

ENTRAINEMENTS SUPPLEMENTAIRES

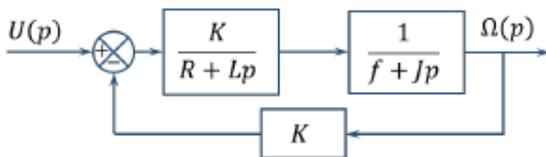
TD - PSI

Voici un panel de petits exos pris dans des livres (inspirés de sujet de concours)  
 Je vous conseille d'en faire régulièrement (par exemple 4 ou 5 par semaines) pour vous entraîner.  
 Je remercie Xavier Pessoles (professeur CPGE PSI\*) à l'origine de cette compilation de ressources.

**Exercice 192 – Fonctions de transfert\***

**B2-07**

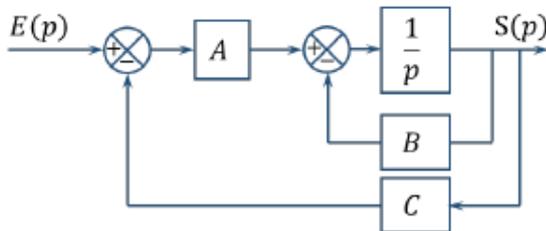
Soit le schéma-blocs suivant.



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Soit le schéma-blocs suivant.



**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Indications

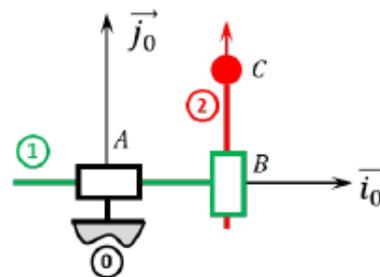
1.  $K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}$ ,  $\omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}$ ,  $\xi_{BO} = \frac{RJ + Lf}{2\sqrt{LJ}Rf}$ .
2.  $K_{BF} = \frac{K^2}{K^2 + Rf}$ ,  $\xi_{BF} = \frac{RJ + Lf}{2LJ\sqrt{Rf + K^2}}$ .
3.  $K_{BO} = \frac{AC}{B}$  et  $\tau_{BO} = \frac{1}{B}$ .
4.  $K_{BF} = \frac{AC}{B + AC}$  et  $\tau_{BF} = \frac{1}{B + AC}$ .

Corrigé voir ??.

**Exercice 190 – Mouvement Π – \***

**B2-12**

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t)\vec{i}_0$  et  $\vec{BC} = \mu(t)\vec{j}_0$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\lambda = 10\text{ mm}$  et  $\mu = 10\text{ mm}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\lambda = 20\text{ mm}$  et  $\mu = 10\text{ mm}$ .

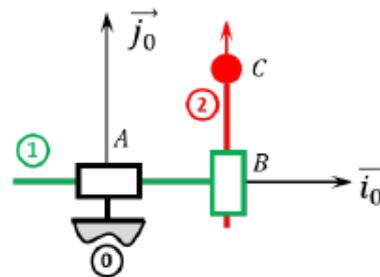
Corrigé voir ??.

**Exercice 189 – Mouvement Π – \***

**C2-05**

**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t)\vec{i}_0$  et  $\vec{BC} = \mu(t)\vec{j}_0$ .



**Question 1** Quel est le mouvement de 2 par rapport à 0.

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On souhaite que le point C réalise un cercle de centre A et de rayon  $R = 10\text{ cm}$  à la vitesse  $v = 0,01\text{ m s}^{-1}$ .

**Question 3** Donner la relation liant  $\theta(t)$ ,  $v$  et  $R$ .

Par ailleurs la vitesse du point C est donnée par  $\vec{V}(C,2/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

**Question 4** Donner les expressions de  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de  $v$ ,  $R$  et du temps.

**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  et la trajectoire générée.

Indications :

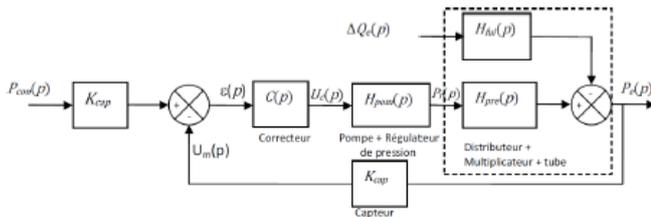
1. .
2.  $x_C(t) = \lambda(t)$  et  $y_C(t) = \mu(t)$ .
3.  $\theta(t) = \frac{v}{R} t$ .
4.  $\lambda(t) = R \cos\left(\frac{v}{R} t\right)$ ,  $\mu(t) = R \sin\left(\frac{v}{R} t\right)$ .
5. .

Corrigé voir ??.

**Exercice 188 – Banc hydraulique \***

C2-03

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



- $P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)
- $P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa)
- $U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V)
- $P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa)
- $\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )
- $U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes :  $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{fui}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \times 10^{10} \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$ ;  $T_1 = 10\text{ s}$ .
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{pom} = 1,234 \times 10^7 \text{ Pa/V}$ ;  $T_2 = 5\text{ s}$ .

- Le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{cap} = 2,5 \times 10^{-8} \text{ V/Pa}$ .

La pression de consigne est de  $P_{con} = 800\text{ bars}$  et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ .

Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40\text{ s}$
Précision :	erreur statique $< 5\%$ soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\varepsilon_{con} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\varepsilon_{pert} < 40\text{ bars}$
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \cdot \omega_{0\text{dB}} = 3$  où  $\omega_{0\text{dB}}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5 %,
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5 % si le dépassement est nul ou inférieur à 5 %.

On envisage tout d'abord un correcteur de type proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Question 1** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{con}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{con}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

**Question 2** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{con}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 3** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$  la fonction de transfert en régulation définie par :  $H_{pert}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$ . En déduire, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{pert}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

**Question 4** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{pert}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Éléments de corrigé :

1.  $\varepsilon_{con} \% = \frac{1}{1 + K_p K_m K_{pom} K_{cap}}$  ;
2.  $K_p > 19$  ;
3.  $\varepsilon_{pert} = \Delta Q_e \frac{K_f}{1 + K_{cap} K_p K_m K_{pom}}$  ;
4.  $K_p > -1$ .
5.  $K_p < 0,125$ . Il est impossible de vérifier les trois conditions avec un correcteur proportionnel.

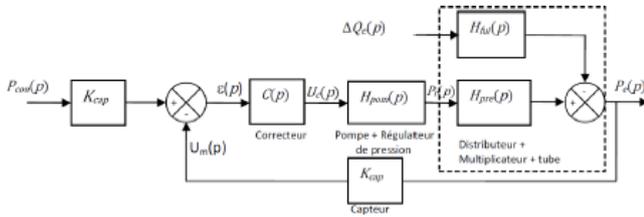
Corrigé voir 188.

**Exercice 187 – Banc hydraulique \***

**C2-03**

**Pas de corrigé pour cet exercice.**

Pour limiter l'erreur statique due aux fuites, on envisage d'asservir la pression d'eau dans le tube. La pression d'eau à l'intérieur du tube est mesurée par un capteur de pression.



- $P_{con}(p)$  : pression de consigne d'eau dans le tube (Pa)
- $P_e(p)$  : pression d'eau dans le tube (Pa)
- $U_c(p)$  : tension de commande du régulateur de pression (V)
- $P_r(p)$  : pression d'huile régulée (Pa)
- $\Delta Q_e(p)$  : débit de fuite ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )
- $U_m(p)$  : tension de mesure du capteur (V)

Hypothèses :

- L'ensemble de mise sous pression tube + distributeur + multiplicateur de pression est défini par les transmittances suivantes :  $H_{pre}(p) = \frac{K_m}{1 + T_1 p}$  et  $H_{fuit}(p) = \frac{K_f}{1 + T_1 p}$  avec  $K_m = 3,24$ ;  $K_f = 2,55 \times 10^{10} Pa \cdot m^{-3} \cdot s$ ;  $T_1 = 10 s$ .
- L'ensemble pompe+régulateur de pression est modélisé par la fonction de transfert :  $H_{pom}(p) = \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p}$  avec  $K_{pom} = 1,234 \times 10^7 Pa/V$ ;  $T_2 = 5 s$ .
- Le capteur est modélisé par un gain pur :  $K_{cap} = 2,5 \times 10^{-8} V/Pa$ .

La pression de consigne est de  $P_{con} = 800$  bars et les débits de fuite sont estimés à  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} m^3/s$ .

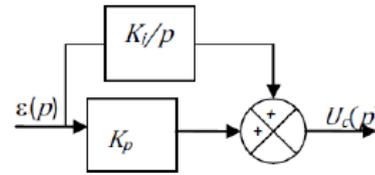
Le cahier des charges concernant le réglage de la pression de test est le suivant.

Stabilité :	marge de phase de $60^\circ$ marge de gain de 12 dB
Rapidité :	temps d'établissement $t_e < 40 s$
Précision :	erreur statique $< 5\%$ soit pour une consigne de 800 bars : erreur statique due à la consigne : $\epsilon_{con} < 5\%$ erreur statique due à la perturbation $\epsilon_{pert} < 40$ bars
Amortissement :	pas de dépassement

Dans le cas d'un système bouclé convenablement amorti, on pourra utiliser, sans aucune justification, la relation :  $t_e \cdot \omega_{0dB} = 3$  où  $\omega_{0dB}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB en boucle ouverte et  $t_e$  le temps d'établissement en boucle fermée vis-à-vis d'un échelon de consigne :

- $t_e = t_m$ , temps du 1er maximum si le dépassement est supérieur à 5%,
- $t_e = t_R$ , temps de réponse à 5% si le dépassement est nul ou inférieur à 5%.

On se propose de corriger le système avec le correcteur défini sur le schéma bloc ci-dessous.



**Question 1** Déterminer la fonction de transfert  $C(p)$  de ce correcteur.

**Question 2** Tracer l'allure de son diagramme de Bode en fonction des coefficients  $K_i$  et  $K_p$ .

**Question 3** Quelle est l'influence d'un tel correcteur sur la précision et la stabilité? Justifier.

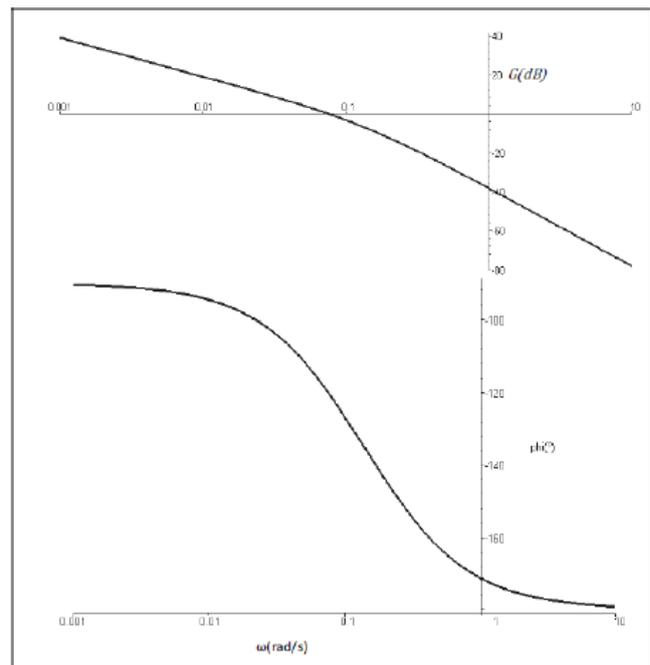
**Question 4** Quelle valeur faut-il donner à  $\omega_{0dB}$  pour répondre au critère de rapidité du cahier des charges?

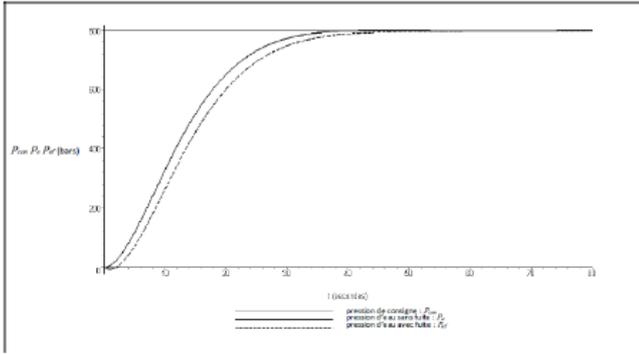
**Question 5** Déterminer alors le rapport  $T = \frac{K_p}{K_i}$  pour obtenir la marge de phase spécifiée dans le cahier des charges.

**Question 6** En déduire les valeurs de  $K_i$  et  $K_p$  qui permettent de régler rapidité et marge de phase.

On donne les diagrammes de Bode en gain et en phase de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec le correcteur Proportionnel Intégral déterminé précédemment. On donne sa réponse temporelle avec et sans débit de fuite pour une pression de consigne d'eau de 800 bars.

**Question 7** La réponse du système est-elle satisfaisante au regard du cahier des charges? Justifier.



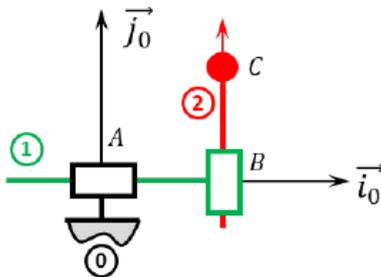


Corrigé voir 188.

**Exercice 186 – Mouvement Π – \***

**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .



**Question 1** Déterminer  $\vec{V}(C, 2/0)$  par dérivation vectorielle ou par composition.

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

**Question 3** Déterminer  $\vec{\Gamma}(C, 2/0)$ .

Indications :

- $\vec{V}(C, 2/0) = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0$ .
- $\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$ .
- $\vec{\Gamma}(C, 2/0) = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0$ .

Corrigé voir ??.

**Exercice 185 – Mouvement Π – \***

**B2-14**

**B2-15**

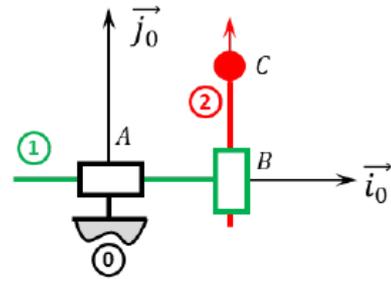
**C1-05**

Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$  et  $\vec{BC} = \mu(t) \vec{j}_0$ .  $G_1 = B$  désigne le centre d'inertie de 1, et  $m_1$  sa masse.  $G_2 = C$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $m_2$  sa masse.

Un vérin électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un vérin électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g \vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les efforts que doivent développer chacun des vérins pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir ??.

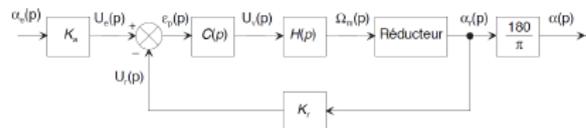
**Exercice 184 – Palettisation – Stabilité\***

**C2-03**

Pas de corrigé pour cet exercice.

Une boucle de position est représentée ci-dessous. On admet que :

- $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_v(p)} = \frac{30}{1 + 5 \times 10^{-3} p}$  ;
- $K_r = 4 \text{ V rad}^{-1}$  : gain du capteur de position ;
- $K_a$  : gain de l'adaptateur du signal de consigne  $\alpha_e(t)$  ;
- $N = 200$  : rapport de transmission du réducteur (la réduction est donc de  $1/N$ ) ;
- le signal de consigne  $\alpha_e(t)$  est exprimé en degré ;
- le correcteur  $C(p)$  est à action proportionnelle de gain réglable  $K_c$ .



On montre que la fonction de transfert du réducteur est  $R(p) = \frac{\alpha_r(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{Np}$ , que  $k_a = \frac{\pi}{180} k_r$  et que la FTBO est donnée par  $T(p) = \frac{k_{BO}}{p(1 + \tau_m p)}$  ( $k_{BO} = \frac{k_c k_m k_r}{N}$ ).

On souhaite une marge de phase de  $45^\circ$ . **Question**

**1** Déterminer la valeur de  $K_{BO}$  permettant de satisfaire cette condition.

**Question 2** En déduire la valeur du gain  $K_c$  du correcteur.

**Question 3** Déterminer l'écart de position.

Éléments de corrigé :

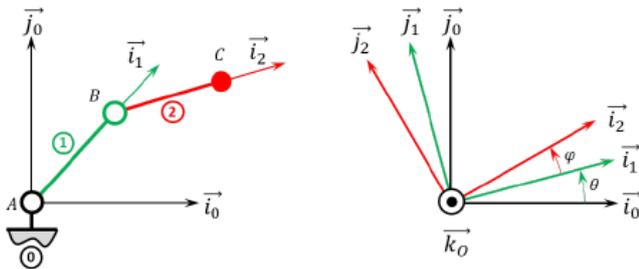
1.  $k_{BO} = \sqrt{2}\tau_m$ .
2.  $k_C = \frac{\sqrt{2}N}{\tau_m k_m k_r} = 471,1$ .
3.  $\varepsilon_s = 0$ .

Corrigé voir ??.

**Exercice 183 – Mouvement RR \***

B2-12

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = R\vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$  et  $\vec{BC} = L\vec{i}_2$  avec  $L = 15\text{ mm}$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour

$\theta = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$  et  $\varphi = \pi\text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour

$\theta = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$  et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}\text{ rad}$ .

**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour

$\theta = \frac{3\pi}{4}\text{ rad}$  et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}\text{ rad}$ .

Corrigé voir ??.

**Exercice 182 – Mouvement RR \***

B2-14

B2-15

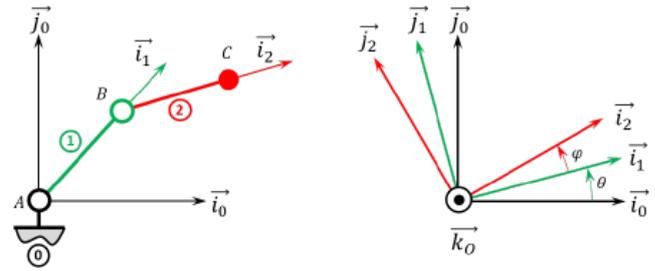
C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = R\vec{i}_1$  avec  $R = 20\text{ mm}$  et  $\vec{BC} = L\vec{i}_2$  avec  $L = 15\text{ mm}$ . De plus :

- $G_1$  désigne le centre d'inertie de 1 et  $\vec{AG}_1 = \frac{1}{2}R\vec{i}_1$ , on note  $m_1$  la masse de 1 ;
- $G_2$  désigne le centre d'inertie de 2 et  $\vec{BG}_2 = \frac{1}{2}L\vec{i}_2$ , on note  $m_2$  la masse de 2.

Un moteur électrique positionné entre 0 et 1 permet de maintenir 1 en équilibre. Un moteur électrique positionné entre 1 et 2 permet de maintenir 2 en équilibre.

L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g\vec{j}_0$ .



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

**Question 2** Donner le torseur de chacune des actions mécaniques.

**Question 3** Simplifier les torseurs dans l'hypothèse des problèmes plans.

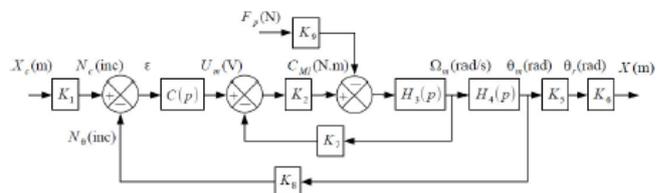
**Question 4** Proposer une démarche permettant de déterminer les couples que doivent développer chacun des moteurs pour maintenir le mécanisme en équilibre.

Corrigé voir ??.

**Exercice 181 – Machine de rééducation SysReeduc \***

B2-07

On propose une modélisation par schéma-blocs dans la figure suivante.



Le moteur à courant continu est régi par les équations suivantes :  $u_m(t) = e(t) + Ri(t)$ ,  $e(t) = k_e \omega_m(t)$  et  $C_{M1}(t) = k_t i(t)$ .

Une étude dynamique a mené à l'équation suivante :

$$(M + m)r\rho_1\dot{\omega}_m(t) = \frac{C_{M1}(t)}{\rho_1 r} - F_p(t)$$

avec :  $M$  la masse du chariot et  $m$  la masse du support de pied,  $\rho_1 = \frac{1}{10}$  le rapport de réduction du réducteur,  $r = 46,1\text{ mm}$  le rayon de la poulie du transmetteur poulie-courroie,  $C_{M1}(t)$  le couple délivré par le moteur et  $F_p(t)$  l'effort délivré par le patient sur le support 3.

Le codeur incrémental possède 500 fentes équiréparties. Deux émetteurs-récepteurs positionnés en quadrature permettent de mesurer l'information.

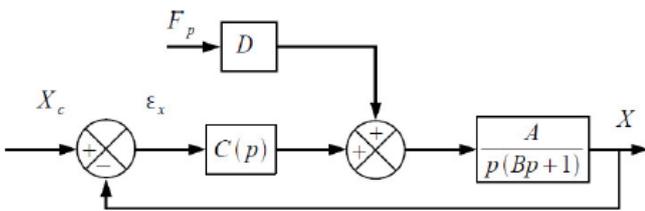
**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r$ ,  $\rho_1$ ,  $k_t$ ,  $k_e$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $m$  et  $K_8$ .

1. ...

- $K_2 = \frac{k_t}{R}$  ;
- $K_7 = k_e$  ;
- $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M+m)r^2 \rho_1^2 p}$  ;
- $H_4(p) = \frac{1}{p}$  ;
- $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$  ;
- $K_5 = \frac{2\pi}{\rho_1}$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres) ;
- $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

2.  $A = \frac{K_8}{k_e}$ ,  $B = \frac{R(m+M)r^2 \rho_1^2}{k_e k_t}$  et  $D = \frac{K_9 R r \rho_1}{K_8 k_t}$

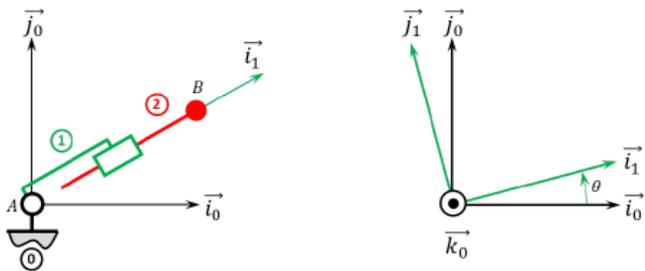


Corrigé voir ??.

**Exercice 180 – Mouvement RT \***

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ .



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = 20$  mm.

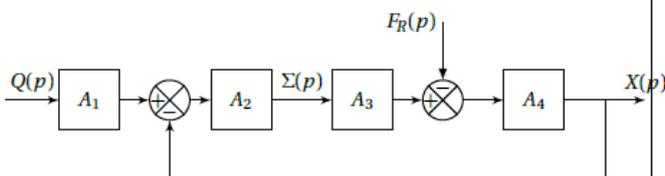
**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  rad et  $\lambda(t) = -20$  mm.

Corrigé voir ??.

**Exercice 179 – Quille pendulaire\***

**B2-07**

Le comportement d'un vérin est défini par le modèle continu ci-dessous.



On a :

- $q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \frac{d\sigma(t)}{dt}$  (a) ;
- $M \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S\sigma(t) - kx(t) - \lambda \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$  (b).

On a :

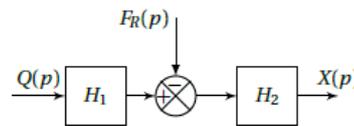
- $\mathcal{L}(q(t)) = Q(p)$  : débit d'alimentation du vérin [ $m^3 s^{-1}$ ] ;
- $\mathcal{L}(\sigma(t)) = \Sigma(p)$  : différence de pression entre les deux chambres du vérin [Pa] ;
- $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$  : position de la tige du vérin [m] ;
- $\mathcal{L}(f_R(t)) = F_R(p)$  : composante selon l'axe de la tige du vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille [N].

Les constantes sont les suivantes :

- $S$  : section du vérin [ $m^2$ ] ;
- $k$  : raideur mécanique du vérin [ $N m^{-1}$ ] ;
- $V$  : volume d'huile de référence [ $m^3$ ] ;
- $B$  : coefficient de compressibilité de l'huile [ $N m^{-2}$ ] ;
- $M$  : masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenés sur la tige du vérin [kg] ;
- $\lambda$  : coefficient de frottement visqueux [ $N m^{-1} s$ ] .

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

Le schéma-blocs de la figure précédente peut se mettre sous la forme suivante.



**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

**Question 3**

Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

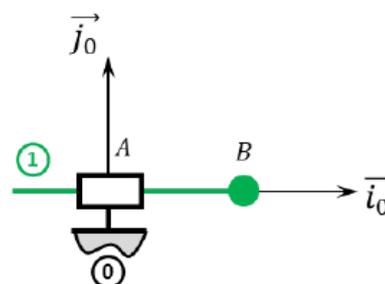
Corrigé voir ??.

**Exercice 178 – Mouvement T \***

**C2-05**

**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On note  $\vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ .



**Question 1** Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

**Question 2** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

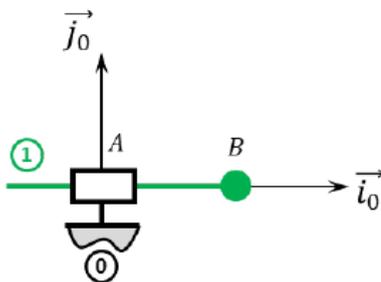
1. .
2.  $x_B(t) = \lambda(t)$ .

Corrigé voir ??.

**Exercice 177 - Mouvement T - \***

**B2-13**

Soit le mécanisme suivant. On note  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0$ .



**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0)$ .

Indications :

1.  $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \lambda(t) \vec{i}_0 \end{matrix} \right\}_{\mathcal{V}P}$ .
2.  $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0) = \lambda(t) \vec{i}_0$ .

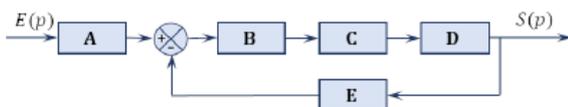
Corrigé voir ??.

**Exercice 176 - Calcul de FTBO\***

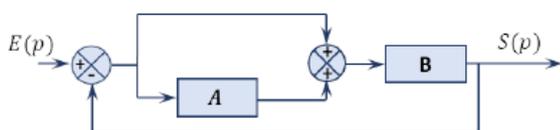
**B2-07**

Pas de corrigé pour cet exercice.

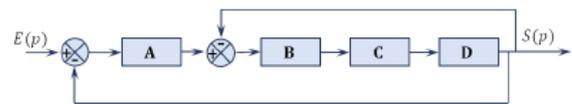
**Question 1** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



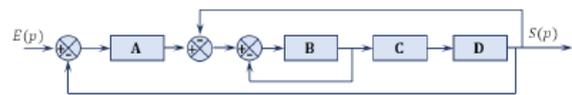
**Question 2** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



**Question 3** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.



**Question 4** Déterminer la FTBO dans la cas suivant.

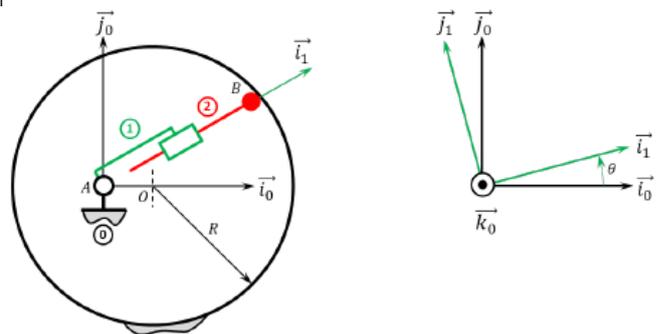


Corrigé voir ??.

**Exercice 175 - Pompe à palettes \*\***

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \pi \text{ rad}$ .

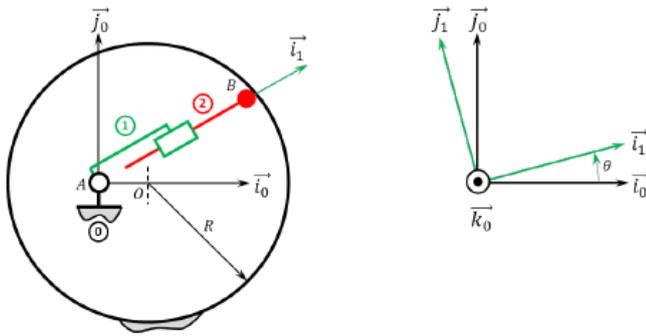
**Question 4** En déduire la course de la pièce 2.

Corrigé voir ??.

**Exercice 174 - Pompe à palettes \*\***

**B2-12** Pas de corrigé pour cet exercice.

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overrightarrow{AO} = e \vec{i}_0$  et  $\overrightarrow{AB} = \lambda(t) \vec{i}_1$ . De plus  $e = 10 \text{ mm}$  et  $R = 20 \text{ mm}$ . Le contact entre 0 et 2 en B est maintenu en permanence (notamment par effet centrifuge lors de la rotation de la pompe).



**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.

**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$ .

**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta(t) = \pi \text{ rad}$ .

**Question 4** En déduire la course de la pièce 2.

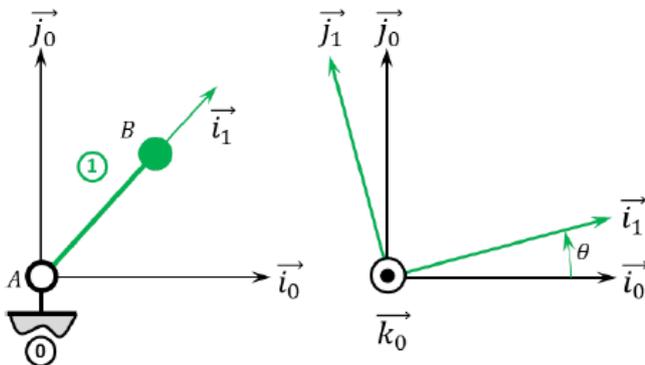
Corrigé voir ??.

**Exercice 173 – Mouvement R \***

C2-05

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overline{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$ .



**Question 1** Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

**Question 2** Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

**Question 3** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

Indications :

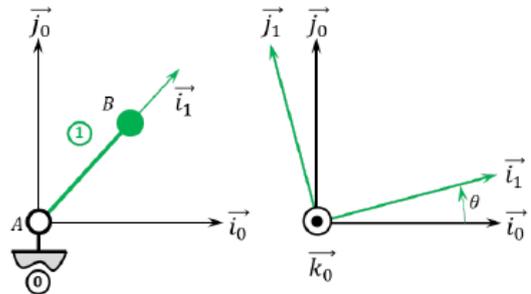
1. .
2. .
3.  $x_B(t) = R \cos \theta(t)$  et  $y_B(t) = R \sin \theta(t)$ .

Corrigé voir ??.

**Exercice 172 – Mouvement R \***

B2-13

Soit le mécanisme suivant. On a  $\overline{AB} = R \vec{i}_1$  avec  $R = 20 \text{ mm}$ .



**Question 1** Déterminer  $\overline{V(B,1/0)}$  par dérivation vectorielle.

**Question 2** Déterminer  $\overline{V(B,1/0)}$  par une autre méthode.

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

**Question 4** Déterminer  $\overline{\Gamma(B,1/0)}$ .

Indications :

1.  $\overline{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$ .
2.  $\overline{V(B,1/0)} = R \dot{\theta} \vec{j}_1$ .
3.  $\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ R \dot{\theta} \vec{j}_1 \end{matrix} \right\}_B$ .
4.  $\overline{\Gamma(B,1/0)} = R \ddot{\theta} \vec{j}_1 - R \dot{\theta}^2 \vec{i}_1$ .

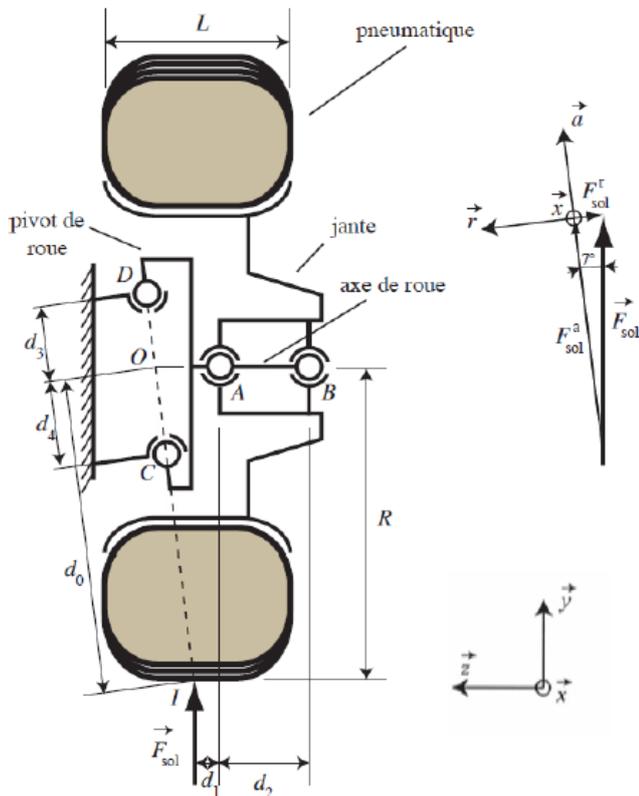
Corrigé voir ??.

**Exercice 171 – Suspension automobile \*\***

B2-14

C1-05 Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la toue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les suivantes :  $F_C^a$  (respectivement  $F_C^r, F_C^x$ ) désignera la composante suivant  $\vec{a}$  (respectivement  $\vec{r}, \vec{x}$ ) de l'effort extérieur exercé en C. On procédera de même pour le point D.



**Question 1** Réaliser le graphe d'analyse en faisant apparaître l'ensemble des actions mécaniques.

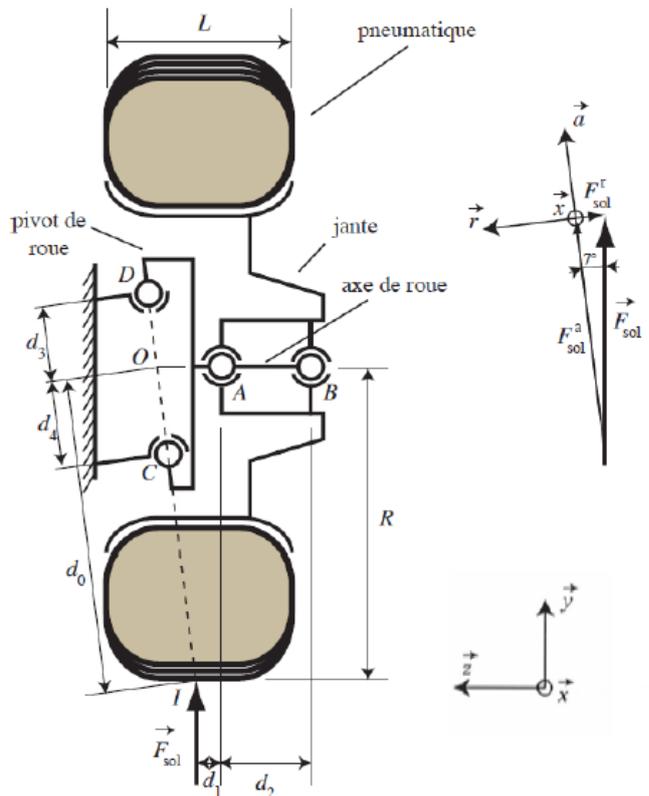
**Question 2** Peut-on résoudre complètement le système? Pourquoi?

Corrigé voir ??.

**Exercice 170 – Suspension automobile** ★★

**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.

On s'intéresse à la liaison entre l'axe de la toue et le châssis du véhicule. Les notations adoptées seront les suivantes :  $F_C^a$  (respectivement  $F_C^r, F_C^x$ ) désignera la composante suivant  $\vec{a}$  (respectivement  $\vec{r}, \vec{x}$ ) de l'effort extérieur exercé en C. On procédera de même pour le point D.



**Question 1** Réaliser le graphe des liaisons en faisant apparaître les actions mécaniques. Exprimer les torseurs des actions mécaniques de chacune des liaisons.

**Question 2** En isolant l'ensemble {pneumatique + jante + axe de roue}, écrire les équations issues du principe fondamental de la statique appliqué au point C, en projection sur les axes de la base  $(\vec{a}, \vec{r}, \vec{x})$  en fonction des composantes  $F_{sol}^a$  et  $F_{sol}^r$  et des dimensions  $d_0, d_3$  et  $d_4$ .

**Question 3** Résoudre littéralement le système.

Corrigé voir ??.

**CORRECTIONS**

**Exercice 192 – Fonctions de transfert\***

**B2-07**

**Question 1** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } FTBO(p) = \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)} = \frac{K^2}{Rf + RJp + Lfp + LJp^2} = \frac{K^2}{Rf \left( 1 + p \frac{RJ+Lf}{Rf} + \frac{LJ}{Rf} p^2 \right)}$$

$$\text{On a donc } K_{BO} = \frac{K^2}{Rf}, \omega_{BO} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}}, 2\xi_{BO} = \frac{RJ+Lf}{Rf} \Leftrightarrow \xi_{BO} = \omega_{BO} \frac{RJ+Lf}{2Rf} = \sqrt{\frac{Rf}{LJ}} \frac{RJ+Lf}{2Rf} = \frac{RJ+Lf}{2\sqrt{LJRf}}$$

**Question 2** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

$$\text{On a } FTBF(p) = \frac{\frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}}{1 + \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp)}} = \frac{K^2}{(R+Lp)(f+Jp) + K^2} = \frac{\frac{K^2}{K^2 + Rf}}{\frac{RJ+Lf}{Rf+K^2}p + \frac{LJ}{Rf+K^2}p^2 + 1}$$

$$\text{On a donc } K_{BF} = \frac{K^2}{K^2 + Rf}, \omega_{BF} = \sqrt{\frac{Rf+K^2}{LJ}}, 2\xi_{BF} = \frac{RJ+Lf}{Rf+K^2} \Leftrightarrow \xi_{BF} = \omega_{BF} \frac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)} = \sqrt{\frac{Rf+K^2}{LJ}} \frac{RJ+Lf}{2(Rf+K^2)}$$

$$\xi_{BF} = \frac{RJ+Lf}{2LJ\sqrt{Rf+K^2}}$$

**Question 3** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

Si on note  $R(p)$  la seconde entrée du premier comparateur et  $\varepsilon(p)$  la sortie du premier comparateur,

$$FTBO(p) = \frac{\varepsilon(p)}{R(p)} = A \times \frac{1}{1 + \frac{B}{p}} \times C = \frac{AC}{B+p} = \frac{\frac{AC}{B}}{1 + \frac{p}{B}}. \text{ On a donc } K_{BO} = \frac{AC}{B} \text{ et } \tau_{BO} = \frac{1}{B}.$$

**Question 4** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. Mettre l'expression sous forme canonique et exprimer les paramètres caractéristiques.

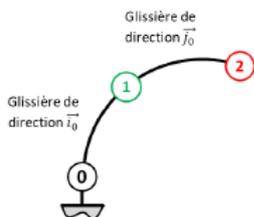
$$\text{On a } FTBF(p) = \frac{\frac{AC}{B+p}}{1 + \frac{AC}{B+p}} = \frac{AC}{B+p+AC} = \frac{\frac{AC}{B+AC}}{1 + \frac{p}{B+AC}}$$

$$\text{On a donc } K_{BF} = \frac{AC}{B+AC} \text{ et } \tau_{BF} = \frac{1}{B+AC}.$$

**Exercice 190 – Mouvement II – \***

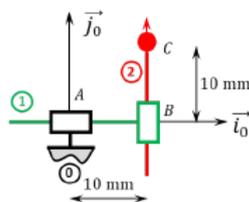
**B2-12**

**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



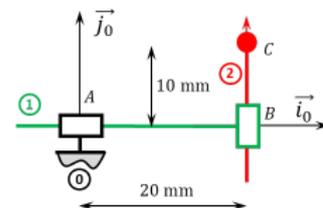
**Question 2** Retracer le schéma

cinématique pour  $\lambda = 10\text{mm}$  et  $\mu = 10\text{mm}$ .



**Question 3** Retracer le schéma

cinématique pour  $\lambda = 20\text{mm}$  et  $\mu = 10\text{mm}$ .



**Exercice 189 – Mouvement II – \***

**C2-05**

**B2-13**

**Question 1** Quel est le mouvement de 2 par rapport à 0.

Le point C a un mouvement quelconque dans le plan  $(A, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ .

**Question 2** Donner l'équation du mouvement du point C dans le mouvement de 2 par rapport à 0.

On a  $\vec{AC} = \lambda(t)\vec{i}_0 + \mu(t)\vec{j}_0$  et donc, on a directement 
$$\begin{cases} x_C(t) = \lambda(t) \\ y_C(t) = \mu(t) \\ z_C(t) = 0 \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

On souhaite que le point  $C$  réalise un cercle de centre  $A$  et de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  à la vitesse  $v = 0,01 \text{ m s}^{-1}$ .

**Question 3** Donner la relation liant  $\theta(t)$ ,  $v$  et  $R$ .

Par ailleurs la vitesse du point  $C$  est donnée par  $\overline{V(C, 2/0)} = \frac{d}{dt} [\vec{AC}]_{\mathcal{R}_0} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

On a  $v = R\dot{\theta}(t)$ . Par intégration,  $\theta(t) = \frac{v}{R}t$  (avec  $\theta(t) = 0 \text{ rad}$  pour  $t = 0 \text{ s}$ ).

**Question 4** Donner les expressions de  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  permettant la réalisation de cette trajectoire en fonction de  $v$ ,  $R$  et du temps.

Exprimons la trajectoire du point  $C$  :  $\vec{AC} = R\vec{e}_r = R\cos\theta(t)\vec{i}_0 + R\sin\theta(t)\vec{j}_0$ . Par identification  $\lambda(t) = R\cos\theta(t)$  et  $\mu(t) = R\sin\theta(t)$ .

Au final, 
$$\begin{cases} \lambda(t) = R\cos\left(\frac{v}{R}t\right) \\ \mu(t) = R\sin\left(\frac{v}{R}t\right) \end{cases}.$$

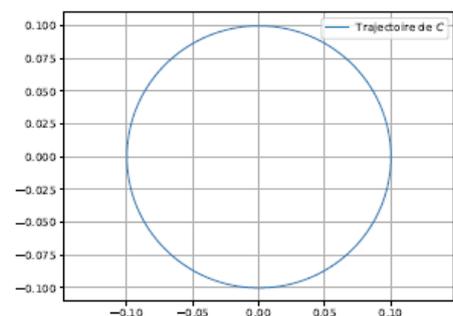
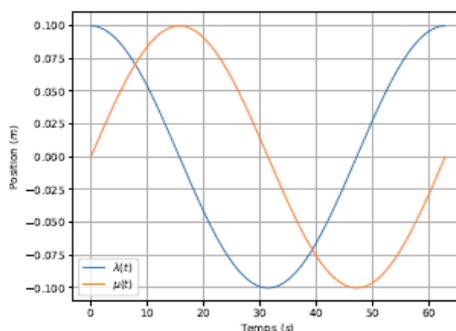
**Question 5** En utilisant Python, tracer  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  et la trajectoire générée.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m
R = 0.1 # m
v = 0.01 # m.s-1

# Temps pour faire un tour
T = 2*m.pi*R/v

les_t = np.linspace(0,T,200)
les_lambda = R*np.cos(v/R*les_t)
les_mu = R*np.sin(v/R*les_t)
plt.grid()
plt.plot(les_t,les_lambda,label="$\\lambda(t)$")
plt.plot(les_t,les_mu,label="$\\mu(t)$")
plt.xlabel("Temps ($s$)")
plt.ylabel("Position ($m$)")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_01_c.pdf")
plt.cla()

plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.plot(les_lambda,les_mu,label="Trajectoire de $C$")
plt.legend()
#plt.show()
plt.savefig("03_TT_02_c.pdf")
```



## Exercice 188 – Banc hydraulique \*

C2-03

**Question 1** Déterminer, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{con}$  définie comme l'erreur statique pour une entrée consigne  $P_{con}$  de type échelon, dans le cas où le débit de fuite est nul.

Le débit de fuite est nul; donc  $\Delta Q_e(p) = 0$ .

**Cas 1 : cours sur la précision connu – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie**

La FTBO est de classe nulle ( $C(p)$  est un gain,  $H_{pom}(p)$  et  $H_{pre}(p)$  de classe 0). Le gain de la Boucle ouverte est  $K_{BO} = K_p K_m K_{pom} K_{cap}$ .

Si l'entrée est un échelon d'amplitude  $P_0$ , l'écart statique est donc donné par  $\varepsilon_s = \frac{P_0}{1 + K_{BO}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_m K_{pom} K_{cap}}$ .

**Cas 2 : cours sur la précision peu connu – À savoir faire, mais on perd un peu de temps... – Attention à avoir le même type d'entrée/sortie** Si on connaît quand même un petit peu son cours, on a  $\varepsilon(p) = \frac{P_{con}(p)}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}}$ .

On a alors,  $\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{P_0}{p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}} = \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$

**Cas 3 : cours sur la précision pas connu – À savoir faire, mais on perd beaucoup peu de temps...**

En utilisant la formule de Black, on a  $P_e(p) = P_{con}(p) K_{cap} \frac{K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p}}{1 + K_p \frac{K_{pom}}{1 + T_2 p} \frac{K_m}{1 + T_1 p} K_{cap}}$   
 $= P_{con}(p) K_{cap}(p) \frac{K_p K_{pom} K_m}{(1 + T_2 p)(1 + T_1 p) + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$

En passant à la valeur finale avec une entrée échelon, on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_e(t) = P_0 K_{cap} \frac{K_p K_{pom} K_m}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$

L'écart statique est donc donné par  $\varepsilon_s = P_0 - P_0 \frac{K_p K_{pom} K_m K_{cap}}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} = P_0 \frac{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap} - K_p K_{pom} K_m K_{cap}}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$   
 $= \frac{P_0}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}}$

**Question 2** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{con}$  à la valeur spécifiée dans le cahier des charges.

On souhaite que l'écart statique soit inférieure à 5% soit 0,05 pour une entrée unitaire.

On cherche donc  $K_p$  tel que  $\frac{1}{1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap}} < 0,05 \Leftrightarrow 1 < 0,05 (1 + K_p K_{pom} K_m K_{cap})$

$\Leftrightarrow \frac{1 - 0,05}{0,05 K_{pom} K_m K_{cap}} < K_p$

Soit  $K_p > \frac{1 - 0,05}{0,05 \times 1,234 \times 10^7 \times 3,24 \times 2,5 \times 10^{-8}} \Rightarrow K_p > 19$ .

**Question 3** Dans le cas où la consigne de pression est nulle, déterminer en fonction de  $K_p$  la fonction de transfert en régulation définie par :  $H_{pert}(p) = \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)}$ . En déduire, en fonction de  $K_p$ ,  $\varepsilon_{pert}$  définie comme l'erreur statique pour une perturbation  $\Delta Q_e$  de type échelon, dans le cas où la consigne de pression est nulle.

Dans ce cas il n'y a pas d'intégrateur avant la perturbation échelon. Il faut savoir faire le calcul.

On peut utiliser la « lecture directe » :  $P_e(p) = P_r(p) H_{pre} - \Delta Q_e(p) H_{fui}(p) = H_{pre}(p) H_{pom}(p) C(p) \varepsilon(p) - \Delta Q_e(p) H_{fui}(p)$   
 $= -H_{pre}(p) H_{pom}(p) C(p) K_{cap} P_e(p) - \Delta Q_e(p) H_{fui}(p)$

$\Leftrightarrow P_e(p) (1 + H_{pre}(p) H_{pom}(p) C(p) K_{cap}) = -\Delta Q_e(p) H_{fui}(p)$

$\Leftrightarrow \frac{P_e(p)}{\Delta Q_e(p)} = -\frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p) H_{pom}(p) C(p) K_{cap}}$

Calculons  $\varepsilon_{pert}(p) = -\frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p) H_{pom}(p) C(p) K_{cap}} \Delta Q_e(p) K_{cap}$ .

On a alors  $\varepsilon_{pert} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -p \times \frac{H_{fui}(p)}{1 + H_{pre}(p) H_{pom}(p) C(p) K_{cap}} \frac{\Delta Q_0}{p} K_{cap}$

$= -\frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap}}{1 + K_m K_{pom} K_p K_{cap}}$

**Question 4** Proposer un réglage de  $K_p$  pour limiter  $\varepsilon_{pert}$  à la valeur spécifiée au cahier des charges.

Pour  $\Delta Q_e = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ , il faut  $\varepsilon_{pert} < 40 \times 10^5$  (Pa) soit

$\frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap}}{1 + K_m K_{pom} K_p K_{cap}} < 40 \times 10^5 \Rightarrow K_f \Delta Q_0 K_{cap} < 40 \times 10^5 (1 + K_m K_{pom} K_p K_{cap}) \Rightarrow \frac{K_f \Delta Q_0 K_{cap} - 40 \times 10^5}{40 \times 10^5 K_m K_{pom} K_{cap}} < K_p \Rightarrow K_p > -1$

**Question 5** Proposer un réglage de  $K_p$  pour vérifier le critère d'amortissement. Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel.

Je vous laisse faire le calcul... Il faut savoir le faire le plus vite possible. Il faut d'abord calculer la FTBE, la mettre sous forme canonique, déterminer  $\xi_{BF} = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T (1 + K_p K_M K_{Pom} K_{Cap})}}$  puis déterminer  $K_p$  tel que  $\xi_{BF} = 1$ .

**Exercice 187 – Banc hydraulique \***

C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Exercice 186 – Mouvement  $\Pi$  – \***

B2-13

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V}(C, 2/0)$  par dérivation vectorielle ou par composition.

Par dérivation vectorielle, on a :  $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0$ .

Par composition du torseur cinématique, on a :  $\overrightarrow{V}(C, 2/0) = \overrightarrow{V}(C, 2/1) + \overrightarrow{V}(C, 1/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{BC}]_{\mathcal{R}_1} + \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AC}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0$ .

**Question 2** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(2/0)\}$  au point C.

$$\{\mathcal{V}(2/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \dot{\mu}(t) \vec{j}_0 \end{array} \right\}_{\forall P}$$

**Question 3** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0)$ .

$$\overrightarrow{\Gamma}(C, 2/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V}(C, 2/0)]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0 + \ddot{\mu}(t) \vec{j}_0$$

**Exercice 185 – Mouvement  $\Pi$  – \***

B2-14

B2-15

C1-05

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Exercice 184 – Palettisation – Stabilité\***

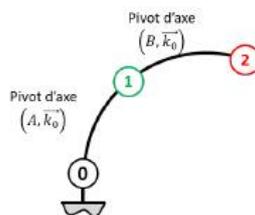
C2-03

Pas de corrigé pour cet exercice.

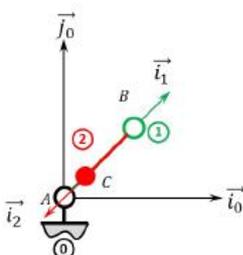
**Exercice 183 – Mouvement RR \***

B2-12

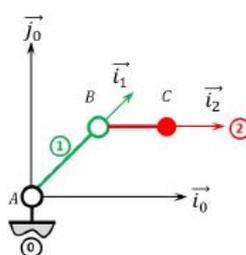
**Question 1** Tracer le graphe des liaisons.



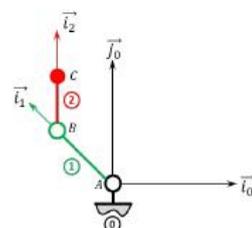
**Question 2** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\varphi = \pi$  rad.



**Question 3** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  rad.



**Question 4** Retracer le schéma cinématique pour  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  rad et  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  rad.



**Exercice 182 – Mouvement RR \***

B2-14

B2-15

C1-05

Pas de corrigé pour cet exercice.

**Exercice 181 – Machine de rééducation SysReeduc \***

B2-07

**Question 1** À partir des équations proposées, déterminer les fonctions de transfert  $K_1, K_2, H_3(p), H_4(p), K_5, K_6, K_7, K_8$  et  $K_9$ .

On a :

- $u_m(t) = e(t) + Ri(t) \Rightarrow U_m(p) = E(p) + RI(p)$  et  $C_{M1}(p) = k_t I(p)$  donc  $K_2 = \frac{k_t}{R}$  ;
- $E(p) = k_e \Omega_m(p)$  et donc  $K_7 = k_e$  ;
- $(M + m)r\rho_1 p \Omega_m(p) = \frac{C_{M1}(p)}{\rho_1 r} - F_p(p) \Leftrightarrow (M + m)r^2 \rho_1^2 p \Omega_m(p) = C_{M1}(p) - \rho_1 r F_p(p)$  et donc  $K_9 = \rho_1 r$  et  $H_3(p) = \frac{1}{(M + m)r^2 \rho_1^2 p}$  ;
- $H_4(p)$  permet d'obtenir une position à partir d'une vitesse. Il s'agit donc d'un intégrateur et  $H_4(p) = \frac{1}{p}$  ;
- un codeur incrémental avec 1 émetteur-récepteur permet de détecter les fentes et les « non fentes » donc ici 1000 informations par tour. Avec un second émetteur, on double la résolution soit 2000 informations pour un tour soit  $K_8 = \frac{2000}{2\pi}$  ;
- en utilisant le réducteur et le poulie courroie, on a directement  $K_5 = \rho_1$  et  $K_6 = r$  (à convertir en mètres) ;
- enfin,  $K_1$  convertit des mètres en incréments.  $X_c$  est la consigne que doit respectée  $X$ . Pour avoir un asservissement précis, il faut donc  $\varepsilon = 0$  et  $X = X_c$  soit  $\varepsilon = 0 = K_1 X_c - K_8 \theta_m = K_1 X_c - K_8 \frac{X}{K_5 K_6}$ . Au final,  $K_1 = \frac{K_8}{K_5 K_6}$ .

**Question 2** Montrer que le schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante. On exprimera  $A, B$  et  $D$  en fonction des paramètres du système  $r, \rho_1, k_t, k_e, R, M, m$  et  $K_8$ .

D'une part,

$$X(p) = ((X_c(p) - X(p)) C(p) - F_p(p) D) \frac{A}{p(Bp + 1)}$$

$$X(p) = \frac{A(X_c(p) - X(p)) C(p)}{p(Bp + 1)} - \frac{AF_p(p) D}{p(Bp + 1)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) + \frac{AX(p)C(p)}{p(Bp + 1)} = \frac{AX_c(p)C(p)}{p(Bp + 1)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp + 1)} \Leftrightarrow X(p) \left( \frac{p(Bp + 1) + AC(p)}{p(Bp + 1)} \right) = \frac{AX_c(p)C(p)}{p(Bp + 1)} + \frac{AF_p(p)D}{p(Bp + 1)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{AX_c(p)C(p)}{p(Bp + 1) + AC(p)} - \frac{AF_p(p)D}{p(Bp + 1) + AC(p)}$$

D'autre part,  $X(p) = \Omega_m(p) H_4(p) K_5 K_6$ ,  $U_m(p) = (X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8) C(p)$ ,  $\theta_m(p) = \Omega_m(p) H_4(p)$ .

$$\Omega_m(p) = ((U_m(p) - \Omega_m(p) K_7) K_2 - F_p(p) K_9) H_3(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_m(p) (1 + K_7 K_2 H_3(p)) = U_m(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9$$

$$X(p) = (U_m(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p) K_1 - \theta_m(p) K_8) C(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \left( \left( X_c(p) K_1 - X(p) \frac{K_8}{K_5 K_6} \right) C(p) H_3(p) K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9 \right) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = ((X_c(p) - X(p)) C(p) H_3(p) K_1 K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) \left( 1 + C(p) H_3(p) K_1 K_2 \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)} \right) = (X_c(p) C(p) H_3(p) K_1 K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) \frac{H_4(p) K_5 K_6}{1 + K_7 K_2 H_3(p)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) (1 + K_7 K_2 H_3(p) + C(p) H_3(p) K_1 K_2 H_4(p) K_5 K_6) = (X_c(p) C(p) H_3(p) K_1 K_2 - F_p(p) H_3(p) K_9) H_4(p) K_5 K_6$$

Par suite,

$$\Leftrightarrow X(p) \left( 1 + \frac{k_e k_t}{(M + m)r^2 \rho_1^2 p} + C(p) \frac{K_8 k_t}{(M + m)r^2 \rho_1^2 p^2} \right) = \left( X_c(p) C(p) \frac{K_8}{(M + m)r^2 \rho_1^2 p^2} \frac{k_t}{R} - F_p(p) \frac{K_9}{(M + m)r \rho_1 p^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2} \frac{k_t}{R}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2}\right)} - F_p(p) \frac{\frac{K_9}{(M+m)r\rho_1 p^2}}{\left(1 + \frac{\frac{k_e k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p} + C(p) \frac{K_8 \frac{k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{(M+m)r^2\rho_1^2 p^2 + p \frac{k_e k_t}{R} + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{(M+m)r\rho_1 p^2 + \frac{p k_e k_t}{Rr\rho_1} + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} \left(\frac{R}{k_e k_t} (M+m)r^2\rho_1^2 p + 1\right) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{Rr\rho_1} \left(\frac{(M+m)Rr^2\rho_1^2}{k_e k_t} p + 1\right) + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{Rr\rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8 k_t}{R}}{p \frac{k_e k_t}{R} (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R}} - F_p(p) \frac{K_9}{p \frac{k_e k_t}{Rr\rho_1} (Bp+1) + C(p) \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{R}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{R}}{p (Bp+1) + C(p)K_8 \frac{k_t}{R} \frac{R}{k_e k_t}} - F_p(p) \frac{K_9 \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t} \frac{K_8 k_t}{Rr\rho_1}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{K_9 \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = X_c(p)C(p) \frac{\frac{K_8}{k_e}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}} - F_p(p) \frac{\frac{K_8}{k_e} \frac{K_9}{k_e k_t} \frac{Rr\rho_1}{k_e k_t}}{p (Bp+1) + C(p) \frac{K_8}{k_e}}$$

On a donc  $A = \frac{K_8}{k_e}$ ,  $B = \frac{R(m+M)r^2\rho_1^2}{k_e k_t}$  et  $D = \frac{K_9 Rr\rho_1}{K_8 k_t}$ .

**Exercice 180 – Mouvement RT\***

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

**Exercice 179 – Quille pendulaire\***

B2-07

**Question 1** Donner les expressions des fonctions de transfert  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  en fonction de la variable complexe  $p$  et des constantes.

D'une part, on transforme les équations dans le domaine de Laplace :  $Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{2B}p\Sigma(p)$  et  $Mp^2X(p) = S\Sigma(p) - kX(p) - \lambda pX(p) - F_R(p)$ .

En utilisant le schéma-blocs, on a  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p)) = A_1A_2Q(p) - A_2X(p)$ .

Par ailleurs  $\Sigma(p) = \frac{Q(p) - SpX(p)}{\frac{2B}{V}p} = Q(p) \frac{2B}{Vp} - X(p) \frac{S2B}{V}$ . On a donc  $A_2 = \frac{2B}{V}$ ,  $A_1A_2 = \frac{2B}{Vp}$  soit  $A_1 = \frac{2B}{Vp} \frac{V}{S2B} = \frac{1}{Sp}$ .

On a aussi  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p)) = -A_4F_R(p) + A_3A_4\Sigma(p)$ . Par ailleurs,  $X(p)(Mp^2 + \lambda p + k) = S\Sigma(p) - F_R(p) \Leftrightarrow X(p) = \frac{S\Sigma(p)}{Mp^2 + \lambda p + k} - \frac{F_R(p)}{Mp^2 + \lambda p + k}$ . On a donc :  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$  et  $A_3 = S$ .

Au final,  $A_1 = \frac{1}{Sp}$ ,  $A_2 = \frac{S2B}{V}$ ,  $A_3 = S$  et  $A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}$ .

**Question 2** Donner les expressions des fonctions de transfert  $H_1$  et  $H_2$  en fonction de  $A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$ , puis de la variable  $p$  et des constantes.

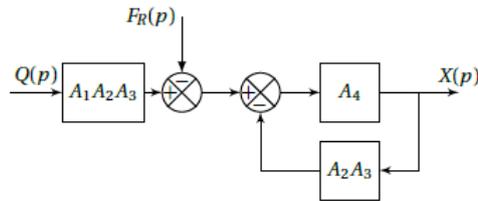
**Méthode 1 : Utilisation des relations précédentes** On a  $X(p) = (H_1Q(p) - F_R(p))H_2(p)$ .

Par ailleurs, on a vu que  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3\Sigma(p))$  et  $\Sigma(p) = A_2(A_1Q(p) - X(p))$ .

On a donc  $X(p) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2(A_1Q(p) - X(p))) \Leftrightarrow X(p)(1 + A_2A_3A_4) = A_4(-F_R(p) + A_3A_2A_1Q(p))$ . On a donc  $H_1(p) = A_1A_2A_3$  et  $H_2 = \frac{A_4}{1 + A_2A_3A_4}$ .

**Méthode 2 : Lecture directe du schéma-blocs** Revient à utiliser la méthode précédente.

**Méthode 3 : Algèbre de schéma-blocs** Le schéma-blocs proposé est équivalent au schéma suivant.



On retrouve le même résultat que précédemment.

$$A_1 = \frac{1}{Sp}, A_2 = \frac{S2B}{V}, A_3 = S \text{ et } A_4 = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}.$$

$$\text{En faisant le calcul on obtient : } H_1(p) = \frac{2BS}{pV} \text{ et } H_2 = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}}{1 + \frac{2BS^2}{V} \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k}} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + k + \frac{2BS^2}{V}}.$$

### Question 3

Pour ce vérin non perturbé ( $F_R = 0$ ), donner sa fonction de transfert  $X(p)/Q(p)$  en fonction de la variable  $p$  et des constantes.

$$\text{Dans ce cas, } \frac{X(p)}{Q(p)} = H_1(p)H_2(p) = \frac{2BS}{p(MVp^2 + \lambda pV + kV + 2BS^2)}.$$

### Exercice 178 – Mouvement T – \*

C2-05

B2-13

**Question 1** Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

1 est en translation de direction  $\vec{i}_0$  par rapport à 0.

**Question 2** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point B, point appartenant à 1 par rapport à 0.

$$\text{On a } \vec{AB} = \lambda(t) \vec{i}_0. \text{ La trajectoire du point B est donc donnée par } \begin{cases} x_B(t) = \lambda(t) \\ y_B(t) = 0 \\ z_B(t) = 0 \end{cases} \text{ dans le repère } (A; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{z}_0).$$

### Exercice 177 – Mouvement T – \*

B2-13

**Question 1** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point B.

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \lambda(t) \vec{i}_0 \end{array} \right\}_{\substack{P \\ \vee P}}.$$

$$\vec{V}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\vec{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \dot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

**Question 2** Déterminer  $\vec{\Gamma}(B, 1/0)$ .

$$\vec{\Gamma}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\vec{V}(B, 1/0)]_{\mathcal{R}_0} = \ddot{\lambda}(t) \vec{i}_0.$$

### Exercice 176 – Calcul de FTBO\*

B2-07

Pas de corrigé pour cet exercice.

### Exercice 175 – Pompe à palettes \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

### Exercice 174 – Pompe à palettes \*\*

B2-12 Pas de corrigé pour cet exercice.

### Exercice 173 – Mouvement R \*

C2-05

B2-13

**Question 1** Quel est le mouvement de 1 par rapport à 0.

1 est en rotation de centre A et d'axe  $\vec{k}_0$  par rapport à 0.

**Question 2** Quelle est la trajectoire du point B appartenant à 1 par rapport à 0.

B est en rotation par rapport à 0 (cercle de centre A et de rayon R).

**Question 3** Donner l'équation paramétrique de la trajectoire du point  $B$ , point appartenant à  $l$  par rapport à  $O$ .

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} = R \overrightarrow{i_1} = R \cos \theta \overrightarrow{i_0} + R \sin \theta \overrightarrow{j_0}. \text{ La trajectoire du point } B \text{ est donc donnée par } \begin{cases} x_B(t) = R \cos \theta(t) \\ y_B(t) = R \sin \theta(t) \\ z_B(t) = 0 \end{cases} \text{ dans}$$

le repère  $(A; \overrightarrow{i_0}, \overrightarrow{j_0}, \overrightarrow{z_0})$ .

**Exercice 172 – Mouvement R \***

**B2-13**

**Question 1** Déterminer  $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$  par dérivation vectorielle.

$$\overrightarrow{V}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{AB}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [R \overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0}. \text{ Or } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{i_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{i_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{i_1} = \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{V}(B, 1/0) = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

**Question 2** Déterminer  $\overrightarrow{V}(B, 1/0)$  par une autre méthode.

$$\overrightarrow{V}(B, 1/0) = \overrightarrow{V}(A, 1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \overrightarrow{0} - R \overrightarrow{i_1} \wedge \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} = R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1}.$$

**Question 3** Donner le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}(1/0)\}$  au point  $B$ .

$$\text{On a directement } \{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \\ R \dot{\theta} \overrightarrow{j_1} \end{Bmatrix}_B.$$

**Question 4** Déterminer  $\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0)$ .

$$\overrightarrow{\Gamma}(B, 1/0) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{V}(B, 1/0)]_{\mathcal{R}_0} = R \ddot{\theta} \overrightarrow{j_1} - R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{i_1}. \text{ (En effet, } \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{j_1}]_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{j_1} = \overrightarrow{0} + \dot{\theta} \overrightarrow{k_0} \wedge \overrightarrow{j_1} = -\dot{\theta} \overrightarrow{i_1}.)$$

**Exercice 171 – Suspension automobile \*\***

**B2-14**

**C1-05** Pas de corrigé pour cet exercice.

**Exercice 170 – Suspension automobile \*\***

**C2-07** Pas de corrigé pour cet exercice.