B – CINETIQUE

1. TORSEUR CINETIQUE

Notations importantes:

Sur ce document on notera: ***(E)*** = Ensemble quelconque (déformable ou non) ***(S)*** = Solide indéformable

1.1. Résultante cinétique ou quantité de mouvement

La résultante cinétique du système ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère ***R*** est :

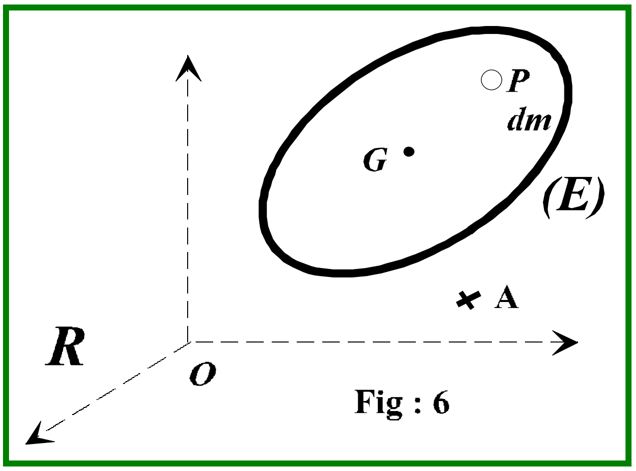

Fig : 6

Calcul de $\boldsymbol{R_C}(\overrightarrow{\boldsymbol{E/R}})$: $\overrightarrow{VP,E/R} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP})_R$

☞ **Relation 1**

1.2. Moment cinétique

Le moment cinétique du système matériel ***(E)*** dans son mouvement par rapport à R, exprimé au point O est:

Calcul de $\boldsymbol{\sigma_A}(\overrightarrow{\boldsymbol{E/R}})$:

$$\overrightarrow{\sigma_A(E/R)} = \int_E \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{VP,E/R}\,.\,dm \quad =$$

☞ **Relation 2**

1.3. Définition du torseur cinétique

Le moment cinétique vérifie la relation de changement de point d'un torseur, il existe donc un torseur relatif au champ des moments cinétiques du système matériel ***(E)*** dans son mouvement par rapport à ***R***.

1.4. Calcul du moment cinétique dans le cas du mouvement d'un solide par rapport à un repère

Dans ce paragraphe le système matériel étudié est un **solide indéformable**, il sera noté ***(S).***

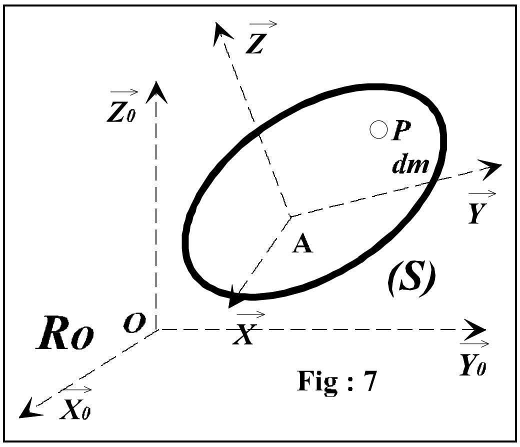

Fig : 7

- Un solide ***(S)*** de masse ***m*** est en mouvement par rapport à un repère $R_0 = (O, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, \overrightarrow{Z_0})$.
- ***A*** est un point appartenant au solide ***(S).***
- On définit le repère $R = (A, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ lié au solide ***(S)***
- Définition des coordonnées de $\overrightarrow{AP}$ (***P*** est un point courant de ***S***) et $\overrightarrow{\Omega S/R_0}$ dans le repère ***R***:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{Bmatrix}_R \quad ; \quad \overrightarrow{\Omega S/R_0} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_R$$

Calcul de $\sigma_A(\overrightarrow{S/R_0}) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{VP, S/R_0} \, . \, dm$

A et ***P*** appartiennent à ***(S)*** $\Rightarrow \overrightarrow{VP, S/R_0} = \overrightarrow{VA, S/R_0} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega S/R_0}$

$$\Rightarrow \sigma_A(\overrightarrow{S/R_0}) = \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega S/R_0}).dm}_{(2)} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{VA, S/R_0}.dm}_{(1)}$$

☞ Relation 3

Cas particuliers

- Le point ***A*** est fixe par rapport à R_0

- Le point ***A*** est le centre de gravité du solide

A partir de là on calculera

- Le solide ***(S)*** est en rotation autour d'un axe fixe

  * Si l'axe $(O, \vec{Z})$ est l'axe de rotation du solide ***(S)*** par rapport à R_0, on a alors:

$$\overrightarrow{\Omega S/R} = \dot{\theta}\ \vec{Z}$$

- Si ***A*** est sur l'axe de rotation: (***A*** est donc fixe par rapport à R_0), alors

- Si de plus ***E = D = 0*** (cas très courant pour un solide qui tourne autour d'un axe), alors:

Conseils

2. TORSEUR DYNAMIQUE

2.1. Résultante dynamique ou quantité d'accélération

La résultante dynamique du système ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère ***R*** est :

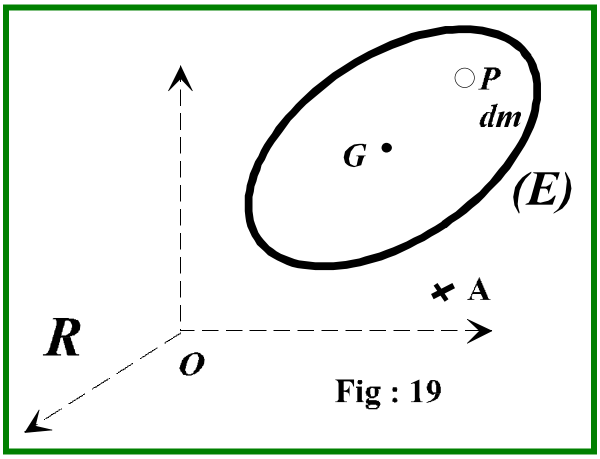

Fig : 19

Calcul de $\overrightarrow{R_D(E/R)}$:

$$\overrightarrow{R_D(E/R)} = \int_E \frac{d}{dt}(\overrightarrow{VP,E/R})_R \, . dm$$

Relation 1-A- ➔

Relation 4 -A- ➔

☞ **Relation 4**

2.2. Moment dynamique

Le moment dynamique du système matériel ***(E)*** dans son mouvement par rapport à ***R***, exprimé au point ***O*** est:

Calcul de $\overrightarrow{\delta_A(E/R)}$:

$$\overrightarrow{\delta_A(E/R)} = \int_E \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}(P, E/R) \, . dm$$

☞ **Relation 5**

2.3. Torseur Dynamique

Le moment dynamique vérifie la relation de changement de point d'un torseur, il existe donc un torseur relatif au champ des moments dynamiques du système matériel ***(E)*** dans son mouvement par rapport à ***R***.

2.4. Relation entre $\overrightarrow{\sigma_A(E/R_0)}$ et $\overrightarrow{\delta_A(E/R_0)}$

Dérivation de l'expression de $\overrightarrow{\sigma_A(E/R)}$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_A(E/R)}\right]_R}_{(1)} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\int_E \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{VP,E/R}\,.\,dm\right]_R}_{(2)}$$

(2) ➔ $= \int_E \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{VP,E/R}\right]_R .\,dm = \underbrace{\int_E \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP}\right]_R \wedge \overrightarrow{VP,E/R}\,.\,dm}_{(2a)} + \underbrace{\int_E \overrightarrow{AP} \wedge \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{VP,E/R}\right]_R .\,dm}_{(2b)}$

(2a) ➔ $= \int_E \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right]_R \wedge \overrightarrow{VP,E/R}\,.\,dm = \int_E (\overrightarrow{VP,E/R} - \overrightarrow{VA/R}) \wedge \overrightarrow{VP,E/R}\,.\,dm = -\overrightarrow{VA/R} \wedge \int_E (\overrightarrow{VP,E/R})\,.\,dm$

(2a) ➔ $= -\overrightarrow{VA/R} \wedge (\overrightarrow{VG,E/R}) \cdot m$

(2b) ➔ $= \overrightarrow{\delta_A(E/R)}$

La relation devient:

☞ **Relation 6**

Remarques:

- La relation 6 est valable pour un point ***A*** quelconque et un système matériel ***(E)*** quelconque
- La vitesse $\overrightarrow{VA/R}$ est la vitesse du point ***A*** par rapport au repère ***R***, cette vitesse est calculée à partir de la dérivée du vecteur position du point ***A*** par rapport au repère ***R*** .
- Le repère R sera souvent le repère Rg galliléen.

2.5. Cas particuliers

- Si le point ***A*** est fixe dans le repère ***R:***

- Si le point ***A*** est confondu avec le centre de gravité ***G*** de ***(E):***

- Si E est en rotation autour de Z et si on veut avoir l'équation de mouvement, on est amené à dériver par rapport au temps et dans $\boldsymbol{R_0}$, la composante sur Z du moment cinétique. On utilisera la remarque suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_A(E/R_0)}\cdot\vec{Z}\right]_{R_0} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{\sigma_A(E/R_0)}\right]_{R_0}\cdot\vec{Z} + \overrightarrow{\sigma_A(E/R_0)}\cdot\frac{d}{dt}\left(\vec{Z}\right)_{R_0}$$

donc, la composante sur Z du moment dynamique est :

Conseils