2. OPERATEUR D'INERTIE - MATRICE D'INERTIE

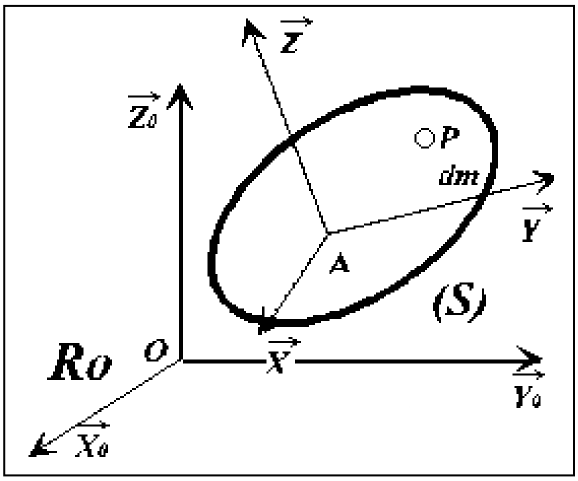
Dans ce paragraphe le système matériel étudié est un **solide indéformable**, il sera noté ***(S).***

2.1. Données générales

Un solide ***(S)*** de masse ***m*** est en mouvement par rapport à un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$.
A est un point fixe du solide ***(S).***

On définit le repère $R = (A, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ lié au solide ***(S)***

Soit P un point courant du solide (S) autour duquel on étudiera l'effet de la répartition de la masse et $\vec{u}$ un vecteur unitaire. On donne les coordonnées de $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{u}$ dans le repère ***R***:



$$\overrightarrow{AP} = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix}_R \quad ; \quad \vec{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}_R$$

2.2. Opérateur d'inertie - Matrice d'inertie d'un solide

L'opérateur d'inertie d'un solide ***(S)*** en un point ***A***, est l'opérateur qui, à tout vecteur $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)_R$ fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{j_A(S,\vec{u})}$, défini par :

Cette expression un peu complexe apparaîtra dans les relations qui permettront de calculer le "moment cinétique" d'un solide et on se propose d'en trouver une expression plus abordable. Calculons cette intégrale :

On pose par définition :

__Remarques importantes :__

- Le point ***A*** et le repère ***R*** étant fixes par rapport au solide ***(S),*** les quantités ***A, B, C, D, E, F*** sont constantes au cours du temps ;

- **L'unité SI** dans laquelle seront exprimées les valeurs numériques de ***A, B, C, D, E, F*** est : **$Kg.m^2$**

- Les moments d'inertie ***A, B, C*** sont toujours positifs.

L'opérateur d'inertie $\overrightarrow{j_A(S,\vec{u})}$ s'écrit:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{j_A(S,\vec{u})} = & \left[A.u_x - F.u_y - E.u_z\right].\overrightarrow{X} \\ & +\left[-F.u_x + B.u_y - D.u_z\right].\overrightarrow{Y} \\ & +\left[-E.u_x - D.u_y + C.u_z\right].\overrightarrow{Z}\end{aligned}$$

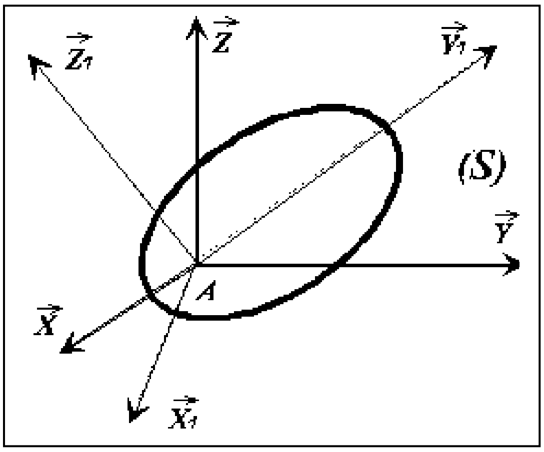
On définit la **matrice d'inertie** du solide (S), exprimée au point A et dans la base du repère R par $\left(I_A(S)\right)_R$:

__Remarques:__

- Autre appellation utilisée : opérateur d'inertie.
- La matrice d'inertie est symétrique.

2.3. Base principale d'inertie

La matrice d'inertie étant symétrique, il existe un système de trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ formant une base. Dans cette base, appelée base principale d'inerte, la matrice est diagonale (les produits d'inertie ***D, E, F*** sont nuls).



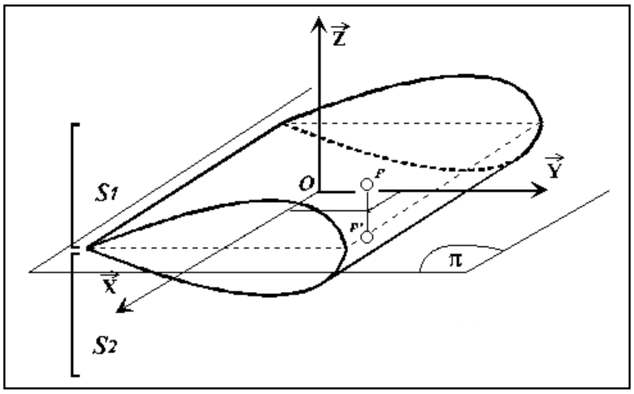
Dans la base de R : $$\left(I_A(S)\right)_R = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(A,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$$

Dans la base de <u>R1</u> $\longrightarrow$ $$\left(I_A(S)\right)_{R_1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(A,\vec{X}_1,\vec{Y}_1,\vec{Z}_1)}$$

2.4. Techniques de calcul d'une matrice d'inertie

2.4.1. Le solide (S) a un plan de symétrie

Soit deux points ***P*** et ***P'*** de ***(S)*** symétriques par rapport au plan de symétrie **(π)**. On a:

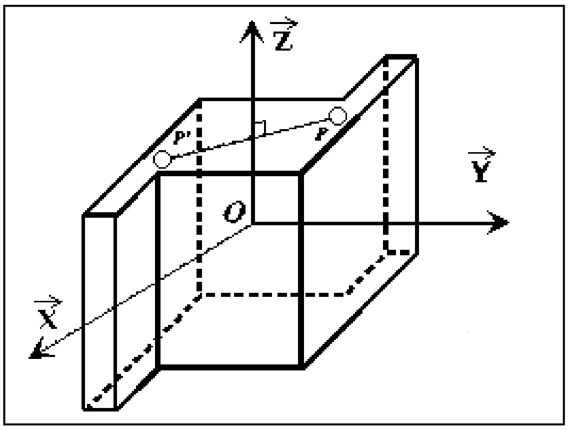


$$\overrightarrow{OP} = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix}_R \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP'} = \begin{Bmatrix} x_{P'} = x_P \\ y_{P'} = y_P \\ z_{P'} = -z_P \end{Bmatrix}_R$$

<u>Calcul du produit d'inertie</u> *D*:

$$D = \int_S yz.dm$$

2.4.2. Le solide a un axe de symétrie



Le solide ***(S)*** a l'axe $(O, \overrightarrow{Z})$ comme axe de symétrie.

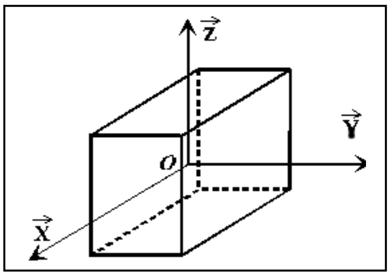
Soit deux points ***P*** et ***P'*** de ***(S)*** symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{Z})$. On a:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix}_R \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP'} = \begin{Bmatrix} x_{P'} = -x_P \\ y_{P'} = -y_P \\ z_{P'} = z_P \end{Bmatrix}_R$$

<u>Calcul des produits d'inertie</u>:

	Point P	Point P'	
$D \Rightarrow$	$y_P\, z_P$	$y_{P'}\, z_{P'} = -y_P\, z_P$	$D = 0$
$E \Rightarrow$	$x_P\, z_P$	$x_{P'}\, z_{P'} = -x_P\, z_P$	$E = 0$
$F \Rightarrow$	$x_P\, y_P$	$x_{P'}\, y_{P'} = x_P\, y_P$	$F \neq 0$!

2.4.3. Le solide a deux plans de symétrie perpendiculaires



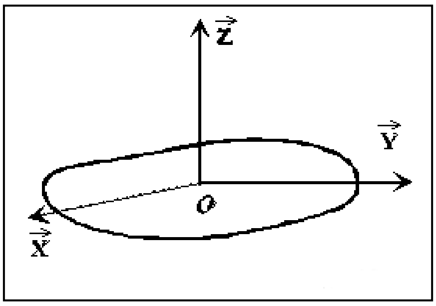
- Le plan $(O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0})$ est plan de symétrie
  $\Rightarrow$ Théorème 1 $\Rightarrow$ $D = E = 0$
- Le plan $(O, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$ est plan de symétrie
  $\Rightarrow$ Théorème 1 $\Rightarrow$ $F = 0$

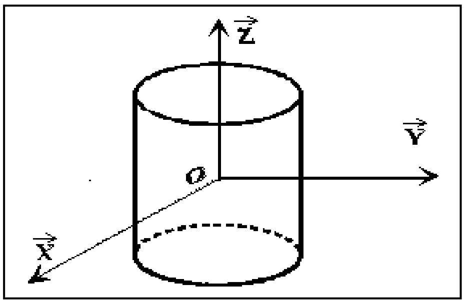
2.4.4. Le solide a deux axes de symétrie perpendiculaires

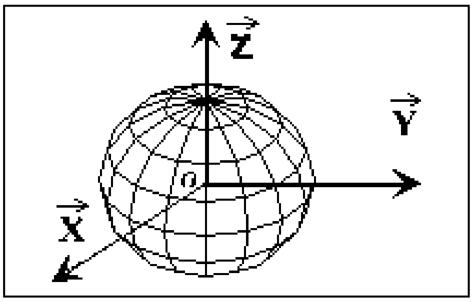
Même étude:

2.4.5. Applications:

A partir des différents théorèmes étudiés précédemment, on cherchera dans les applications suivantes la forme simplifiée de la matrice d'inertie.







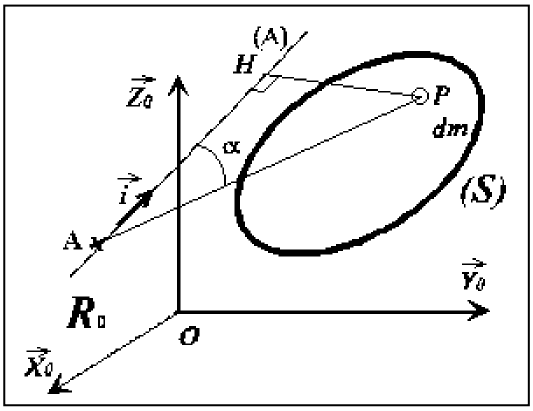
Solide plat, plan $(O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$; Solide de révolution: axe $(O, \overrightarrow{Z})$; Solide à symétrie sphérique

2.5 Moments d'inertie particuliers

2.5.1. Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Soit un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$, et un axe (Δ) défini par le point A et le vecteur unitaire $\vec{i}$.
Soit un solide (S) de masse m.
Un point P de (S) se projette en H sur (Δ).

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est le scalaire positif suivant:



On note que cette définition ne fait pas intervenir le point A ; on pourra donc souvent simplifier la notation : $I_A(S/\Delta) = I(S)/\Delta$

<u>Calcul de</u> $I_A(S/\Delta)$:

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \|\vec{i}\| . \|\overrightarrow{PH}\| = \|\vec{i}\| . \|\overrightarrow{AP}\| . \sin\alpha = \|\vec{i} \wedge \overrightarrow{AP}\|$$

$$\Rightarrow I_A(S/\Delta) = \int_S (\overrightarrow{PH})^2 . dm = \int_S (\vec{i} \wedge \overrightarrow{AP})^2 . dm = \int_S \underbrace{(\vec{i} \wedge \overrightarrow{AP})}.(\underbrace{\vec{i}} \wedge \underbrace{\overrightarrow{AP}}).dm$$

On reconnait le produit mixte entre les trois vecteurs $(\vec{i} \wedge \overrightarrow{AP})$, $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AP}$

$$I_A(S/\Delta) = \int_S \vec{i} . \left[\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{AP}) \right] . dm \overset{\text{Relation 6}}{=\!=\!=\!=\!=} \vec{i} \,.\, \overrightarrow{j_A(S, \vec{i})}$$

☞ **<u>Relation pour le calcul</u>** :

2.5.2. Moment d'inertie par rapport au plan du trièdre lié au solide

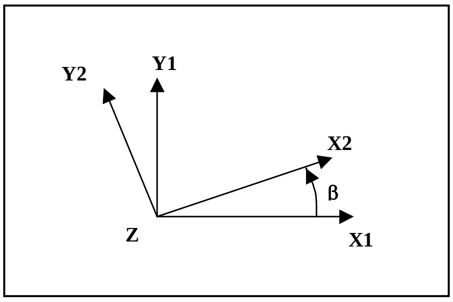
Un point ***P*** de ***(S)*** est défini dans le repère $\boldsymbol{R = (O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})}$ lié au solide, par les coordonnées ***(x,y,z).***

- On pose:
  - $A' = \int_S x^2.dm$ = Moment d'inertie de ***(S)*** par rapport au plan $\boldsymbol{(O, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})}$;
  - $B' = \int_S y^2.dm$ = Moment d'inertie de ***(S)*** par rapport au plan $\boldsymbol{(O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z})}$;
  - $C' = \int_S z^2.dm$ = Moment d'inertie de ***(S)*** par rapport au plan $\boldsymbol{(O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})}$.
- On a:

2.5.3. Moment d'inertie par rapport à un point

2.6. CHANGEMENT DE BASE POUR LA MATRICE D'INERTIE

Le changement de base est une démarche qui prend du temps et elle ne doit être entreprise qu'après mûre réflexion, seulement si elle est vraiment nécessaire !!



<u>Rappel mathématique :</u>

Soit $\mathbf{P}$ la matrice de passage de la base B1 (X1, Y1, Z1)
à la base B2 (X2, Y2, Z2);

Soit $\left(I_A(S)\right)_{B1}$ la matrice d'inertie de (S) dans la base B1 ;

La matrice d'inertie de (S), $\left(I_A(S)\right)_{B2}$ exprimée dans la base B2 est :

$$\boxed{\left(I_A(S)\right)_{B2} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \left(I_A(S)\right)_{B1} \cdot \mathbf{P}}$$

La matrice $\mathbf{P}$ de passage de la base B1 à la base B2 est composée des vecteurs colonne (X2, Y2, Z2) de la nouvelle base exprimés dans l'ancienne base.

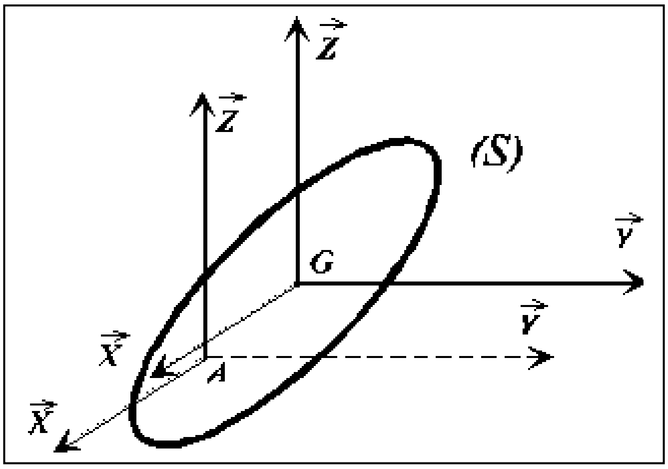
Exemple de la matrice de passage d'une
rotation :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7. Théorème de HUYGENS

2.7.1. Forme générale du théorème de Huygens :

Soit un solide *(S)* de masse *m*, de centre de gravité *G.*



On définit :

- deux repères liés à *(S)* : $R = (A, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ et $R' = (G, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$
- les deux matrices d'inertie dans *R* et *R'* :

$$\left(I_A(S)\right)_R = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_R$$

$$\left(I_G(S)\right)_{R'} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{R'}$$

- les coordonnées des vecteurs: $\overrightarrow{AG} = \begin{Bmatrix} x_{AG} \\ y_{AG} \\ z_{AG} \end{Bmatrix}$; $\overrightarrow{AP} = \begin{Bmatrix} x_{AP} \\ y_{AP} \\ z_{AP} \end{Bmatrix}$; $\overrightarrow{GP} = \begin{Bmatrix} x_{GP} \\ y_{GP} \\ z_{AP} \end{Bmatrix}$

Recherchons une relation entre les deux matrices d'inertie:

On a : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP} \Rightarrow \begin{cases} x_{AP} = x_{AG} + x_{GP} \\ y_{AP} = y_{AG} + y_{GP} \\ z_{AP} = z_{AG} + z_{GP} \end{cases}$

<u>Calcul de</u> A_A

Calcul de D_A:

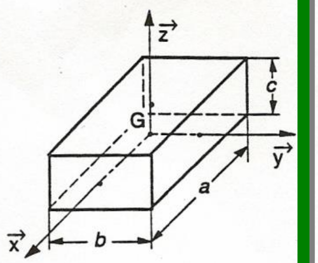
$$I_A(m \in G) = m\begin{pmatrix} y_{AG}^2 + z_{AG}^2 & -x_{AG}y_{AG} & -x_{AG}z_{AG} \\ -x_{AG}y_{AG} & x_{AG}^2 + z_{AG}^2 & -y_{AG}z_{AG} \\ -x_{AG}z_{AG} & -y_{AG}z_{AG} & x_{AG}^2 + x_{AG}^2 \end{pmatrix}$$

Conseils	**Avant tout calcul, définir la forme simplifiée de la matrice ⇒ choisir le point, le repère où l'on exprimera la matrice sous sa forme la plus simple.** **Avant de multiplier ou d'additionner 2 matrices, vérifier qu'elles soient exprimées dans un même repère et au même point.** **Pour le théorème de Huygens, les deux repères sont parallèles et il s'écrit entre un point A et le centre d'inertie G (A≠G) et non entre deux points quelconques du solide.**

MATRICES D'INERTIE USUELLES

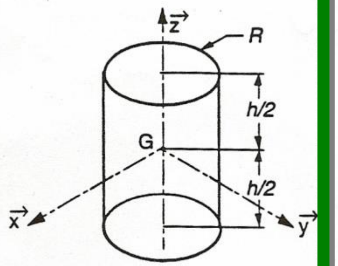
Parallélépipède rectangle

$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix}\frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2)\end{pmatrix}_{(B)}$$



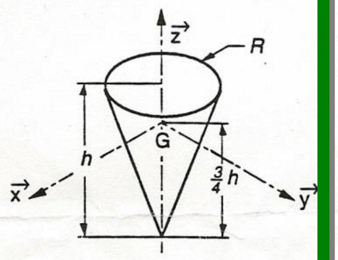
Cylindre de révolution

$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix}m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2}\end{pmatrix}_{(B)}$$



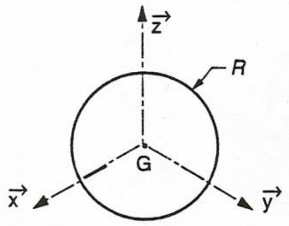
Cône de révolution

$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix}\frac{3}{20}m\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{20}m\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2\end{pmatrix}_{(B)}$$



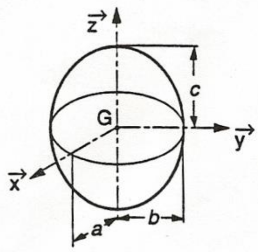
Boule

$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2\end{pmatrix}_{(B)}$$



Ellipsoïde

$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix}\frac{m}{5}(b^2+c^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{5}(a^2+c^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m}{5}(a^2+b^2)\end{pmatrix}_{(B)}$$



Tore

$$\mathbb{I}(G,S)=\begin{pmatrix}m\left(\frac{R^2}{2}+\frac{5r^2}{8}\right) & 0 & 0\\ 0 & m\left(\frac{R^2}{2}+\frac{5r^2}{8}\right) & 0\\ 0 & 0 & m\left(R^2+\frac{3r^2}{4}\right)\end{pmatrix}_{(B)}$$