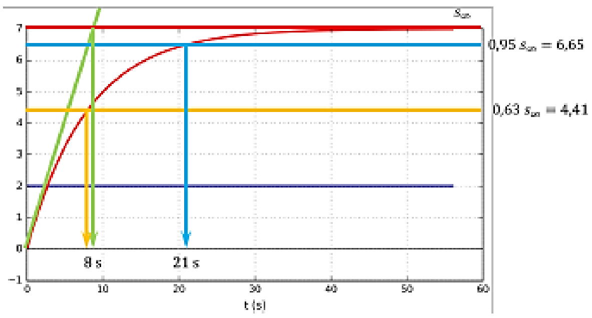
Positionnement du diagramme de gain Lorsque que ω tend vers 0, $F_3(p) \simeq \dfrac{40}{p}$. Cette asymptote de pente -20 dB/decade passe par le point $(40, 0)$.



Exercice 204 – Identification temporelle ⋆

B2-06

Question 1 *Déterminer la fonction de transfert du système.*



La tangente à l'origine est non nulle. Il n'y a pas de dépassement. On va donc identifier un système d'ordre 1 de la forme $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$.

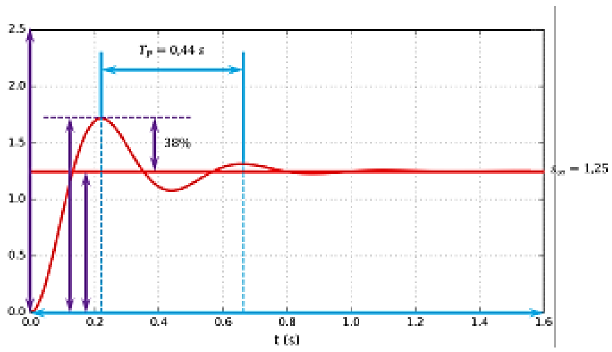
L'échelon d'entrée a une amplitude de 2. En régime permanent la valeur atteinte est de 7. On a donc $K = \dfrac{7}{2} = 3,5$.

Pour identifier la constante de temps, on peut :

- regarder à quel temps a lieu l'intersection entre l'asympote en régime permanent et la tangente à l'origine ;
- mesurer le temps de temps réponse à 63 % ;
- mesurer le temps de temps réponse à 95 % et diviser cette valeur par 3.

On a donc $H(p) = \dfrac{3,5}{1+8p}$.

Question 2 *Déterminer la fonction de transfert du système en réalisant les mesures nécessaires et en utilisant les formules appropriées.*



La tangente à l'origine est nulle et il y a des dépassements. On modélise le système par un système d'ordre 2.

$H(p)=\dfrac{K}{1+\dfrac{2\xi}{\omega_0}p+\dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$.

On a $K=\dfrac{1,25}{2,5}=0,5$.

On mesure un dépassement de $1,38=e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\Leftrightarrow \ln 0,38=\dfrac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\Leftrightarrow \sqrt{1-\xi^2}\ln 1,38=-\pi\xi \Leftrightarrow (1-\xi^2)(\ln 1,38)^2=\pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2-\xi^2(\ln 1,38)^2=\pi^2\xi^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2=\pi^2\xi^2+\xi^2(\ln 1,38)^2 \Leftrightarrow (\ln 1,38)^2=\xi^2\left(\pi^2+(\ln 1,38)^2\right)\Leftrightarrow \dfrac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2+(\ln 1,38)^2}=\xi^2 \Leftrightarrow \xi=\sqrt{\dfrac{(\ln 1,38)^2}{\pi^2+(\ln 1,38)^2}}=0,3$.

Par ailleurs, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\xi^2}}=\dfrac{2\pi}{0,44\sqrt{1-0,3^2}}=14,9\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

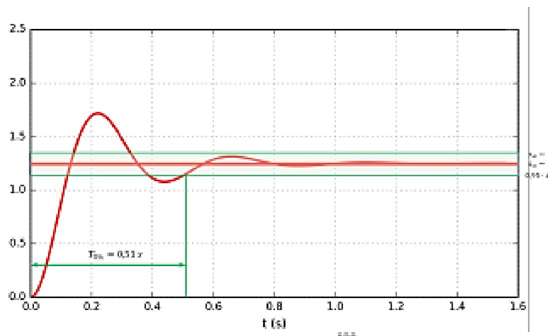
Au final, $H(p)=\dfrac{0,5}{1+\dfrac{2\times 0,3}{14,9}p+\dfrac{p^2}{14,9^2}}$.

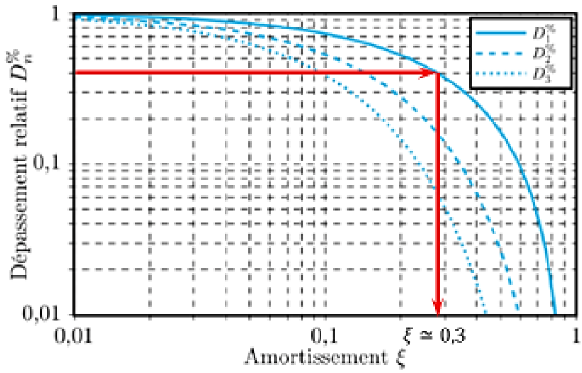
Question 3 *Déterminer la fonction de transfert du système en utilisant les abaques.*

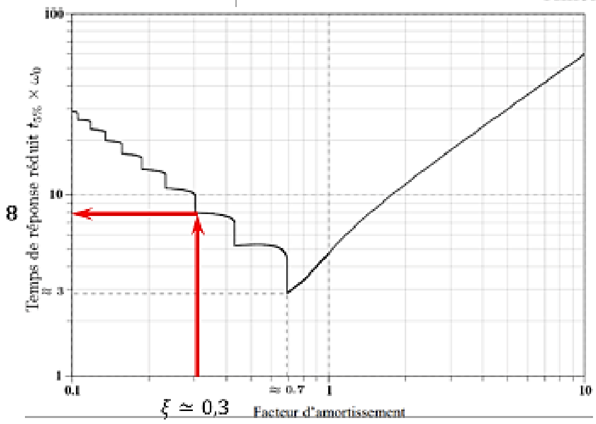
Le dépassement est de 38 %. On a donc $\xi=0,3$.

De plus, on mesure $T_{5\%}\times\omega_0=8$ avec $T_{5\%}=0,51$ s on a $\omega_0=8/0,5\simeq 16\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Au final, $H(p)=\dfrac{0,5}{1+\dfrac{2\times 0,3}{16}p+\dfrac{p^2}{16^2}}$.



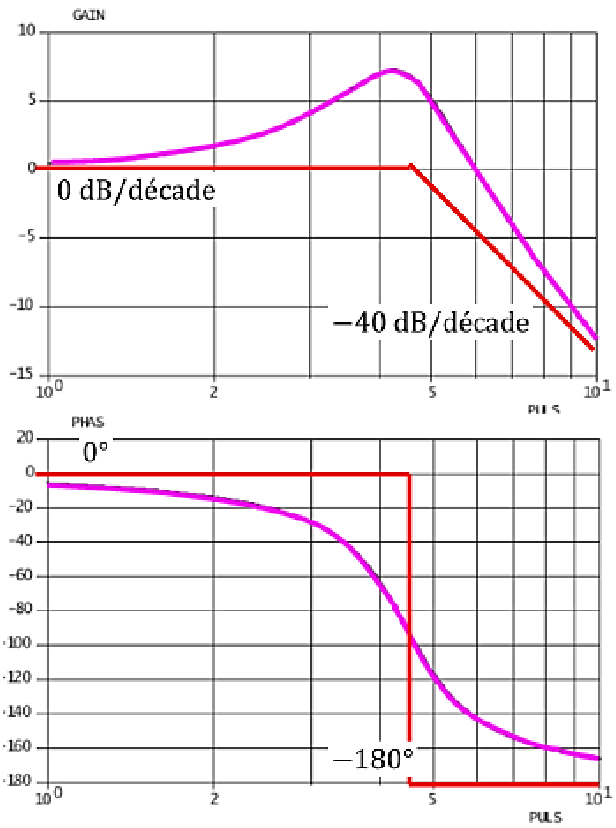




Exercice 203 – Identification ⋆

B2-06

Question 1 *Tracer le diagramme de Bode asymptotique.*



Question 2 *Identifier le type de la fonction de transfert et ses valeurs remarquables.*

La phase tend vers 0 lorsque ω tend vers 0 rad/s et vers $-180°$ lorsque ω tend vers l'infini. On observe de plus une résonance. Par ailleurs le gain est nul quand ω tend vers 0 rad/s. Le système est donc d'ordre 2 avec un gain unitaire et un $\xi < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On détermine ω_0 lorsque la phase vaut $-90°$.

À ce stade, $H(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.

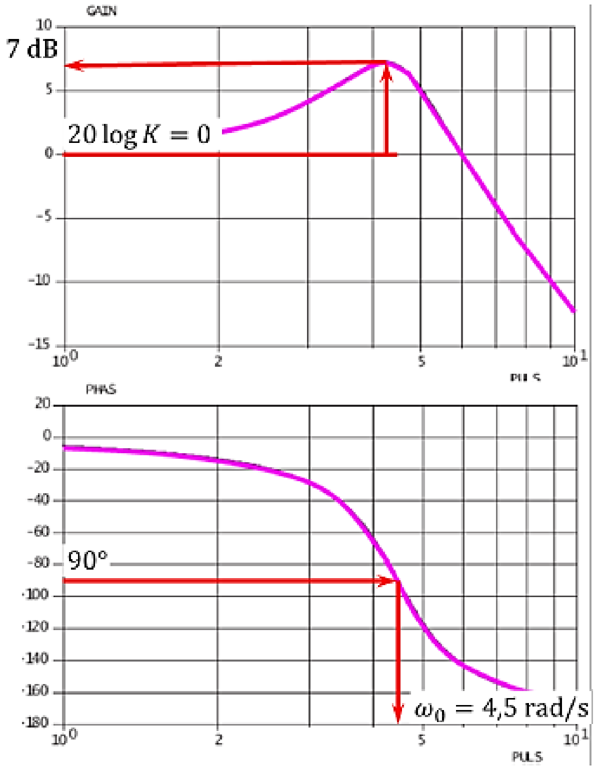
Enfin, on mesure un gain à la résonance de 7 dB. On a donc $20\log A_{max} = 7$ soit $A_{max} = 10^{7/20} = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$.

Par suite, $\dfrac{1}{A_{max}} = 2\xi\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_{max}} = 4\xi^2\left(1-\xi^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_{max}^2} = 4\xi^2 - 4\xi^4 \Rightarrow 4\xi^4 - 4\xi^2 + \dfrac{1}{A_{max}^2} = 0 \Rightarrow 4X^2 - 4X + \dfrac{1}{A_{max}^2} = 0$

On a alors $\Delta = 16 - \dfrac{16}{A_{max}^2}$ et $X_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{\Delta}}{16}$

En réalisant les applications numériques, on a $\xi = \sqrt{\dfrac{4-\sqrt{\Delta}}{16}} = 0,23$.

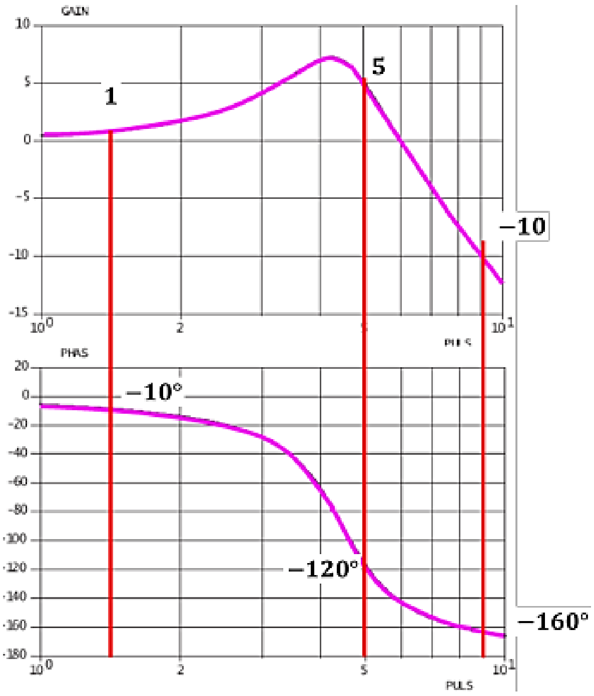
Alors, $H(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{2\times 0,23}{4,5}p+\dfrac{p^2}{4,5^2}}$.



Question 3 *Déterminer les période et les pulsations de chacun des signaux.*

- Signal rouge : $T = 4{,}2$ s et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1{,}5$ rad/s.
- Signal vert : $T = 3,6/3 = 1{,}2$ s et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5{,}2$ rad/s.
- Signal bleu : $T = 4,2/6 = 0{,}7$ s et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 9$ rad/s.

Question 4 *En déduire le gain et le déphasage en régime permanent pour chacune des courbes temporelles de sortie correspondant aux 3 entrées.*

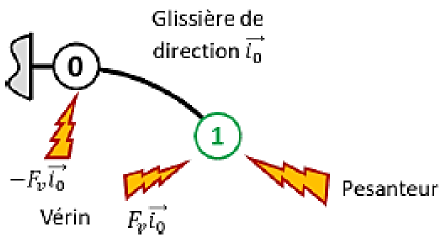


- Pour $\omega = 1{,}5$ rad/s, $G_{dB} = 1 \Rightarrow 20\log K = 1 \Rightarrow K = 10^{1/20} = 1,12$ et $\varphi = -0{,}17$ rad. On a donc $s(t) = 1,12\sin(\omega t - 0,17)$.
- Pour $\omega = 5$ rad/s, $G_{dB} = 5 \Rightarrow K = 10^{5/20} = 1,8$ et $\varphi = -2{,}1$ rad. On a donc $s(t) = 1,8\sin(\omega t - 2,1)$.
- Pour $\omega = 9$ rad/s $G_{dB} = 5 \Rightarrow K = 10^{-10/20} = 0,3$ et $\varphi = -2{,}8$ rad. On a donc $s(t) = 0,3\sin(\omega t - 2,8)$.

Exercice 202 – Mouvement T ⋆

C2-07

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Exprimer l'équation d'équilibre de la pièce 1.*

- On isole 1.
- Bilan des actions mécaniques :
  - pesanteur : $\{\mathscr{F}(\text{pes}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_G$;
  - vérin : $\{\mathscr{F}(\text{ver}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_v\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$;
  - liason glissière : $\{\mathscr{F}(0\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} Y_{01}\,\overrightarrow{j_1} + Z_{01}\,\overrightarrow{j_1} \\ L_{01}\,\overrightarrow{i_1} + M_{01}\,\overrightarrow{j_1} + N_{01}\,\overrightarrow{j_1} \end{array}\right\}_A$.

En appliquant le théorème de la résultante statique en projection suivant $\overrightarrow{i_0}$, on a $-m_1 g + F_v = 0$.

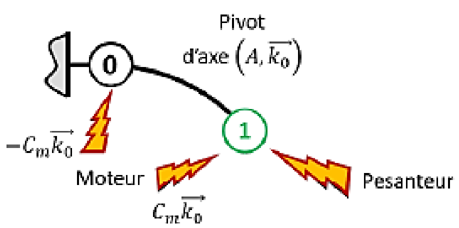
Question 3 *Déterminer l'ensemble des inconnues de liaison.*

En A, on a $\{\mathscr{F}(\text{pes}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{AG}\wedge -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \left(\lambda(t)\overrightarrow{i_0} + \ell\,\overrightarrow{j_1}\right)\wedge -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{i_1} \\ \ell\, m_1 g\,\overrightarrow{k_1} \end{array}\right\}_A$ En appliquant le PFS à 1, on a le TRS : $\left\{\begin{array}{l} 0 - m_1 g + F_v = 0 \\ Y_{01} = 0 \\ Z_{01} = 0 \end{array}\right.$ et le TMS en A : $\left\{\begin{array}{l} L_{01} = 0 \\ M_{01} = 0 \\ N_{01} + \ell\, m_1 g = 0 \end{array}\right.$.

Exercice 201 – Mouvement R ⋆

C2-07

Question 1 *Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.*



Question 2 *Donner l'équation d'équilibre de la pièce 1.*

- On isole 1.
- Bilan des actions mécaniques :
  - $\{\mathscr{F}(0\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{01}\,\overrightarrow{i_0} + Y_{01}\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$;
  - $\{\mathscr{F}(\text{Mot}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m\,\overrightarrow{k_0} \end{array}\right\}_A$;
  - $\{\mathscr{F}(\text{pes}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,\text{pes}\to 1)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,\text{pes}\to 1)} + \overrightarrow{AB}\wedge -m_1 g\,\overrightarrow{j_0} = R\,\overrightarrow{i_1}\wedge -m_1 g\,\overrightarrow{j_0}$ $= -R m_1 g\,\overrightarrow{k_0}$.

- On réalise le théorème du moment statique en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$: $C_m - R m_1 g = 0$.

Question 3 *Déterminer l'ensemble des inconnues de liaisons.*

On réalise le TRS en projection sur $\overrightarrow{i_0}$: $X_{01} = 0$.
On réalise le TRS en projection sur $\overrightarrow{j_0}$: $Y_{01} = m_1 g$.

Exercice 200 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = -\dfrac{Z_1}{Z_3}$.

Question 3 *Donner une relation géométrique entre Z_1, Z_2 et Z_3 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages.*

On a $Z_3 = 2Z_2 + Z_1$.

Exercice 199 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = -\dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$.

Question 3 *Donner une relation géométrique entre Z_1, Z_{21}, Z_{22} et Z_4 permettant de garantir le fonctionnement du train d'engrenages (on fera l'hypothèse que toutes les roues dentées ont le même module).*

On a $Z_1 + Z_{21} + Z_{22} = Z_4$.

Exercice 198 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}} = \dfrac{Z_1 Z_{22}}{Z_4 Z_{21}}$.

Exercice 197 – Barrière Sympact ⋆⋆

C2-07

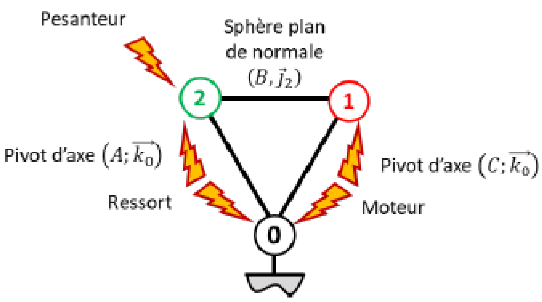
On néglige la pesanteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Moteur} \rightarrow 1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_m \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique du moteur sur la pièce 1.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Ressort} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ C_r \overrightarrow{k_0} \end{array} \right\}_{\forall P}$ l'action mécanique d'un ressort couple sur la pièce 2.

On note $\{\mathscr{F}(\text{Pes} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\overrightarrow{j_0} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{\forall G}$ avec $\overrightarrow{AG} = L\overrightarrow{i_2}$.

Question 1 *Réaliser un graphe d'analyse.*



Question 2 *Proposer une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- On isole 1, on réalise un TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple moteur et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- On isole 2, on réalise un TMS en A en projection sur $\overrightarrow{k_0}$. On obtient une équation liant le couple dans le ressort et l'action normale dans la liaison sphère plan.
- En combinant les deux équations on élimine l'action normale dans la liaison sphère plan. On peut éliminer un des deux angles en utilisant la loi entrée sortie.

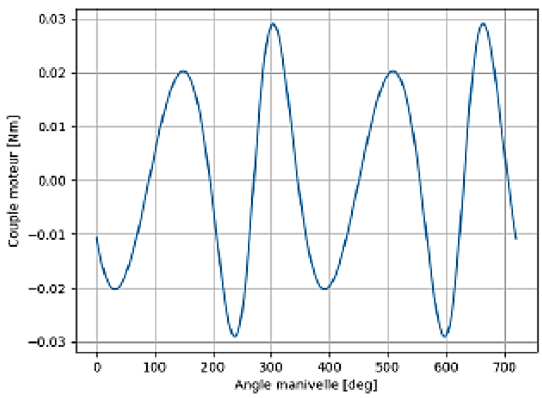
Question 3 *Mettre en œuvre une méthode permettant d'exprimer le couple moteur en fonction des autres actions mécaniques.*

- **On isole 1.**
- **On réalise le bilan des actions mécaniques :**
  - action de la pivot en C (pas de moment suivant $\overrightarrow{k_0}$),
  - action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathscr{T}(2\rightarrow 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_B\overrightarrow{j_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$, on a alors $\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2\rightarrow 1)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,2\rightarrow 1)} + \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{R(2\rightarrow 1)} = R\overrightarrow{i_1} \wedge F_B\overrightarrow{j_2} = RF_B \sin\left(\varphi - \theta + \frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{k_0} = RF_B\cos(\varphi-\theta)\overrightarrow{k_0}$;
  - $\{\mathscr{T}(\text{Moteur}\rightarrow 1)\}$.
- **On réalise le TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$:** $C_m + RF_B\cos(\varphi-\theta) = 0$.
- **On isole 2.**
- **On réalise le bilan des actions mécaniques :**
  - action de la pivot en A (pas de moment suivant $\overrightarrow{k_0}$),
  - action de la liaison sphère plan en B : $\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\} = \left\{\begin{array}{c} -F_B\overrightarrow{j_2} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$, on a alors $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,1\rightarrow 2)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(B,1\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R(1\rightarrow 2)} = \lambda\overrightarrow{i_2} \wedge -F_B\overrightarrow{j_2} = -\lambda F_B\overrightarrow{k_2}$.
  - $\{\mathscr{T}(\text{Ressort}\rightarrow 2)\}$;
  - action de la pesanteur : $\overrightarrow{\mathscr{M}(A,\text{pes}\rightarrow 2)} = \overrightarrow{\mathscr{M}(G,\text{pes}\rightarrow 2)} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{R(\text{pes}\rightarrow 2)} = L\overrightarrow{i_2} \wedge -Mg\overrightarrow{j_0}$
    $= -MgL\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\overrightarrow{k_0}$
    $= -MgL\cos(\varphi)\overrightarrow{k_0}$
- **On réalise le TMS en C en projection sur $\overrightarrow{k_0}$:** $C_r - \lambda F_B - MgL\cos\varphi = 0$.

Au final, $C_r - \lambda F_B - MgL\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow F_B = \dfrac{C_r - MgL\cos\varphi}{\lambda}$ et
$C_m + R\dfrac{C_r - MgL\cos\varphi}{\lambda}\cos(\varphi-\theta) = 0$.

Question 4 *Tracer, en utilisant Python, l'évolution du couple moteur en fonction de l'angle de la manivelle. On prendra $M = 1\,\text{kg}$ et $L = 0{,}1\,\text{m}$*

`https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/324a-628215/mcer`



Exercice 196 – Train simple ⋆

A3-05

C2-06

Question 1 *Tracer le graphe des liaisons.*

Question 2 *Déterminer* $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$ *en fonction du nombre de dents des roues dentées.*

On a $\dfrac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}=\dfrac{Z_1Z_{22}}{Z_4Z_{21}}$.

Exercice 195 – La Seine Musicale⋆

B2-07

Question 1 *En considérant que la perturbation* $C_{pert}(p)$ *est nulle, déterminer* $H_f(p)=\dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$ *sous forme canonique.*

Réduction de la boucle du moteur à courant continu : $\dfrac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}=\dfrac{\dfrac{k_c}{R+Lp}\dfrac{1}{J_{eq}p}}{1+\dfrac{k_c}{R+Lp}\dfrac{k_e}{J_{eq}p}}=\dfrac{k_c}{(R+Lp)\,J_{eq}p+k_ek_c}$.

On a alors,

$$\frac{X_{ch}(p)}{\Omega_c(p)}=K_a\frac{CK_h\dfrac{k_c}{(R+Lp)\,J_{eq}p+k_ek_c}}{1+CK_hK_{\text{capt}}\dfrac{k_c}{(R+Lp)\,J_{eq}p+k_ek_c}}$$
$$=K_a\frac{CK_hk_c}{(R+Lp)\,J_{eq}p+k_ek_c+CK_hK_{\text{capt}}k_c}$$

$$=\frac{K_a}{\left(k_ek_c+CK_hK_{\text{capt}}k_c\right)}\frac{CK_hk_c}{\dfrac{J_{eq}\,(R+Lp)}{k_ek_c+CK_hK_{\text{capt}}k_c}p+1}.$$

Question 2 *En prenant* $\Omega_c(p)=0$*, exprimer la fonction de transfert* $H_r(p)=\dfrac{\Omega_m(p)}{C_{pert}(p)}$ *en la mettant sous la forme :* $H_r(p)=-\dfrac{\alpha\,(1+\tau p)}{1+\gamma p+\delta p^2}$. *Exprimer* α, τ, γ *et* δ *en fonction des différents paramètres de l'étude.*

Par lecture directe du schéma-blocs, on a $\Omega_m(p)=\dfrac{1}{J_{eq}p}\left(C_{\text{pert}}(p)+C_m(p)\right)$.

De plus, $C_m(p)=\left(U_m(p)-k_e\Omega_m(p)\right)\dfrac{k_c}{R+Lp}$ et $U_m(p)=\varepsilon(p)CK_h=-\Omega_m(p)CK_hK_{\text{capt}}$.

On a donc,

$$\Omega_m(p)=\frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p)+\frac{1}{J_{eq}p}\left(-\Omega_m(p)CK_hK_{\text{capt}}-k_e\Omega_m(p)\right)\frac{k_c}{R+Lp}.$$
$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)=\frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p)+\frac{1}{J_{eq}p}\Omega_m(p)\left(-CK_hK_{\text{capt}}-k_e\right)\frac{k_c}{R+Lp}$$
$$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1+\frac{1}{J_{eq}p}\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)\frac{k_c}{R+Lp}\right)=\frac{1}{J_{eq}p}C_{\text{pert}}(p)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)}=\frac{\dfrac{1}{J_{eq}p}}{\left(1+\dfrac{1}{J_{eq}p}\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)\dfrac{k_c}{R+Lp}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)}=\frac{R+Lp}{J_{eq}p\,(R+Lp)+\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Omega_m(p)}{C_{\text{pert}}(p)}=\frac{R}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}\frac{1+\dfrac{L}{R}p}{\dfrac{J_{eq}}{\left(CK_hK_{\text{capt}}+k_e\right)k_c}p\,(R+Lp)+1}.$$

Par identification, on a alors : $\alpha = -\dfrac{R}{\left(CK_h K_{\text{capt}} + k_e\right) k_c}$,
$\tau = \dfrac{L}{R}$
$\gamma = \dfrac{R J_{eq}}{\left(CK_h K_{\text{capt}} + k_e\right) k_c}$
$\delta = \dfrac{L J_{eq}}{\left(CK_h K_{\text{capt}} + k_e\right) k_c}$.

Question 3 *Exprimer $X_{ch}(p)$ en fonction de $\Omega_m(p)$ et $C_{pert}(p)$.*

D'une part, $\Omega_m(p) = H_f(p)\Omega_c(p)$ quand il n'y a pas de perturbation. D'autre part, $\Omega_m(p) = H_r(p)C_{\text{pert}}(p)$ quand il n'y a pas de perturbation.

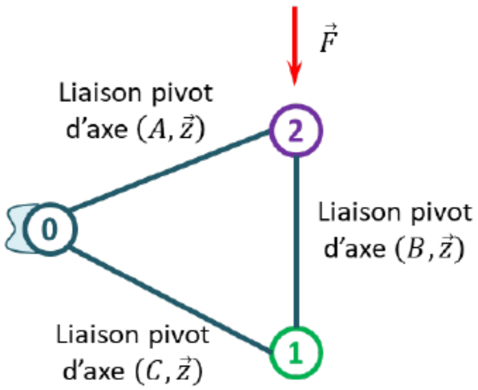
Par superposition, on a donc $\Omega_m(p) = H_f(p)\Omega_c(p) + H_r(p)C_{\text{pert}}(p)$.

Par suite, $X_{ch}(p) = \left(H_f(p)\Omega_c(p) + H_r(p)C_{\text{pert}}(p)\right)\dfrac{DK_{\text{red}}}{2p}$.

Exercice 194 – Détermination des efforts dans une structure étayée ★★

C2-07

Question 1 *Tracer le graphe d'analyse du système (graphe des liaisons et actions extérieures).*



Question 2 *Proposer une stratégie permettant de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons.*

Ici, il s'agit de déterminer les actions mécaniques dans toutes les liaisons. Il faudra donc isoler successivement toutes les pièces et réaliser un PFS pour chacune d'entre elles. Cependant, il y a quand même une stratégie d'isolement à avoir : **il faut commencer par isoler les solides soumis à deux glisseurs.** En effet, d'après le PFS, lorsqu'un solide est soumis à deux glisseurs, les deux forces sont de même norme, de même direction (droite passant par le point d'application des deux glisseurs) et de sens opposé.

La stratégie est donc la suivante :
- on isole 1 et on réalise le PFS;
- on isole 2 et on réalise le PFS en B.

Question 3 *Déterminer les actions mécaniques dans les liaisons en fonction de F.*

On isole 1. On réalise le BAME :
- $\{\mathcal{T}(0 \to 1)\}$;
- $\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a : $\{\mathcal{T}(0 \to 1)\} + \{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = 0$.

Résolution : $\{\mathcal{T}(0 \to 1)\} = -\{\mathcal{T}(2 \to 1)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{01}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A$.

On isole 2. On réalise le BAME :
- $\{\mathcal{T}(0 \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} X_{02}\overrightarrow{x} + Y_{02}\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_A = \left\{\begin{array}{c} X_{02}\overrightarrow{x} + Y_{02}\overrightarrow{y} \\ -a Y_{02}\overrightarrow{z} \end{array}\right\}_A$;
- $\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = \left\{\begin{array}{c} F_{01}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}_B$;

- $\{\mathscr{T}(\text{ext}\rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -F\overrightarrow{y} \\ -Fb\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_C$.

D'après le PFS pour un solide soumis à 2 glisseurs, on a :
$\{\mathscr{T}(0\rightarrow 2)\} + \{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\} + \{\mathscr{T}(\text{ext}\rightarrow 2)\} = 0$.

Résolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{02} + F_{01}\cos\alpha = 0 \\ Y_{02} + F_{01}\sin\alpha - F = 0 \\ -a\,Y_{02} - Fb = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{02} = -F_{01}\cos\alpha = -F\dfrac{a+b}{a\tan\alpha} \\ F_{01} = \dfrac{F-Y_{02}}{\sin\alpha} = F\dfrac{a+b}{a\sin\alpha} \\ Y_{02} = -\dfrac{b}{a}F \end{array} \right.$$

Exercice 193 – Machine de rééducation SysReeduc ⋆

B2-07

Question 1 *À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert K_1, K_2, $H_3(p)$, $H_4(p)$, K_5, K_6, K_7, K_8 et K_9.*

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$ et $C_{M1}(p) = k_t I(p)$ donc $K_2 = \dfrac{k_t}{R}$;
- $E(p) = k_e\Omega_m(p)$ et donc $K_7 = k_e$;
- $(M+m)r\rho_1 p\Omega_m(p) = \dfrac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M+m)r^2\rho_1^2 p\Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$ et donc $K_9 = \rho_1 r$ et $H_3(p) = \dfrac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2 p}$;
- $H_4(p)$ permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et $H_4(p) = \dfrac{1}{p}$;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit $K_8 = \dfrac{2000}{2\pi}$;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement $K_5 = \rho_1$ et $K_6 = r$ (à convertir en mètres) ;
- enfin, K_1 convertit des mètres en incréments. X_c est la consigne que doit respectée X. Pour avoir un asservissement précis, il faut donc $\varepsilon = 0$ et $X = X_c$ soit $\varepsilon = 0 = K_1 X_C - K_8\theta_m = K_1 X_C - K_8\dfrac{X}{K_5K_6}$. Au final, $K_1 = \dfrac{K_8}{K_5K_6}$.

Question 2 *Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera A, B et D en fonction des paramètres du système r, ρ_1, k_t, k_e, R, M, m et K_8.*

D'une part,

$$X(p) = \left(\left(X_C(p) - X(p)\right)C(p) - F_P(p)D\right)\frac{A}{p\,(Bp+1)}$$

$$X(p) = \frac{A\left(X_C(p) - X(p)\right)C(p)}{p\,(Bp+1)} - \frac{AF_P(p)D}{p\,(Bp+1)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p\,(Bp+1)} = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\,(Bp+1)} - \frac{AF_P(p)D}{p\,(Bp+1)}. \Leftrightarrow X(p)\left(\frac{p\,(Bp+1) + AC(p)}{p\,(Bp+1)}\right) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\,(Bp+1)} + \frac{AF_P(p)D}{p\,(Bp+1)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_C(p)C(p)}{p\,(Bp+1) + AC(p)} - \frac{AF_P(p)D}{p\,(Bp+1) + AC(p)}.}$$

D'autre part, $X(p) = \Omega_m(p)H_4(p)K_5K_6$, $U_m(p) = \left(X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8\right)C(p)$, $\theta_m(p) = \Omega_m(p)H_4(p)$.

$\Omega_m(p) = \left(\left(U_m(p) - \Omega_m(p)K_7\right)K_2 - F_P(p)K_9\right)H_3(p)$

$\Leftrightarrow \Omega_m(p)\left(1 + K_7K_2H_3(p)\right) = U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9$

$$X(p) = \left(U_m(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p)K_1 - \theta_m(p)K_8\right)C(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \left(\left(X_c(p)K_1 - X(p)\frac{K_8}{K_5K_6}\right)C(p)H_3(p)K_2 - F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1 + K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=\left(\left(X_c(p)-X(p)\right)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+C(p)H_3(p)K_1K_2\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_p(p)H_3(p)K_9\right)\frac{H_4(p)K_5K_6}{1+K_7K_2H_3(p)}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2H_3(p)+C(p)H_3(p)K_1K_2H_4(p)K_5K_6\right)=\left(X_c(p)C(p)H_3(p)K_1K_2-F_P(p)H_3(p)K_9\right)H_4(p)K_5K_6}.$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+K_7K_2\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{1}{(M+m)r^2\rho_1^2p}\frac{K_8}{K_5K_6}K_2\frac{1}{p}K_5K_6\right)$$

$$\Leftrightarrow X(p)\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)=\left(X_c(p)C(p)\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}\right).$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\frac{k_t}{R}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}-F_P(p)\frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2}}{\left(1+\frac{\frac{k_ek_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p}+C(p)\frac{K_8\frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2p^2+p\frac{k_ek_t}{R}+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1p^2+\frac{pk_ek_t}{Rr\rho_1}+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}\left(\frac{R}{k_ek_t}(M+m)r^2\rho_1^2p+1\right)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}\left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_ek_t}p+1\right)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}(Bp+1)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8k_t}{R}}{p\frac{k_ek_t}{R}(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}}-F_P(p)\frac{K_9}{p\frac{k_ek_t}{Rr\rho_1}(Bp+1)+C(p)\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{R}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{R}}{p(Bp+1)+C(p)K_8\frac{k_t}{R}\frac{R}{k_ek_t}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}\frac{K_8k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

$$\Leftrightarrow X(p)=X_c(p)C(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}-F_P(p)\frac{\frac{K_8}{k_e}\frac{k_e}{K_8}K_9\frac{Rr\rho_1}{k_ek_t}}{p(Bp+1)+C(p)\frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc $A=\frac{K_8}{k_e}$, $B=\frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_ek_t}$ et $D=\frac{K_9Rr\rho_1}{K_8k_t}$.