- A - GEOMETRIE DES MASSES

En cinématique, nous avons introduit les notions de temps et d'espace. Ce chapitre précise la notion de masse et de centre d'inertie d'un système matériel quelconque.

1. MASSE - POIDS

1.1. Masse d'un système

1.1.1. Notion de masse

A tout corps physique E, existant à l'instant t, on attribue une grandeur scalaire m(E,t) appelée masse à l'instant t. Cette masse est représentée par un nombre positif ou nul. Elle satisfait à deux axiomes:

❍ ***Axiome d'additivité de la masse.***

Si E1 et E2 désignent deux systèmes matériels disjoints, de masses respectives, à l'instant t, notées m(E1,t) et m(E2,t), la masse à l'instant t du système $E_1 \cup E_1$ est la somme m(E1,t) + m(E2,t)

❍ ***Axiome de conservation de la masse.***

La masse de tout système matériel isolé reste constante au cours du temps.
Cet axiome est une bonne approximation pour la vie courante (En mécanique relativiste la masse est une fonction du temps).
Nous n'écrirons donc plus $m(E,t)$, mais simplement $m(E)$.

Conséquence de la conservation de la masse:

E est un système matériel en mouvement par rapport à un repère ***R*** (figure 1). A l'instant ***t***, en tout point M_i de ***E***, on définit un champ de vecteurs $\vec{V}(M_i,t)$. Si la fonction $\vec{V}(M_i,t)$ est continument différentiable par rapport au temps, alors on a:

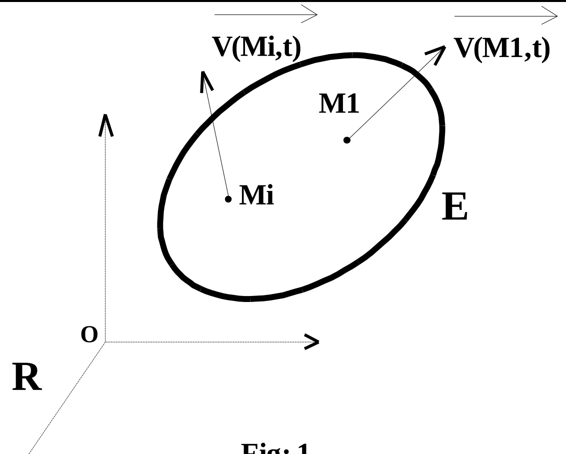

Fig: 1

1.1.2. Répartition de la masse définie par une densité

Pour un système ***E***, il existe une fonction ρ_{M_i} définie au point M_i, à valeurs réelles positives ou nulles, dite densité de masse, ou densité, ou masse volumique, telle que l'on ait :

où ***dv*** désigne l'élément de volume autour du point M_i.

1.2. Notion de Poids - centre de gravité

Revoir le cours de physique.

1.2.1. Loi d'attraction de Newton:

Un point matériel M_1 de masse m_1 attire un point matériel M_2 de masse m_2 (figure 2). L'action mécanique d'attraction a pour module $\left|F\,1/2\right| = \left|F\,2/1\right| = k\,\dfrac{m_1\,m_2}{d^2}$

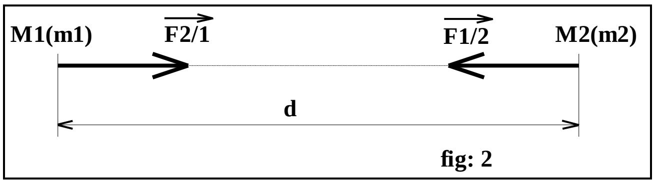

fig: 2

avec k = 6,67 10^{-11} SI = constante gravitationnelle universelle.

1.2.2. Poids

La terre exerce sur un point matériel M_i une force attractive $\vec{Pi}$, de direction verticale (en première approximation). $\vec{Pi}$ est appelé poids du point M_i.

Soit un système matériel E, constitué de n points matériels M_i de poids $\vec{Pi}$.

- Les poids $\vec{Pi}$ sont parallèles si E est petit par rapport à la terre.
- $\vec{P} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{Pi}$ est appelé poids du système E
- L'ensemble des actions mécaniques $\vec{Pi}$ est équivalent à un glisseur $\vec{P}$ de direction verticale passant par un point G, et ayant pour moment en O :

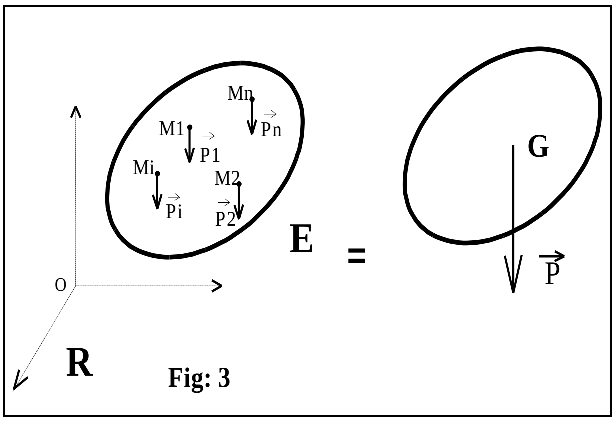

Fig: 3

1.2.3. Relation entre poids et masse

Soit deux points de même nature (même ρ):

M_1 de masse m_1, de volume V_1, de poids P_1 ; M_2 de masse m_2, de volume V_2, de poids P_2

Au même lieu on a $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{P_1}{P_2}$ d'où $\dfrac{\vec{P}_1}{M_1} = \dfrac{\vec{P}_2}{M_2} = \vec{g} = cst$, $\vec{g}$ est le vecteur caractéristique du champ de pesanteur au lieu considéré.

On pose $\left\|\vec{g}\right\| = g$ d'où : $\boxed{P = m\,g}$

P = poids du système E en N

m = masse du système E en kg

g = accélération de la pesanteur en m/s²

NB: -g varie avec la latitude:
-g varie avec l'altitude. Pôle: g = 9,8322 Paris: g = 9,8097

1.3. Centre de gravité

1.3.1. Expression vectorielle et coordonnées du centre de gravité

On a vu que G est tel que $\vec{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{Pi}$ avec $pi = mi\ g$, g commun à tous les points M_i.

Si on écrit cette expression au point G on a:

$$\vec{M}_G(\vec{P}) = \vec{0} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{GM_i} \wedge mi\ g\ \vec{Z}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{i=n}\left[\overrightarrow{GM_i}\ mi\right]\right\} \wedge g\ \vec{Z} = \vec{0}$$; donc :

G est le barycentre des points M_1, M_2, ...M_i, ...M_n affectés des coefficients m_1, m_2, ...m_n

Coordonnées de G:

Soit O un point fixe, on peut écrire:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\overrightarrow{GM_i}\ mi\right] = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}\right)\right] mi = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OG}\ mi = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OM_i}\ mi$$ donc :

où m est la masse du système E.

Soit $R = \left(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right)$ un repère orthonormé:

- les coordonnées dans R du point M_i : $\left(x_i, y_i, z_i\right)$
- les coordonnées dans R du point G : $\left(x_G, y_G, z_G\right)$.

Remarques:

Si on ne peut décomposer le solide en masses élémentaires, ce qui n'est possible que dans certains cas particuliers, la définition précédente du centre de gravité est insuffisante pour calculer la position du centre de gravité.

Une définition plus précise consiste à décomposer le solide en éléments infiniment petits de masse élémentaire dm, concentrée en chaque point M de coordonnées (x,y,z) dans le repère R. On obtient alors:

les coordonnées de G s'écrivent

1.3.2. Cas particuliers

- *Solide homogène:*

dans ce cas, la masse volumique $\rho = \rho_{Mi}$ est constante, et $dm = \rho\, dV$ (dV = volume de l'élément de matière) ,

on a alors :

V = volume de E.

Le volume de l'élément de matière dV peut s'exprimer dans les différents systèmes de coordonnées ; pour le calcul, en fonction de la forme du solide, on choisira le système qui permettra d'exprimer le plus facilement possible les bornes d'intégration :

En coordonnées cartésiennes (fig. 132a) : $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

En coordonnées cylindriques (fig. 132b) : $dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$

En coordonnées polaires (fig. 132c): $dV = r^2 \cdot \sin\psi \cdot dr \cdot d\psi \cdot d\varphi$

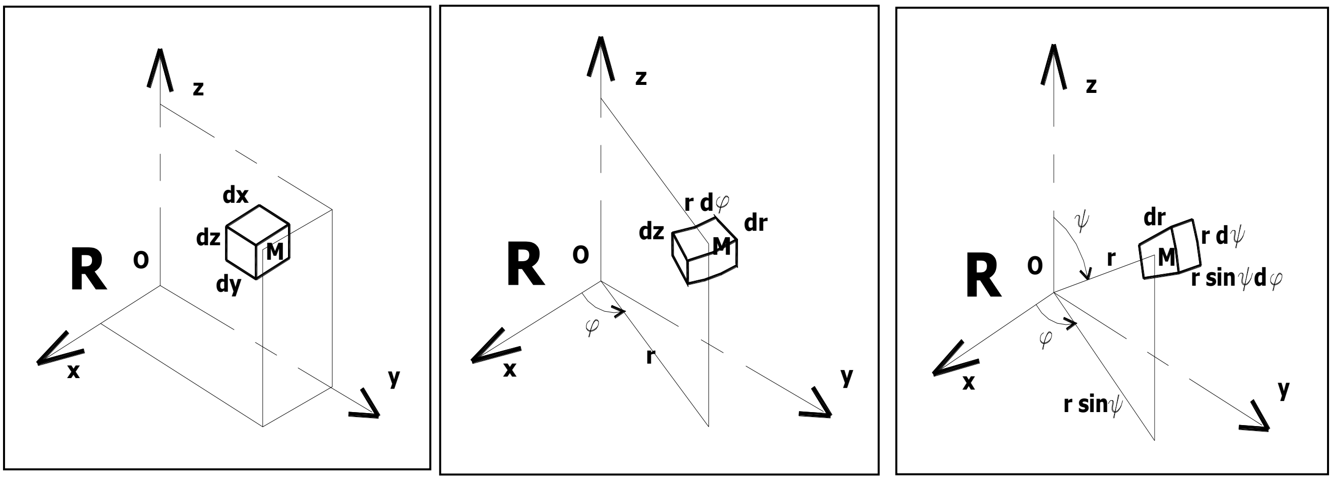

Fig. 132a Fig. 132b Fig. 132c

- *Surface plane d'épaisseur "e"petite :* $\boldsymbol{dV = e\, dS}$

L'expression de l'élément de surface dS sera faite dans un système de coordonnées qui simplifie l'expression des bornes d'intégration.

- *Ligne plane de section "s"constante :*

s petite devant la longueur L du fil: $\boldsymbol{dV = s\, dL}$:

L'expression de l'élément de longueur dL sera faite dans un système de coordonnées qui simplifie l'expression des bornes d'intégration.

1.3.3. Recherche pratique du centre de gravité

❍ *Utilisation des symétries:*

Si un solide possède un élément de symétrie (plan, axe, centre de symétrie) matériel, son centre de gravité appartient à cet élément de symétrie.

❍ *Démarche*

Le système (Σ) possède des symétries

oui

Hypothèse : solides homogènes

S'il existe un point de symétrie pour (Σ), G est ce point
S'il existe un axe de symétrie pour (Σ), G est sur cet axe
S'il existe un plan de symétrie pour (Σ), G est dans ce plan

non

On décompose le système matériel Σ en solides élémentaires S_i

Le solide élémentaire (S_i) possède des symétries

oui

Hypothèse : solides homogènes

S'il existe un point de symétrie pour (S_i), G_i est ce point
S'il existe un axe de symétrie pour (S_i), G_i est sur cet axe
S'il existe un plan de symétrie pour (S_i), G_i est dans ce plan

non

Pour chaque solide élémentaire (S_i), on calcule les composantes non déterminées.

On projette $m_i.\overrightarrow{OG_i} = \int_{(S_i)} \overrightarrow{OP}.dm$ sur les axes choisis :

→ $m_i.x_{G_i} = \int_{(S_i)} x_p.dm$ → $m_i.y_{G_i} = \int_{(S_i)} y_p.dm$ → $m_i.z_{G_i} = \int_{(S_i)} z_p.dm$

On utilise la formule du barycentre $M_{tot}.\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i.\overrightarrow{OG_i}$ projetée sur les axes choisis :

→ $M_{tot}.x_G = \sum_i m_i.x_{Gi}$ → $M_{tot}.y_G = \sum_i m_i.y_{Gi}$ → $M_{tot}.z_G = \sum_i m_i.z_{Gi}$