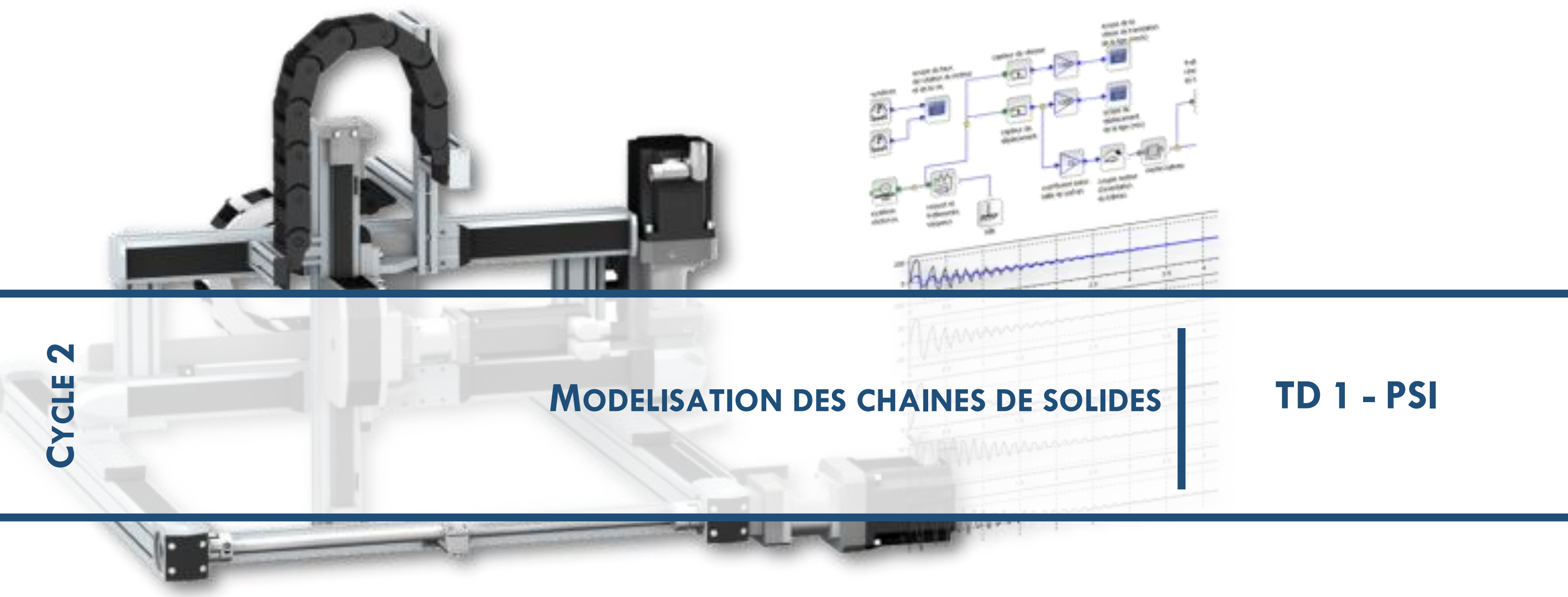


CYCLE 2

MODELISATION DES CHAINES DE SOLIDES

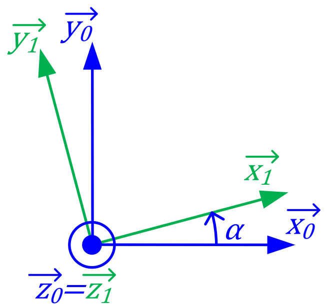
TD 1 - PSI

CHAPITRE 1

CINEMATIQUE ET STATIQUE DES CHAINES DE SOLIDES

1 EXERCICE 1: VERIN HYDRAULIQUE

1-



$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0}$$

Les bases 1 et 2 sont identiques puisque les pièces 1 et 2 sont en mouvement de translation. Ainsi, on déduit :

$$\overrightarrow{\Omega(2/1)} = \vec{0} \quad et \quad \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0}$$

2- Par définition : $\overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \left.\frac{d(\lambda(t)+b).\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1}$$

$$= \dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1} + (\lambda(t)+b).\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} \qquad \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1}}$$

3- Par définition : $\overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{V}(\mathrm{B} \in 2/0)} = \left.\frac{d(\lambda(t)+b).\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1} + (\lambda(t)+b).\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1} + (\lambda(t)+b).\left[\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{x_1}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{V}(\mathrm{B} \in 2/0)} = \dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha}(\lambda(t)+b).\overrightarrow{y_1}}$$

4-

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega(2/0)} \\ \overrightarrow{\mathrm{V}(\mathrm{B} \in 2/0)}\end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\{\mathcal{V}(2/0)\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0} \\ \dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1} + \dot{\alpha}(\lambda(t)+b).\overrightarrow{y_1}\end{matrix}\right\}}$$

5- Par définition : $\overrightarrow{\Gamma(\mathrm{B} \in 2/0)} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{\mathrm{V}(\mathrm{B}\in 2/0)}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$

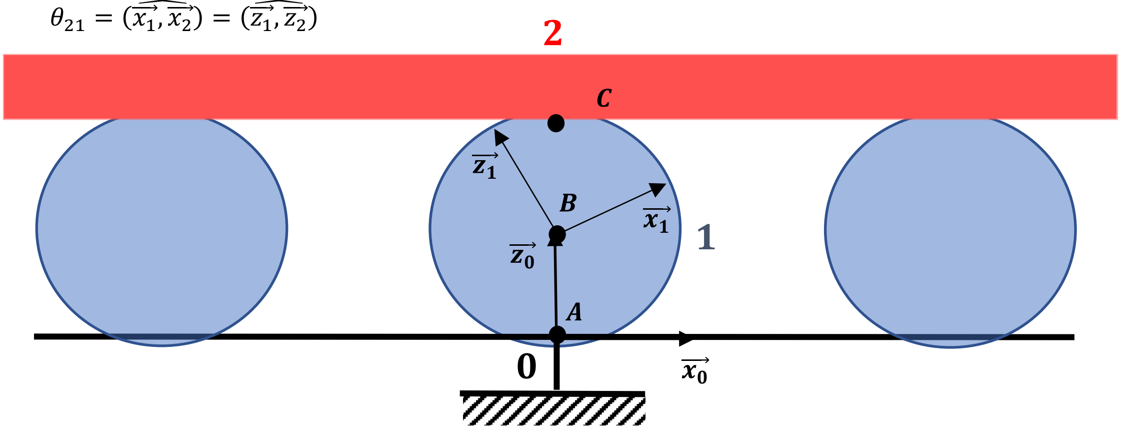
$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma(\mathrm{B} \in 2/0)} = \left.\frac{d\dot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{d\dot{\alpha}(\lambda(t)+b).\overrightarrow{y_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \ddot{\lambda}(t).\overrightarrow{x_1} + \dot{\lambda}(t)\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \left[\ddot{\alpha}(\lambda(t)+b) + \dot{\lambda}(t)\dot{\alpha}\right].\overrightarrow{y_1} - \dot{\alpha}^2(\lambda(t)+b)\,\overrightarrow{x_1}$$

2 Exercice 2 : Transport de menhir

$$\overrightarrow{AB} = R\overrightarrow{z_0}$$

$$\theta_{21} = (\widehat{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}})$$



1-

$$\vec{V}(A,1/0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(B,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -R\overrightarrow{z_0} \wedge \Omega_{10}\overrightarrow{y_0} = R\Omega_{10}\overrightarrow{x_0}$$

2-

$$\vec{V}(C,1/0) = \vec{V}(A,1/0) + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}} = -2R\overrightarrow{z_0} \wedge \Omega_{10}\overrightarrow{y_0} = 2R\Omega_{10}\overrightarrow{x_0}$$

3-

$$\Omega_{10} > 0$$

Vers la droite, sens $\overrightarrow{x_0}$

4-

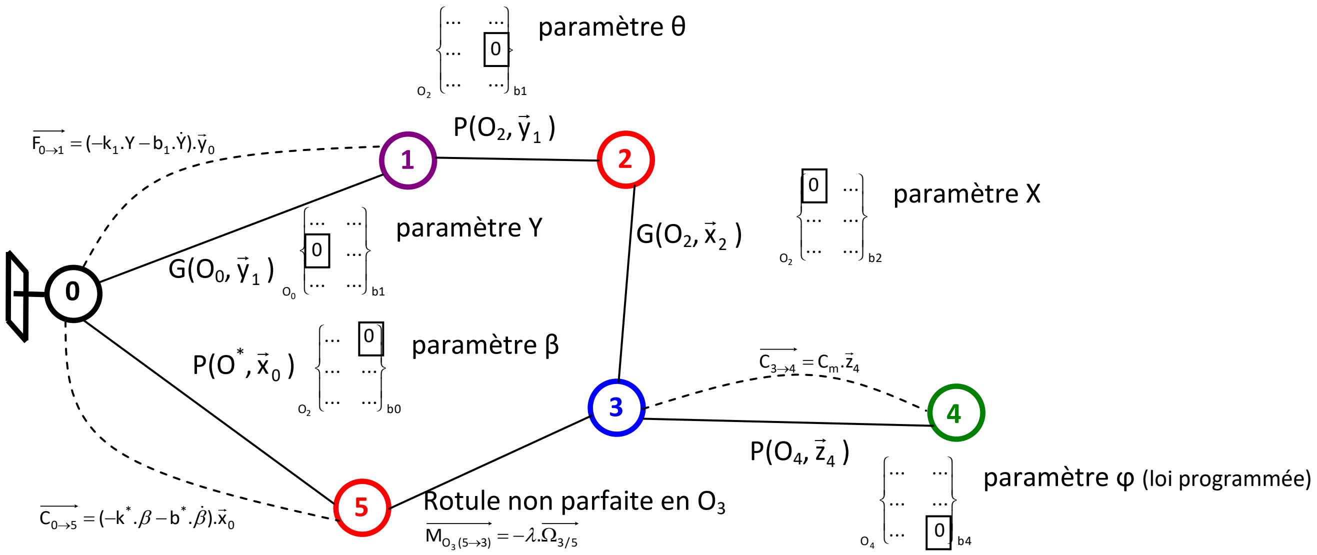
$$\vec{V}(C,2/1)=\vec{0}$$
$$\vec{V}(C,2/0)+\vec{V}(C,0/1)=\vec{0}$$
$$\vec{V}(C,2/0)=\vec{V}(C,1/0)$$
$$\vec{V}(C,2/0)=2R\Omega_{10}\vec{x_0}$$

5-

$$\Omega_{10}>0$$
$$V_M=\|\vec{V}(C,2/0)\|=2R\Omega_{10}$$
$$V_R=\|\vec{V}(B,1/0)\|=R\Omega_{10}$$
$$\frac{V_R}{V_M}=1/2$$

3 Exercice 3 : Vibreur d'olivier

Q.1. Graphe d'analyse

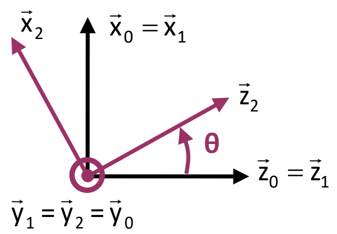


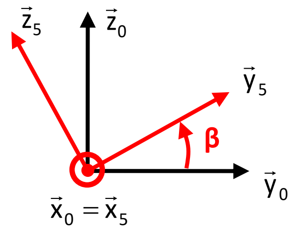
Q.2. Fermeture géométrique : $\overrightarrow{O_0O^*}+\overrightarrow{O^*O_5}=\overrightarrow{O_0O_5}$

→ $\overrightarrow{O_0O^*}+\overrightarrow{O^*O_5}=\overrightarrow{O_0O_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2G_3}+\overrightarrow{G_3O_5}$ → $d_0.\vec{x}_0+L_5.\vec{z}_5=Y.\vec{y}_1+L_1.\vec{x}_1+X.\vec{x}_2+L_3.\vec{x}_2$

En projection dans la base 0 :

$$\begin{cases} d_0 = L_1 + (X+L_3).\cos\theta \\ -L_5.\sin\beta = Y \\ L_5.\cos\beta = -(X+L_3).\sin\theta \end{cases}$$





Q.3. Hypothèse θ et β petits → $\begin{cases} d_0 = L_1 + (X+L_3) \\ -L_5.\beta = Y \\ L_5 = -(X+L_3).\theta \end{cases}$

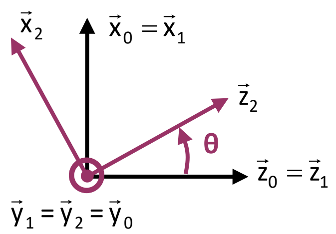
Soit $Y = -L_5.\beta$; $X = d_0 - L_1 - L_3 = cte$; $\theta = -\dfrac{L_5}{X+L_3} = cte$

Q.4. On a liaison 5/3 : liaison rotule non parfaite → 3 composantes X_{53}, Y_{53} et Z_{53} + une loi de comportement :

$\overrightarrow{M_{O_3(5\to3)}} = -\lambda.\overrightarrow{\Omega_{3/5}} = \lambda.\overrightarrow{\Omega_{5/3}}$ avec $\overrightarrow{\Omega_{5/3}} = \overrightarrow{\Omega_{5/0}} - \overrightarrow{\Omega_{0/3}} = \dot{\beta}.\vec{x}_0$

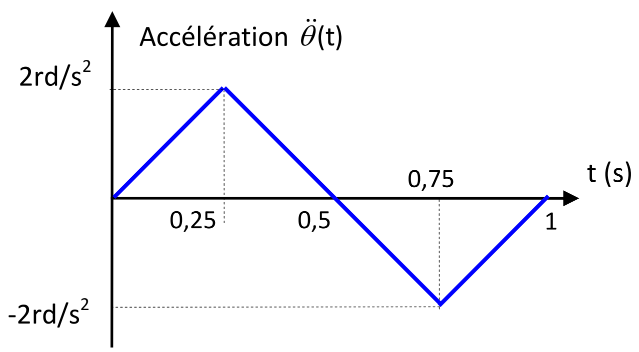
Soit $\overrightarrow{M_{O_3(5\to3)}} = \lambda.\dot{\beta}.\vec{x}_0 = \lambda.(\sin\theta.\vec{z}_2 + \cos\theta.\vec{x}_2)$

$$\rightarrow \{F_{5\to3}\} = \left\{\begin{matrix} X_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\cos\theta \\ Y_{53} & 0 \\ Z_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\sin\theta \end{matrix}\right\}_{O_3\,(b2)} .$$

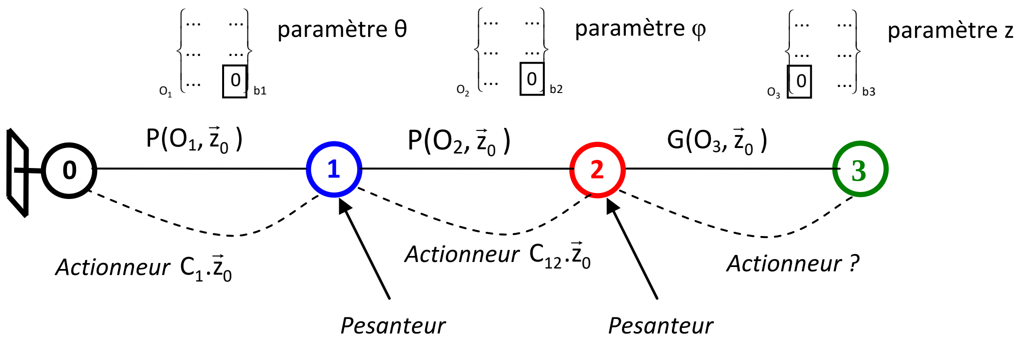


4 EXERCICE 4 : BRAS DE ROBOT A MUSCLES ARTIFICIELS

Q.1.



Q.2.



Q.3. $\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3}$ → $\overrightarrow{O_1O_3} = L.\vec{x}_1 + L.\vec{x}_2 + z.\vec{z}_0$

On projette les axes dans la base dans laquelle on exprime les coordonnées x_0, y_0 et z_0 :

→ $\overrightarrow{O_1O_3} = L.\vec{x}_1 + L.\vec{x}_2 + z.\vec{z}_0$ avec $\vec{x}_1 = \cos\theta.\vec{x}_0 + \sin\theta.\vec{y}_0$ et $\vec{x}_2 = \cos(\theta+\varphi).\vec{x}_0 + \sin(\theta+\varphi).\vec{y}_0$

→ $\overrightarrow{O_1O_3} = (L.\cos\theta + L.\cos(\theta+\varphi)).\vec{x}_0 + (L.\sin\theta + L.\sin(\theta+\varphi)).\vec{y}_0 + z.\vec{z}_0$

Ce qui permet d'écrire le modèle géométrique direct : $\begin{cases} x_0 = L.\cos\theta + L.\cos(\theta+\varphi) \\ y_0 = L.\sin\theta + L.\sin(\theta+\varphi) \\ z_0 = z \end{cases}$

Q.4. Il faut inverser le modèle géométrique direct : $\begin{cases} x_0 = L.\cos\theta + L.\cos(\theta+\varphi) \\ y_0 = L.\sin\theta + L.\sin(\theta+\varphi) \\ z_0 = z \end{cases}$

Une solution possible consiste à utiliser les transformations trigonométriques de sommes en produits (formules de Simpson : $\cos a + \cos b = 2.\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$ et $\sin a + \sin b = 2.\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$) qui permettent de transformer le modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_0 = L.\cos\theta + L.\cos(\theta+\varphi) \\ y_0 = L.\sin\theta + L.\sin(\theta+\varphi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 2.L.\cos\frac{2.\theta+\varphi}{2}.\cos\frac{-\varphi}{2} \\ y_0 = 2.L.\sin\frac{2.\theta+\varphi}{2}.\cos\frac{-\varphi}{2} \end{cases}$$

En faisant $x_0{}^2 + y_0{}^2$ pour faire apparaitre un terme en $\cos^2 A + \sin^2 B$, on obtient :

$$x_0{}^2 + y_0{}^2 = 4.L^2.\cos^2\frac{-\varphi}{2}.\left(\cos^2\frac{2.\theta+\varphi}{2} + \sin^2\frac{2.\theta+\varphi}{2}\right) = 4.L^2.\cos^2\frac{-\varphi}{2} \rightarrow \cos\frac{-\varphi}{2} = \frac{\sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}}{2.L}$$

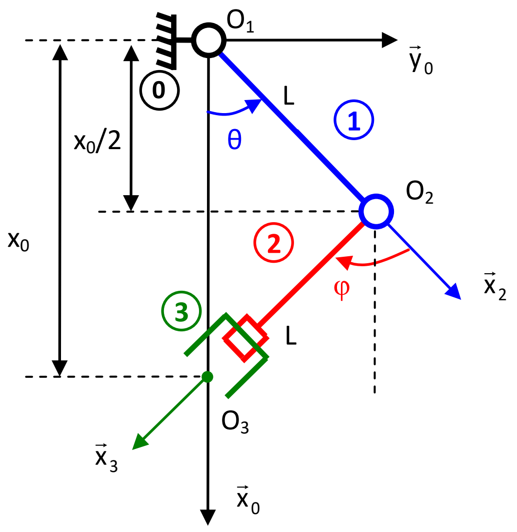
En faisant $\frac{y_0}{x_0}$, on a : $\frac{y_0}{x_0} = \tan\frac{2.\theta+\varphi}{2}$ → ce qui permet d'obtenir : $\theta = -\frac{\varphi}{2} + \arctan\frac{y_0}{x_0}$

Ce qui permet d'écrire le modèle géométrique indirect : $\begin{cases} \theta = -\frac{\varphi}{2} + \arctan\frac{y_0}{x_0} \\ \varphi = -2.\arccos\frac{\sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2}}{2.L} \\ z = z_0 \end{cases}$

Q.5. Trajectoire rectiligne suivant l'axe $(O_1,\vec{x}_0)$

Le modèle géométrique indirect devient :

$$\begin{cases} \theta = -\dfrac{\varphi}{2} \\ \varphi = -2.\arccos\dfrac{x_0}{2.L} \\ z = z_0 \end{cases}$$



Sur le schéma on voit bien que $\cos\theta = \dfrac{x_0}{2.L}$ et que

$\theta = -\dfrac{\varphi}{2}$

Course des moteurs : L < O_1O_3 < 1,5.L → L < x_0 < 1,5.L

Pour x_0 = L → $\varphi = -2.\arccos\dfrac{1}{2} = -\dfrac{2.\pi}{3}$ → $\theta = -\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

Pour x_0 = 1,5.L → $\varphi = -2.\arccos\dfrac{3}{4} \approx -82°$ → $\theta = -\dfrac{\varphi}{2} \approx 41°$

Ce qui est conforme aux débattements admissibles du C.d.C.F. pour cette phase de vie : $0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{2.\pi}{3} < \phi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

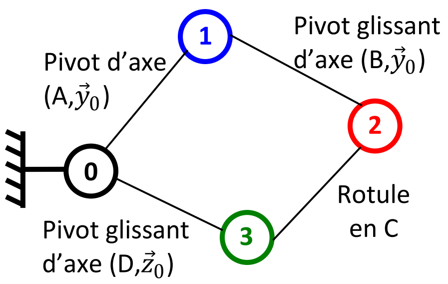
Q.6. $\begin{cases} \theta = -\dfrac{\varphi}{2} \\ \cos -\dfrac{\varphi}{2} = \cos\dfrac{x_0}{2.L} \\ z = z_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = -\dfrac{\dot{\varphi}}{2} \\ \dfrac{\dot{\varphi}}{2}\sin -\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\dot{x}_0}{2.L} \\ \dot{z} = \dot{z}_0 \end{cases}$

Q.7. Pour t = 0,75 s on a $\dot{x}_0 = 0{,}25\ m.s^{-1}$, $x_0 = 0{,}729$ m, $\dot{\theta} = -0{,}365\ rd.s^{-1}$ et θ = 0,754 rd.

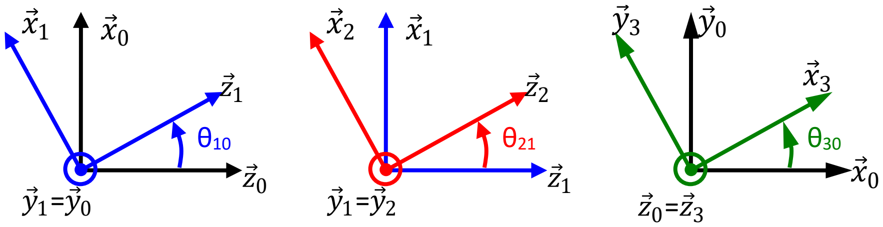
$\dfrac{\dot{\varphi}}{2}\sin -\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\dot{x}_0}{2.L} \rightarrow -\dot{\theta}.\sin\theta = \dfrac{\dot{x}_0}{2.L}$ A.N. : $0{,}365.\sin 0{,}745 = 0{,}25$ et $\dfrac{\dot{x}_0}{2.L} = \dfrac{0{,}25}{2\times 0{,}5} = 0{,}25$ → l'égalité est bien respectée.

5 <u>EXERCICE 4:</u> BROYEUR A MORTIER

Graphe de liaison du système :



Q.1. Figures géométrales :



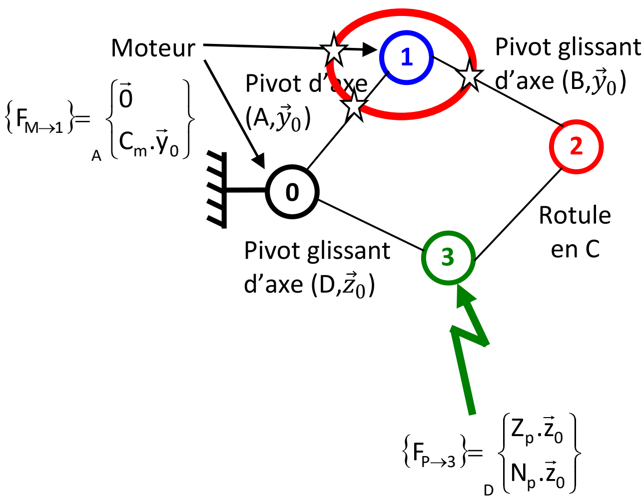
Q.2. Liaison 0-1 : Pivot d'axe $(A,\vec{y}_0)$ → $\{F_{0\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{B_0}$

Liaison 2-1 : Pivot glissant d'axe $(B,\vec{y}_0)$ → $\{F_{2\to1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{B_0}$

Liaison 3-2 : Rotule en C → $\{F_{3\to2}\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{32} & 0 \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$

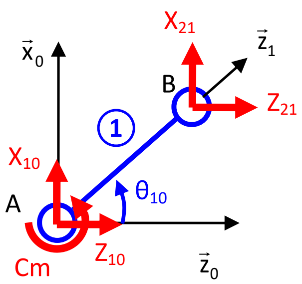
Liaison 0-3 : Pivot glissant d'axe $(D,\vec{z}_0)$ → $\{F_{0\to3}\} = {}_D\begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0}$

Q.3. On isole le solide 1 + BAME :



On applique le PFS sur le solide 1 :

→ Théorème du moment statique au point A et en projection sur l'axe $\vec{y}_0$:

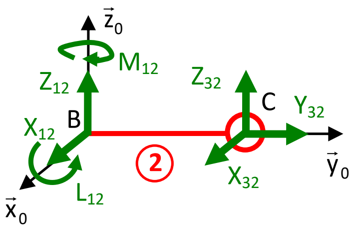


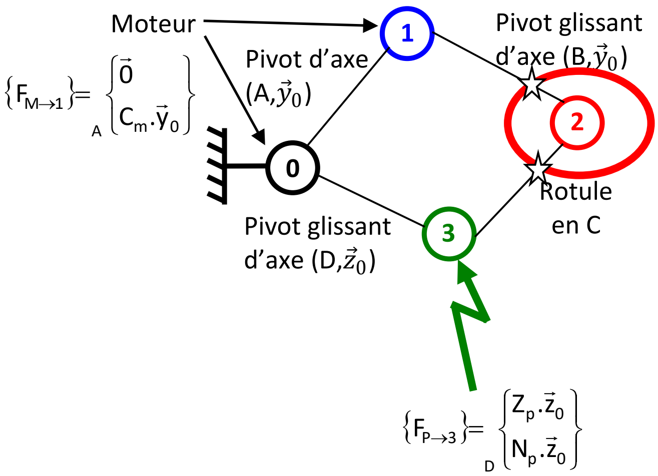
$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{2\to1}}).\vec{y}_0 + C_m = 0$$
$$(R.\vec{z}_1 \wedge (X_{21}.\vec{x}_0 + Z_{21}.\vec{z}_0)).\vec{y}_0 + C_m = 0$$

$$R.X_{21}.\cos\theta_{10} - R.Z_{21}.\sin\theta_{10} + C_m = 0$$

Q.4. On isole le solide 2 + BAME :

→ Théorème de la résultante statique :



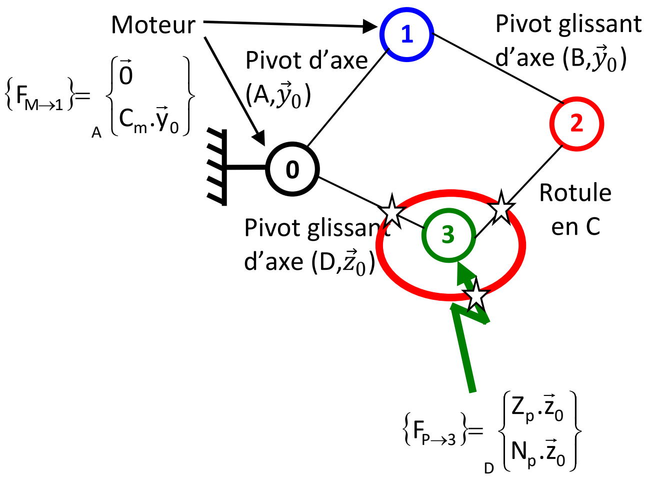


En projection dans R_0 : $\begin{cases} X_{32} + X_{12} = 0 \\ Y_{32} = 0 \\ Z_{32} + Z_{12} = 0 \end{cases}$

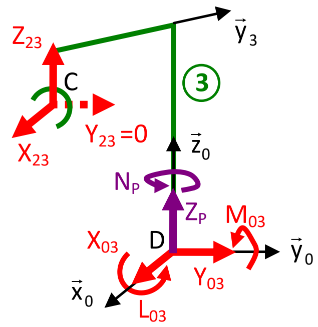
→ $\boxed{Y_{32} = 0}$

Attention le système est soumis à 2 actions mécaniques mais l'action mécanique du solide 2 sur le solide 2 n'est pas un glisseur !

Q.5. On isole le solide 3 + BAME :



On applique le PFS sur le solide 3 :



→ Théorème de la résultante statique :

$$X_{03}.\vec{x}_0 + Y_{03}.\vec{y}_0 + Z_P.\vec{z}_0 + X_{23}.\vec{x}_0 + Z_{23}.\vec{z}_0 = \vec{0}$$

→ Théorème du moment statique au point D :

$$\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{R_{2\to3}} + L_{03}.\vec{x}_0 + M_{03}.\vec{y}_0 + N_P.\vec{z}_0 = \vec{0}$$

→ Théorème de la résultante statique en projection dans R_0 : $\begin{cases} X_{03} + X_{23} = 0 \\ Y_{03} = 0 \\ Z_P + Z_{23} = 0 \end{cases}$

→ Théorème du moment statique au point D :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{R_{2\to3}} &= (-L.\vec{y}_3 + h(t).\vec{z}_0) \wedge (X_{23}.\vec{x}_0 + Z_{23}.\vec{z}_0) \\ &= -L.\vec{y}_3 \wedge X_{23}.\vec{x}_0 - L(t).\vec{y}_3 \wedge Z_{23}.\vec{z}_0 + h(t).\vec{z}_0 \wedge X_{23}.\vec{x}_0 \\ &= L.X_{23}.cos\,\theta_{30}.\vec{z}_0 - L.Z_{23}.\vec{x}_3 + h(t).X_{23}\vec{y}_0\end{aligned}$$

En projection dans R_0 : $\begin{cases} L_{03} - L.Z_{23}.cos\,\theta_{30} = 0 \\ M_{03} - L.Z_{23}.sin\,\theta_{30} + h(t).X_{23} = 0 \\ N_P + L.X_{23}.cos\,\theta_{30} = 0 \end{cases}$

$Z_P + Z_{23} = 0 \quad L_{30} - L.Z_{23}.cos\,\theta_{30} = 0 \qquad N_P + L.X_{23}.cos\,\theta_{30} = 0$

Q.6. De la question 9, on a : $R.X_{21}.cos\,\theta_{10} - R.Z_{21}.sin\,\theta_{10} + C_m = 0$.

De la question 10, on a : $\begin{cases} X_{32} = -X_{12} = X_{21} \\ Z_{32} = -Z_{12} = Z_{21} \end{cases}$.

De la question 11 on a :$-Z_P = Z_{23} \rightarrow Z_P = Z_{32}$et $X_{23} = -\frac{N_P}{L.\cos\theta_{30}} \rightarrow X_{32} = \frac{N_P}{L.\cos\theta_{30}}$

$$R.\frac{N_P}{L.\cos\theta_{30}}.\cos\theta_{10} - R.Z_P.\sin\theta_{10} + C_m = 0 \rightarrow C_m = -R.\frac{N_P}{L.\cos\theta_{30}}.\cos\theta_{10} + R.Z_P.\sin\theta_{10}$$

Q.7. En considérant que le couple de broyage nul, on a : $C_m = R.Z_P.\sin\theta_{10} \rightarrow Z_{P,min\,i} = \frac{C_m}{R}$

A.N. : $Z\frac{0,16}{3.10^{-2}}{}_{P,max}$ N > 5 N → Le critère effort minimal du cahier des charges est respecté.

6 EXERCICE 6 : RESTAURANT SOUS-MARIN

on considère la pression constante sur toute la hauteur, ?

le torseur représentatif des AM de pression sur la structure est de la forme :

$$\{\mathcal{T}_p\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{pression}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O(pression)} \end{matrix} \right\}_O$$

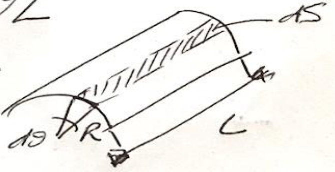
avec $\overrightarrow{R_{pression}} = \int_S p\, dS\, \vec{e_r}$

et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(pression)} \int_S \overrightarrow{OP} \wedge p\, dS\, \vec{e_r} = \vec{0}$

$\overrightarrow{OP}$ et $\vec{e_r}$ colinéaires

calcul de $\int_S p\, dS\, \vec{e_r}$ $dS = R\,d\theta\,L$

$\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{z}$

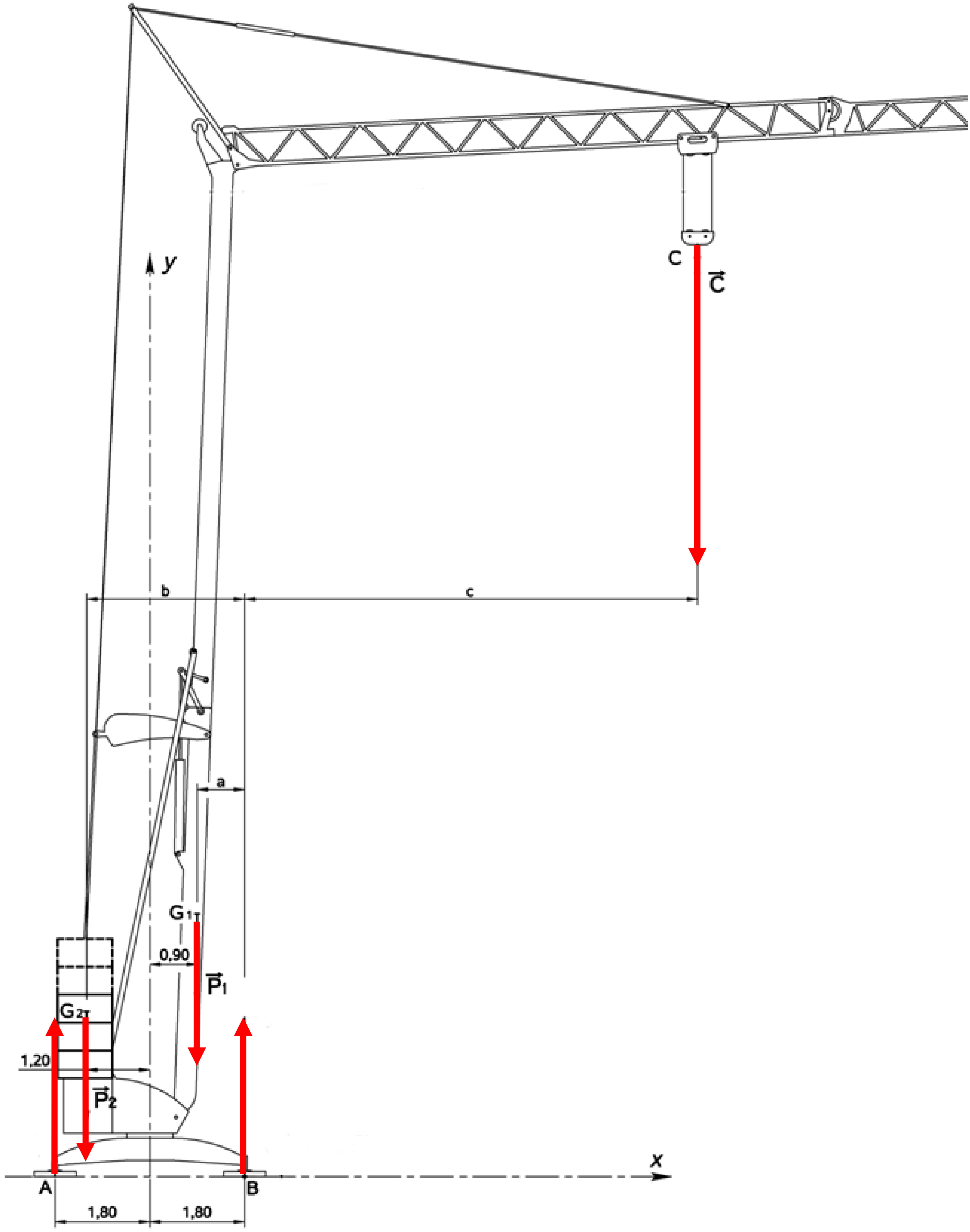


d'où en intégrant sur 0 et π → $\overrightarrow{R_{pression}} = 2RLp\,\vec{z}$

$$\boxed{\{\mathcal{T}_p\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_p} = -2RLp\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O}$$

7 EXERCICE 7 : GRUE A MONTAGE AUTOMATISE

- On isole la grue
- Bilan des actions mécaniques



- On applique le PFS

Equation des résultantes suivant y : $Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - C = 0$

Equation des moments calculée en B suivant z : $-3{,}6.Y_A + a.P_1 + b.P_2 - c.C = 0$

Résolution :

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_A = \dfrac{a.P_1 + b.P_2 - c.C}{3{,}6} \\ \\ Y_B = P_1 + P_2 + C - Y_A = P_1 + P_2 + C - \dfrac{a.P_1 + b.P_2 - c.C}{3{,}6} \end{array}}$$

2- A la limite du basculement, Y_A=0 d'ou : $Y_A = \dfrac{a.P_1 + b.P_2 - c.C}{3{,}6} = 0$

Et finalement : $$\boxed{C = \frac{a.P_1 + b.P_2}{c}}$$

3- Calculer la charge maximale soulevabe à une distance c=10,4m, lorsque la grue est chargé à l'aide de 8 blocs de béton additionnels. Comparer avec les informations données par le constructeur, commenter.

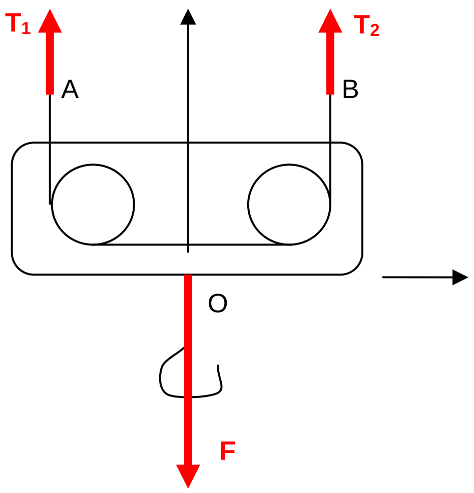
$$C = \frac{0{,}9.93200 + 3.8.900.10}{10{,}4} = 28800N$$

Ce qui correspond à une masse de $2880\,kg$, le document constructeur nous indique, que la grue équipée de 8 blocs de béton additionnels peut soulever 1800kg, en effet le constructeur à prévue une marge de sécurité afin d'éviter tout problème liés aux conditions d'utilisation (vent, etc…)

Etude Fonction levage / maintenir la charge

4-

- On isole {masse à soulever, crochet, moufle, une partie du câble}
- Bilan des actions mécaniques



Hypothèse :

La force F s'applique à égale distance de T_1 et T_2

OA = OB

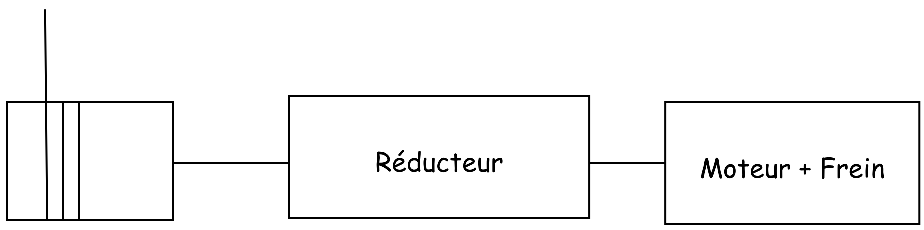
- On applique le PFS

Equation des résultantes suivant y : $T_1 + T_2 - F = 0$

Equation des moments calculée en O suivant z : $OB.T_2 - OA.T_1 = 0$

Avec OA=OB, on arrive à : $$\boxed{T_1 = T_2 = \frac{F}{2}}$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1800.10}{2} = 9000N$$



Diamètre poulie : 236,6mm

Rapport de réduction : $r = \dfrac{1}{27{,}95}$

5-Le frein est situé sur l'axe du moteur donc :

$$Cfrein = r.T.\frac{Dpoulie}{2} = \frac{1}{27{,}95}.9000.\frac{0{,}2366}{2} = 38N.m$$

6- Par définition : $p = \dfrac{N}{S} = \dfrac{N}{\pi.\left(R_e{}^2 - R_i{}^2\right)}$

7-Le couple de freinage est porté par l'axe z (direction normale à la surface)

$$C = \left|\left(\int_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}(P).dS\right)\overrightarrow{u_\theta}.\vec{z}\right|$$

$$C = \left|\left(\int_S \overrightarrow{OP} \wedge \left(-p.\vec{z} - p.f.\overrightarrow{u_\theta}\right)dS\right).\vec{z}\right|$$

$$C = \left|\left(\int_S r.\overrightarrow{u_r} \wedge \left(-p.\vec{z} - p.f.\overrightarrow{u_\theta}\right)r.dr.d\theta\right).\vec{z}\right|$$

$$C = p.f\int_{R_i}^{R_e}.r^2.dr.\int_0^{2.\pi} d\theta$$

$$C = 2.\pi.p.f.\frac{R_e{}^3 - R_i{}^3}{3}$$

$$C = 2.\pi.\frac{N}{\pi.\left(R_e{}^2 - R_i{}^2\right)}.f.\frac{R_e{}^3 - R_i{}^3}{3}$$

$$C = f.N.\frac{2.\left(R_e^{\ 3} - R_i^{\ 3}\right)}{3.\left(R_e^{\ 2} - R_i^{\ 2}\right)} \qquad \text{d'ou} \qquad R_{eq} = \frac{2.\left(R_e^{\ 3} - R_i^{\ 3}\right)}{3.\left(R_e^{\ 2} - R_i^{\ 2}\right)}$$

8- Il y a deux disques sur lesquels pris en « sandwich » par deux garnitures, il y'a donc un total de 4 surfaces frottantes d'où : $C_{frein} = 4.C$

$$C_{frein} = 4.f.N.\frac{2.\left(R_e^{\ 3} - R_i^{\ 3}\right)}{3.\left(R_e^{\ 2} - R_i^{\ 2}\right)}$$

9-

$$C_{frein} = 4.f.N.\frac{2.\left(R_e^{\ 3} - R_i^{\ 3}\right)}{3.\left(R_e^{\ 2} - R_i^{\ 2}\right)} \qquad \text{donne} \qquad N = C_{frein}.\frac{3.\left(R_e^{\ 2} - R_i^{\ 2}\right)}{8.f.\left(R_e^{\ 3} - R_i^{\ 3}\right)}$$

$$N = 38.\frac{3.\left(0{,}115^2 - 0{,}08^2\right)}{8.0{,}25.\left(0{,}115^3 - 0{,}08^3\right)} = 386N$$

Il y'a trois ressorts hélicoïdaux montées en parallèles, qui permettent de fournir l'effort presseur N, d'ou :

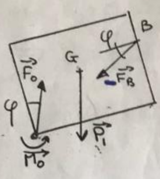
$N = 3.F_{ressort}$ et finalement $F_{ressort} = \dfrac{1}{3}38.\dfrac{3.\left(0{,}115^2 - 0{,}08^2\right)}{8.0{,}25.\left(0{,}115^3 - 0{,}08^3\right)} = 128{,}5N$

8 EXERCICE 8 : CONVOYAGE SUR TAPIS ROULANT

1 – Isolement de ①

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to1}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} \\ M_0\vec{z}\end{matrix}\right\}_O$$

$$\left\{\mathcal{T}_{2\to1}\right\} = \left\{\begin{matrix} -X_B\vec{x} - Y_B\vec{y} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$$



$$\left\{\mathcal{T}_{pesanteur\to1}\right\} = \left\{\begin{matrix} -mg\sin\alpha\,\vec{x} - mg\cos\alpha\,\vec{y} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G$$

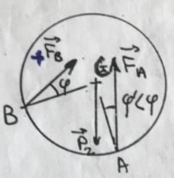
PFS $\Rightarrow$ $\sum\vec{F}.\vec{x} = X_0 - X_B - mg\sin\alpha = 0$ (a)

$\sum\vec{F}.\vec{y} = Y_0 - Y_B - mg\cos\alpha = 0$ (b)

$\sum\vec{M_0}.\vec{z} = M_0 - \ell Y_B + r X_B + mg\sin\alpha\frac{h}{2} - mg\cos\alpha.\frac{\ell}{2} = 0$ (c)

Isolement de ②

$$\left\{\mathcal{T}_{0\to2}\right\} = \left\{\begin{matrix} X_A\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$$



$$\left\{\mathcal{T}_{1\to2}\right\} = \left\{\begin{matrix} +X_B\vec{x} + Y_B\vec{y} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$$

$$\left\{\mathcal{T}_{pesanteur\to2}\right\} = \left\{\begin{matrix} -Mg\sin\alpha\,\vec{x} - Mg\cos\alpha\,\vec{y} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C$$

PFS $\Rightarrow$ $\sum\vec{F}.\vec{x} = X_A + X_B - Mg\sin\alpha = 0$ (d)

$\sum\vec{F}.\vec{y} = Y_A + Y_B - Mg\cos\alpha = 0$ (e)

$\sum\vec{M_C}.\vec{z} = -r Y_B + r X_A = 0$ (f)

2 – $\begin{cases} X_0 = f\,Y_0 & (g) \\ Y_B = f\,X_B & (h) \end{cases}$

3 – (f) et (d) $\Rightarrow + Y_B + X_B = Mg\sin\alpha$; (h) $\Big\}$ $X_B(1+f) = Mg\sin\alpha$

2/2

d'où $X_B = \dfrac{Mg\sin\alpha}{1+f}$

(a) et (g) $\Rightarrow f\,Y_0 - X_B - mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow Y_0 = \dfrac{1}{f}\left[\dfrac{Mg\sin\alpha}{1+f} + mg\sin\alpha\right]$

(b) et (h) $\Rightarrow Y_0 - f\,X_B - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow Y_0 = f\,\dfrac{Mg\sin\alpha}{1+f} + mg\cos\alpha$

d'où $\dfrac{M\cancel{g}\sin\alpha}{1+f} + m\cancel{g}\sin\alpha = f^2\,\dfrac{M\cancel{g}\sin\alpha}{1+f} + f\,m\cancel{g}\cos\alpha$

$$\sin\alpha\left(m + \frac{M}{1+f} - f^2\frac{M}{1+f}\right) = f\,m\cos\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{f}{1 + \dfrac{M(1-f^2)}{m(1+f)}}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{f}{1 + \dfrac{M}{m}(1-f)}}$$

Relation établie à la limite du glissement, donc pour α maximum

A.N.: $tg\,\alpha = \dfrac{0,2}{1 + \frac{12}{4}(1-0,2)} \Rightarrow \alpha = 3,4°$

4 –

$X_B = \dfrac{Mg\sin\alpha}{1+f} = \dfrac{12\times10\sin\alpha}{1+0,2} = 5,87\ N$

$Y_B = f\,X_B = 0,2\times5,87 = 1,17\ N$

$X_A = Y_B = 1,17\ N$

$Y_A = -Y_B + Mg\cos\alpha = -1,17 + 12\times10\cos\alpha = 118,62\ N$

$X_0 = X_B + mg\sin\alpha = 5,87 + 4\times10\sin\alpha = 8,22\ N$

$Y_0 = Y_B + mg\cos\alpha = 1,17 + 4\times10\cos\alpha = 41,1\ N$

$M_0 = 100\times1,17 - 100\times5,87 - 4\times10\sin\alpha\,\dfrac{150}{2} + 4\times10\cos\alpha\times\dfrac{100}{2} = 1350\ mmN$

$= 1,35\ mN$

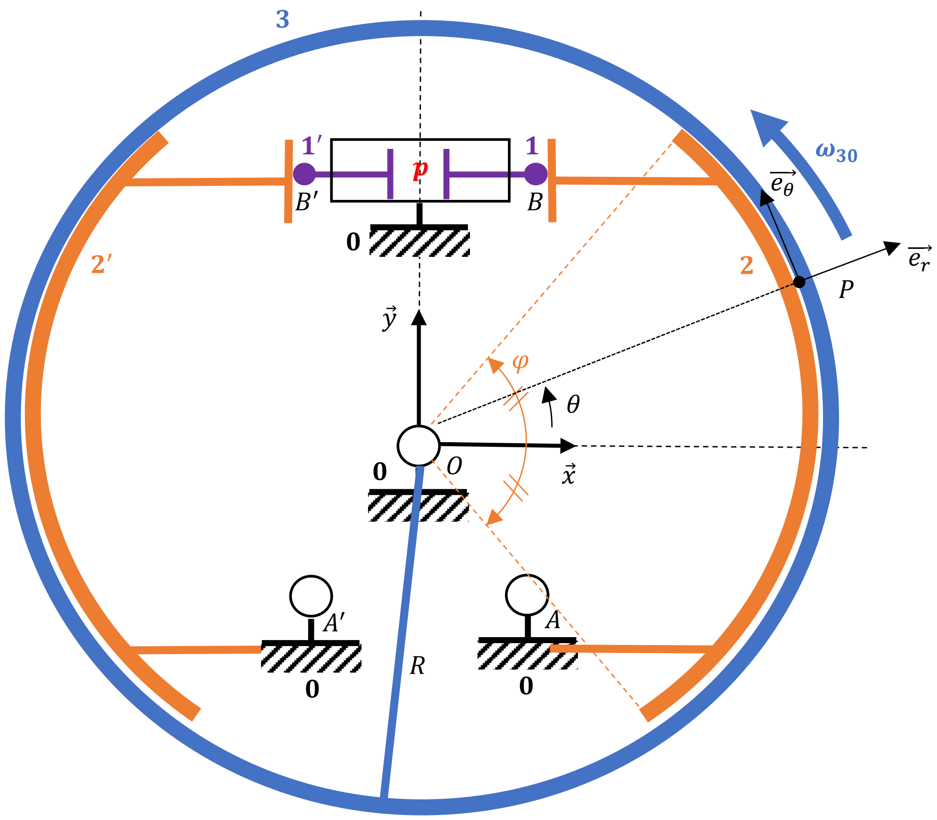
5 – Condition de non basculement de ① sur ⓪ :

$M_0 > 0 \quad (\vec{M_0} = +1,35\,\vec{z})$

Condition de roulement sans glissement de ② sur ⓪

$\varphi' < \varphi$ avec $tg\,\varphi' = \dfrac{X_A}{Y_A} \Rightarrow X_A < f\,Y_A$

9 EXERCICE 9 : FREIN A TAMBOUR



Question 1: Déterminer l'effort presseur $\vec{F}$ au contact ponctuel en B entre 1 et 2 en fonction de r et p en partant du principe que l'effort issu de la pression sur le piston se transmet intégralement à ce contact

On peut dire que :

$$\vec{F} = pS\vec{x} = p\pi r^2\vec{x}$$

Question 2: En déduire le torseur $\{T_{12}\}$ de l'action de 1 sur 2 en B

$$\{T_{12}\} = \begin{Bmatrix} p\pi r^2\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} p\pi r^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$

Question 3: Donner le torseur $\{T_{02}\}$ de l'action de liaison en A de 0 sur 2

$$\{T_{02}\} = \begin{Bmatrix} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$

Question 4: Exprimer l'élément de surface dS du problème traité

$$dS = Rd\theta dz$$

Question 5: Donner l'expression de l'élément de force $\overrightarrow{dR_{32}}$ au contact entre 2 et 3 en P

$$\overrightarrow{dR_{32}} = -p'dS\overrightarrow{e_r} + fp'dS\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$
$$\overrightarrow{dR_{32}} = -p'(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y})dS + fp'(-\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y})dS$$
$$\overrightarrow{dR_{32}} = -p'\cos\theta\,\vec{x}dS - p'\sin\theta\,\vec{y}dS - fp'\sin\theta\,\vec{x}dS + fp'\cos\theta\,\vec{y}dS$$
$$\overrightarrow{dR_{32}} = p'(-\vec{x} + f\vec{y})\cos\theta\,dS - p'(\vec{y} + f\vec{x})\sin\theta\,dS$$
$$\overrightarrow{dR_{32}} = Rp'(-\vec{x} + f\vec{y})\cos\theta\,d\theta dz - Rp'(\vec{y} + f\vec{x})\sin\theta\,d\theta dz$$

Question 6: Déterminer la résultante $\overrightarrow{R_{32}}$ de l'action de 3 sur 2

$$\overrightarrow{R_{32}} = \int_S \overrightarrow{dR_{32}} = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} Rp'(-\vec{x} + f\vec{y})\cos\theta\,d\theta dz - \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} Rp'(\vec{y} + f\vec{x})\sin\theta\,d\theta dz$$
$$\overrightarrow{R_{32}} = Rp'(-\vec{x} + f\vec{y})\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dz - Rp'(\vec{y} + f\vec{x})\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dz$$
$$\overrightarrow{R_{32}} = Rp'(-\vec{x} + f\vec{y})[\sin\theta]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}e - Rp'(\vec{y} + f\vec{x})[-\cos\theta]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}e$$
$$\overrightarrow{R_{32}} = Rp'(-\vec{x} + f\vec{y})2\sin\frac{\varphi}{2}e = Rp'2\sin\frac{\varphi}{2}e\begin{bmatrix}-1\\ f\\ 0\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}}$$

Question 7: Donner l'expression de l'élément de moment en O $\overrightarrow{dM_{32}^O}$ au contact entre 2 et 3 en P

$$\overrightarrow{dR_{32}} = -p'dS\overrightarrow{e_r} + fp'dS\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{32}} = (R\overrightarrow{e_r} + z\vec{z}) \wedge (-p'dS\overrightarrow{e_r} + fp'dS\overrightarrow{e_\theta})$$
$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = R\overrightarrow{e_r} \wedge (-p'dS\overrightarrow{e_r} + fp'dS\overrightarrow{e_\theta}) + z\vec{z} \wedge (-p'dS\overrightarrow{e_r} + fp'dS\overrightarrow{e_\theta})$$
$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = R\overrightarrow{e_r} \wedge fp'dS\overrightarrow{e_\theta} + z\vec{z} \wedge -p'dS\overrightarrow{e_r} + z\vec{z} \wedge fp'dS\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = Rfp'dS\vec{z} - zp'dS\overrightarrow{e_\theta} - zfp'dS\overrightarrow{e_r}$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}$$
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$

$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = Rfp'dS\vec{z} - zp'dS(-\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}) - zfp'dS(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y})$$
$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = Rfp'dS\vec{z} + zp'dS\sin\theta\,\vec{x} - zp'dS\cos\theta\,\vec{y} - zfp'dS\cos\theta\,\vec{x} - zfp'dS\sin\theta\,\vec{y}$$
$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = Rfp'dS\vec{z} + (zp'dS\sin\theta\,\vec{x} - zfp'dS\sin\theta\,\vec{y}) - (zp'dS\cos\theta\,\vec{y} + zfp'dS\cos\theta\,\vec{x})$$
$$\overrightarrow{dM_{32}} = Rfp'dS\vec{z} + zp'dS(\vec{x} - f\vec{y})\sin\theta - zp'dS(\vec{y} + f\vec{x})\cos\theta$$

$$\overrightarrow{dM_{32}^O} = R^2fp'd\theta dz\vec{z} + Rzp'(\vec{x} - f\vec{y})\sin\theta\,d\theta dz - Rzp'(\vec{y} + f\vec{x})\cos\theta\,d\theta dz$$

Question 8: Déterminer le moment en O $\overrightarrow{M_{32}^O}$ de l'action de 3 sur 2

$$\overrightarrow{M_{32}^O} = \int_S \overrightarrow{dM_{32}^O}$$

$$\overrightarrow{M_{32}^O} = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} R^2 f p' d\theta dz \vec{z} + \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} Rzp'(\vec{x} - f\vec{y})\sin\theta\, d\theta dz - \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} Rzp'(\vec{y} + f\vec{x})\cos\theta\, d\theta dz$$

$$\overrightarrow{M_{32}^O} = R^2 f p' \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} d\theta \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} dz\, \vec{z} + Rp'(\vec{x} - f\vec{y}) \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} zdz - Rp'(\vec{y} + f\vec{x}) \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} zdz$$

$$\overrightarrow{M_{32}^O} = R^2 f p' \varphi e \vec{z} + Rp'(\vec{x} - f\vec{y})[-\cos\theta]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} zdz - Rp'(\vec{y} + f\vec{x})[\sin\theta]_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$\overrightarrow{M_{32}^O} = R^2 f p' \varphi e \vec{z}$$

Question 9: Donner finalement le torseur $\{T_{32}\}$ de l'action au contact entre 2 et 3 en O

$$\{T_{32}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{32}} \\ \overrightarrow{M_{32}^O} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} Rp'(-\vec{x} + f\vec{y})2\sin\frac{\varphi}{2}e \\ R^2 f p' \varphi e \vec{z} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -2p'e\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 2p'ef\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & R^2 f p' \varphi e \end{Bmatrix}_B^{\mathfrak{B}}$$

Question 10: Que vaut le couple de freinage C_f du frein à tambour composé de deux segments

$$C_f = 2R^2 f p' \varphi e$$

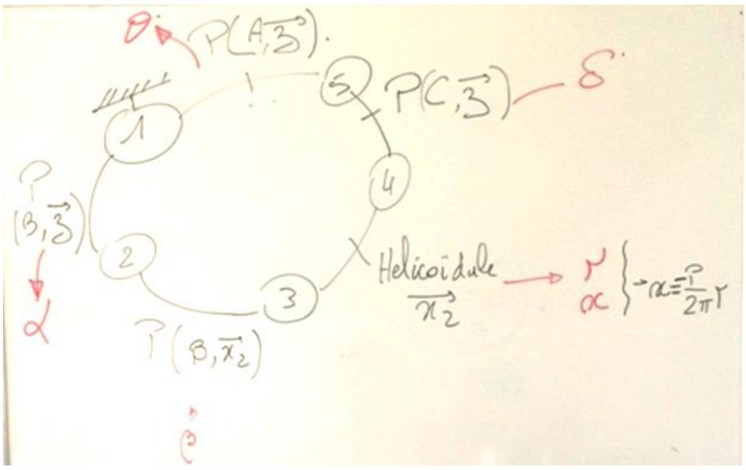
Question 11: Sur quels paramètres peut-on jouer pour augmenter le couple de freinage d'un frein à tambour

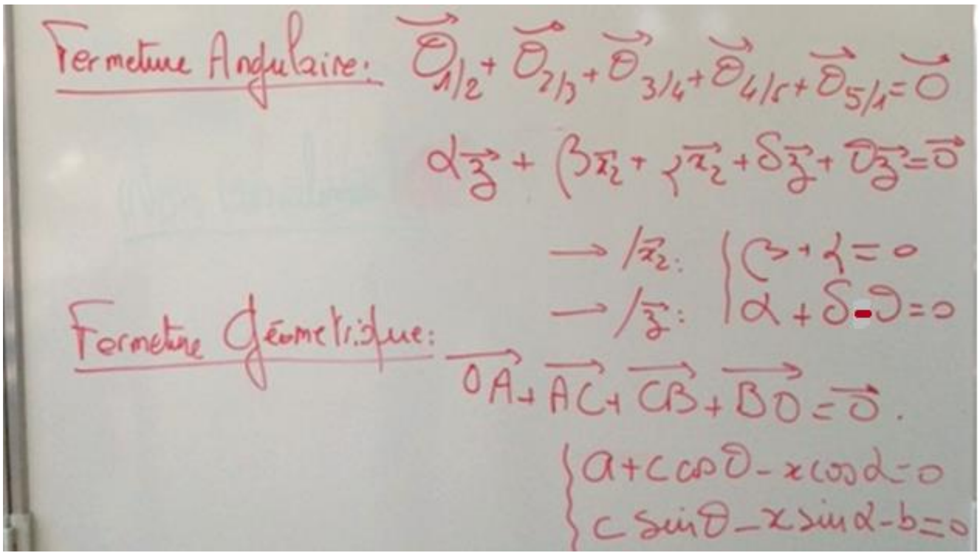
On peut :

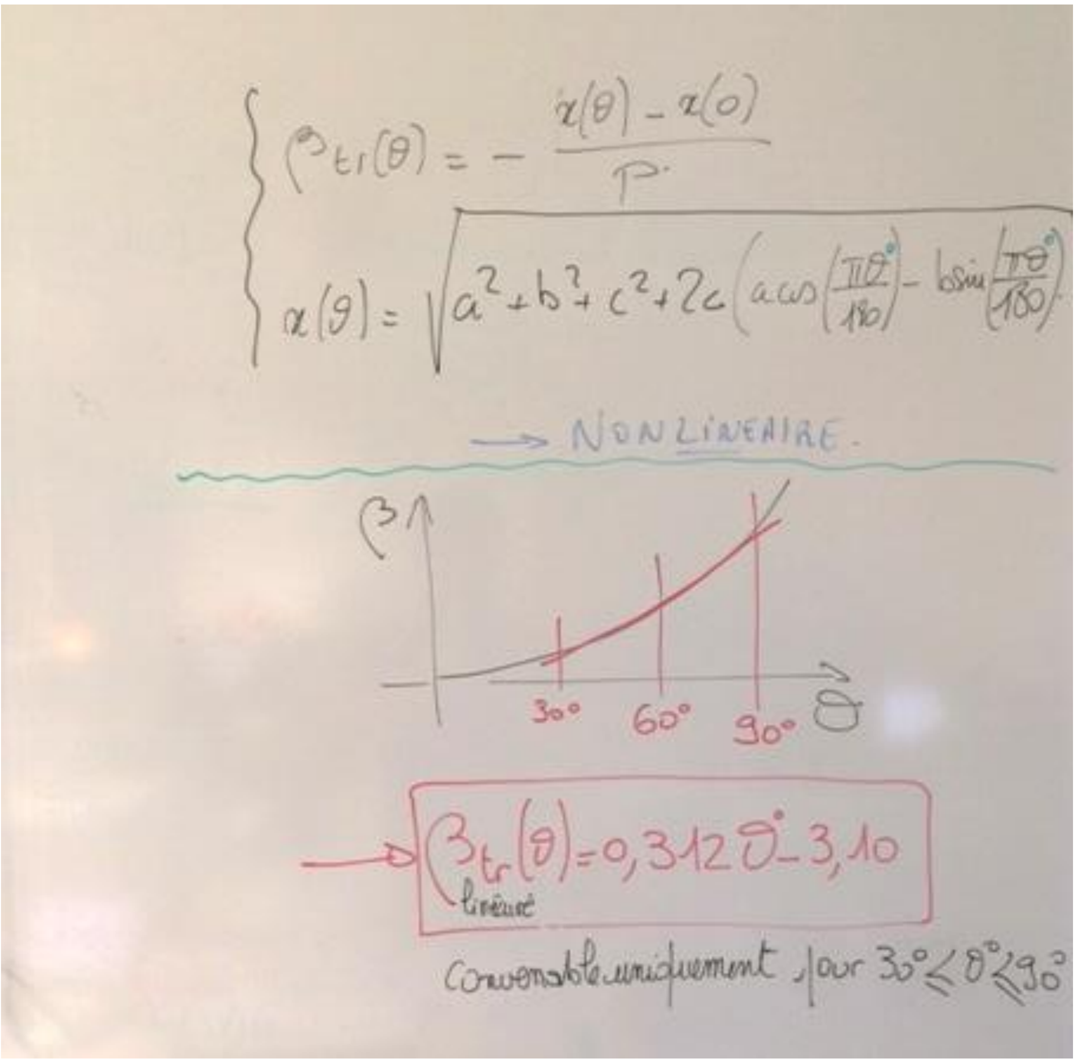
- Augmenter le rayon au contact, évolution en carré
- Augmenter le coefficient de frottement
- Augmenter la pression au contact p' qui sera reliée à p par un PFS
- Augmenter l'angle de la zone de contact
- Augmenter l'épaisseur de la zone de contact

10 EXERCICE 10 : LE BRAS MAXPID ELEMENTS DE CORRECTION

Partie Cinématique :




Fermeture Angulaire: $\vec{\Omega}_{1/2}+\vec{\Omega}_{2/3}+\vec{\Omega}_{3/4}+\vec{\Omega}_{4/5}+\vec{\Omega}_{5/1}=\vec{0}$
$\alpha\vec{z}+\beta\vec{x_2}+\gamma\vec{x_2}+\delta\vec{z}+\theta\vec{z}=\vec{0}$
$\rightarrow/\vec{x_2}$: $\beta+\gamma=0$
$\rightarrow/\vec{z}$: $\alpha+\delta-\theta=0$
Fermeture Géométrique:
$\vec{OA}+\vec{AC}+\vec{CB}+\vec{BO}=\vec{0}$.
$a+c\cos\theta-x\cos\alpha=0$
$c\sin\theta-x\sin\alpha-b=0$


$\beta_{tr}(\theta)=-\frac{x(\theta)-x(0)}{p}$
$x(\theta)=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2c\left(a\cos\left(\frac{\pi\theta}{180}\right)-b\sin\left(\frac{\pi\theta}{180}\right)\right)}$
→ NON LINEAIRE.
β
30°
60°
90°
θ
$\boxed{\beta_{tr\,\text{linéarisé}}(\theta)=0{,}312\,\theta°-3{,}10}$
Convenable uniquement pour $30°\leq\theta°\leq90°$