- C - PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Le principe fondamental de la dynamique établit une relation entre le mouvement d'un ensemble matériel et les actions mécaniques qui lui sont appliquées. Il permet d'exprimer et de prévoir avec une excellente précision les phénomènes mécaniques classiques.

1. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

1.1. Enoncé:

Il existe au moins un repère, noté ***Rg***, appelé repère galiléen ou absolu, et au moins une chronologie, appelée chronologie galiléenne ou absolue, tels que, pour tout système matériel ***(E),*** le torseur dynamique de ***(E)*** dans son mouvement par rapport à ***Rg***, soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures appliquées à ***(E).***

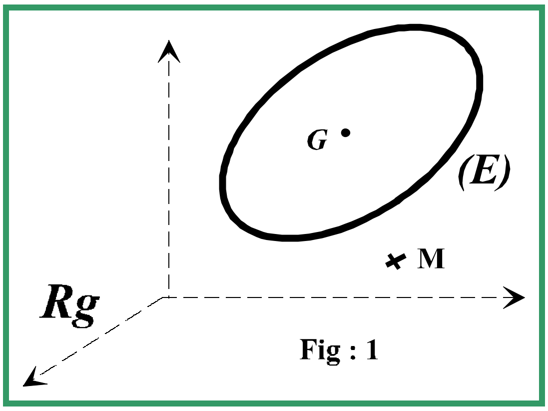


Fig : 1

☞ **Relation 14**

1.2. Repère galiléen:

Un repère lié à la terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen pour les problèmes que nous allons étudier.

Remarque:

Pour un mouvement que l'on étudie sur un temps assez long (pendule de Foucault), ou pour un mouvement très rapide (gyroscope tournant à grande vitesse), cette approximation n'est plus bonne.

1.3. Chronologie:

Elle est obtenue par les horloges classiques (oscillation d'un quartz).

1.4. Théorèmes généraux de la dynamique

1.4.1. Théorème de la résultante dynamique

La résultante dynamique du système ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère ***Rg*** est égale à la somme des forces extérieures appliquées sur ***(E).***

☞ **Relation 15**

Remarque:

Une force de ***un Newton*** est la force qui provoque une accélération de **1** m.s^{-2} au centre d'inertie d'un ensemble matériel ayant une masse de **1** kg.

1.4.2. Théorème du moment dynamique

Le moment dynamique au point ***M*** du système ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère ***Rg*** est égal à la somme des moments en ***M*** des actions mécaniques extérieures appliquées sur ***(E).***

☞ **<u>Relation 16</u>**

- Les deux relations 15 et 16 conduisent, en projection sur trois directions indépendantes, à au plus six équations scalaires.
- Ces équations sont des équations différentielles du second ordre, non linéaires en général. Il est souvent difficile de trouver une solution à ce système d'équations sans un outil informatique performant.

1.5. Equations de mouvement

Une équation de mouvement est une équation différentielle du second ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure ***aucune composante inconnue*** d'action mécanique.

Il est parfois nécessaire d'écrire plusieurs équations pour trouver par substitution une équation de mouvement.

1.6. Intégrale première du mouvement

C'est une équation différentielle du premier ordre avec un second membre constant, obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

Il est conseillé de mettre en évidence les intégrales premières lorsqu'elles existent

2. THÉORÉME DES ACTIONS RÉCIPROQUES

Soit un système matériel ***(E)*** en mouvement par rapport à ***Rg***, on a:

$(E) = (E_1) + (E_2)$

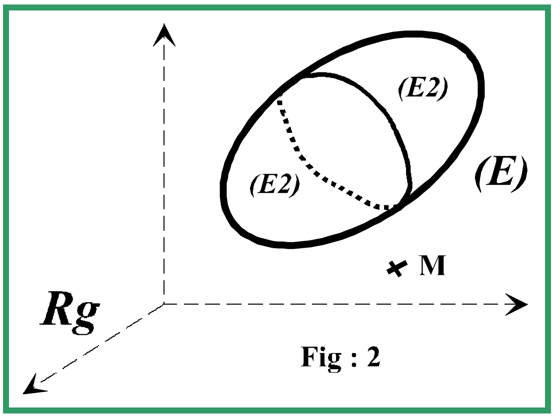


Fig : 2

Principe fondamental de la dynamique appliqué à *(E₁)*:

relation a =

$$\{D_{M(E_1/Rg)}\} = \{\tau_{M(\overline{E_1}/E_1)}\} = \{\tau_{M(\overline{E}/E_1)}\} + \{\tau_{M(E_2/E_1)}\}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à *(E₂)*:

relation b =

$$\{D_{M(E_2/Rg)}\} = \{\tau_{M(\overline{E_2}/E_2)}\} = \{\tau_{M(\overline{E}/E_2)}\} + \{\tau_{M(E_1/E_2)}\}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à *(E)*:

relation c =

$$\{D_{M(E/Rg)}\} = \{\tau_{M(\overline{E}/E)}\}$$

La somme des trois équations donne:

$$\{\mathcal{D}_M(E/Rg)\} + \underbrace{\{\mathcal{D}_M(E_1/Rg)\} + \{\mathcal{D}_M(E_2/Rg)\}}_{\{\mathcal{D}_M(E/Rg)\}} =$$

$$\{\tau_M(\overline{E}/E)\} + \underbrace{\{\tau_M(\overline{E}/E_1)\} + \{\tau_M(\overline{E}/E_2)\}}_{\{\tau_M(\overline{E}/E)\}} +$$

$$\{\tau_M(E_1/E_2)\} + \{\tau_M(E_2/E_1)\}$$

$$2\{\mathcal{D}_M(E/Rg)\} = 2\{\tau_M(\overline{E}/E)\} + \{\tau_M(E_1/E_2)\} + \{\tau_M(E_2/E_1)\}$$

la relation c permet de conclure:

Théorème:

L'action mécanique du sous ensemble ***(E2)*** sur le sous ensemble ***(E1)*** est opposée à l'action mécanique de ***(E1)*** sur ***(E2).***

3. RÉSOLUTION D'UN PROBLÉME

On peut rencontrer trois types d'études:

3.1. Etude du mouvement d'un système

Connaissant un certain nombre d'actions mécaniques extérieures appliquées sur un système ***(E),*** on cherche à déterminer son mouvement.

- Rechercher les équations particulières qui n'introduisent pas d'inconnues de liaison.
  Exemple: Pour un solide en liaison pivot parfait par rapport à un repère galiléen, l'équation des moments autour de l'axe de rotation permet de connaître la vitesse de rotation du solide autour de l'axe de rotation en fonction du couple appliqué (couple connu).
- Rechercher autant d'équations de mouvement que de paramètres cinématiques inconnus.
- Si la projection du moment dynamique suivant un vecteur $\vec{U}$ (fixe par rapport à R_g) est nulle et que le moment en M des actions extérieures est nul, alors déterminer l'intégrale première du mouvement:

$$\overrightarrow{\delta_M}(E/Rg).\vec{U} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_M}(E/Rg).\vec{U}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\sigma_M}(E/Rg).\vec{U} = C$$

(C constante dépendant des conditions initiales)

3.2. Recherche d'une action mécanique particulière

Connaissant le mouvement du système on cherche une action mécanique particulière.

- Rechercher l'équation particulière qui n'introduit pas d'inconnue de liaison.
  Exemple: Somme des moments autour de l'axe de rotation pour un solide en liaison pivot, pour rechercher le couple qui anime le solide.
- Ecrire le moins d'équations possibles.

3.3. Recherche d'un ensemble d'actions mécaniques inconnues:

Ecrire autant d'équations que d'inconnues recherchées.

3.4. Cas particuliers:

3.4.1. Statique

Le système matériel ***(E)*** est en équilibre par rapport au repère ***Rg*** $\Rightarrow \left\{ \mathcal{D}_M(E/Rg) \right\} = 0$

$\Rightarrow$

3.4.2. Masse négligeable

Une telle hypothèse simplificatrice est souvent faite lorsque les effets de masse sont négligeables devant les efforts appliqués $\Rightarrow \left\{ \mathcal{D}_M(E/Rg) \right\} = 0$

$\Rightarrow$

3.4.3. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Hypothèses:

- Le repère $Rg = (O, \overrightarrow{Xg}, \overrightarrow{Yg}, \overrightarrow{Zg})$ est galiléen.
- Le solide ***(S),*** de masse ***m***, est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{Zg})$ avec le bâti ***(0).*** Le repère $R = (O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Zg})$ est lié à ***(S).*** On pose $\theta = (\overrightarrow{Xg}, \overrightarrow{X})$.
- La vitesse de rotation de ***(S)*** par rapport à ***Rg*** est constante: $\dot{\theta} = cst$
- Le centre d'inertie ***G*** du solide ***(S)*** est sur l'axe de rotation.
- L'axe $(O, \overrightarrow{Zg})$ est un axe principal d'inertie de (S), on en déduit la matrice d'inertie

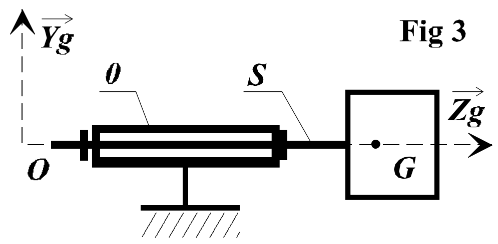


Fig 3

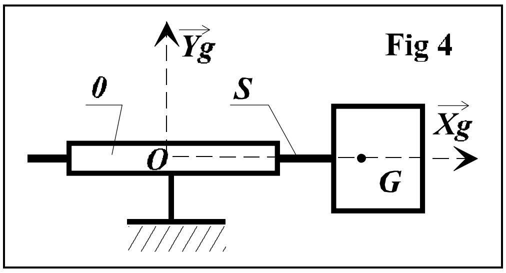
$$\left(I_O(S) \right)_R = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

<u>**Calcul du torseur dynamique**</u> :

3.4.4. Mouvement de translation suivant un axe fixe

Hypothèses:

- Le repère $\boldsymbol{Rg = (O, \overrightarrow{Xg}, \overrightarrow{Yg}, \overrightarrow{Zg})}$ est galiléen.
- Le solide ***(S),*** de masse ***m***, est en liaison glissière d'axe $\boldsymbol{(O, \overrightarrow{Xg})}$ avec le bâti ***(0).*** Le repère $\boldsymbol{R = (O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})}$ est lié à ***(S).*** On pose $\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = x.\overrightarrow{Xg}}$.



<u>Calcul du torseur dynamique</u> :

<u>Conseils</u>	**Définir le système isolé.** **Faire un bilan détaillé des actions mécaniques extérieures.** **Parmi ces actions mécaniques, localiser les actions connues et inconnues.** **Chercher l'équation qui n'introduit que l'inconnue recherchée (cinématique pour l'équation de mouvement), (statique pour déterminer l'action d'un actionneur).** **Rechercher les intégrales premières du mouvement pour obtenir des équations plus simples**.

4. MOUVEMENT PAR RAPPORT A UN REPÈRE QUELCONQUE

Rg = Repère galiléen

R = Repère mobile par rapport à ***Rg***

(E) =Système matériel mobile par rapport à ***R*** et ***Rg***

Si le mouvement de ***(E)*** est plus simple dans le repère ***R***, ou si le repérage de ***(E)*** est difficile dans ***Rg***, alors on étudie le mouvement du système par rapport au repère non galiléen ***R***.

<u>Exemples</u>: Etude du déplacement d'une pièce dans un pot vibrant, étude d'un système embarqué dans un satellite,...

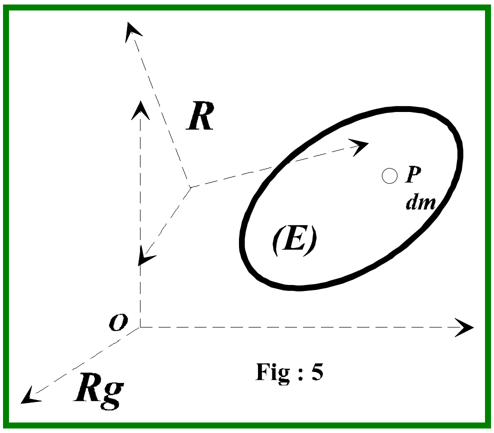


Fig : 5

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ***(E)*** dans son mouvement par rapport à ***Rg*** donne:

$$\left\{\mathcal{D}_O(E/Rg)\right\} = \left\{\mathcal{T}_O(\overline{E}/E)\right\} = \begin{Bmatrix} \int_E \overrightarrow{\Gamma P,E/Rg}.dm \\ \int_E \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\Gamma P,E/Rg}.dm \end{Bmatrix}$$

La composition des accélérations permet d'écrire:

$$\overrightarrow{\Gamma P,E/Rg} = \overrightarrow{\Gamma P,E/R} + \overrightarrow{\Gamma P,R/Rg} + 2\overrightarrow{\Omega R/Rg} \wedge \overrightarrow{VP,E/R}$$

$$\underbrace{\left\{\mathcal{D}_O(E/Rg)\right\}}_{(a)} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \int_E \overrightarrow{\Gamma P,E/R}.dm \\ \int_E \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\Gamma P,E/R}.dm \end{Bmatrix}}_{(b)} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \int_E \overrightarrow{\Gamma P,R/Rg}.dm \\ \int_E \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\Gamma P,R/Rg}.dm \end{Bmatrix}}_{(c)} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \int_E 2\overrightarrow{\Omega R/Rg} \wedge \overrightarrow{VP,E/R}.dm \\ \int_E \overrightarrow{OP} \wedge (2\overrightarrow{\Omega R/Rg} \wedge \overrightarrow{VP,E/R}.dm) \end{Bmatrix}}_{(d)}$$

(a) ➔ Torseur dynamique de ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère galiléen ***Rg***

(b) ➔ Torseur dynamique de ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère non galiléen ***R*** $\left\{\mathcal{D}_O(E/R)\right\}$

(c) ➔ Torseur dynamique d'entraînement de ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère galiléen ***Rg*** $\left\{\mathcal{D}_{O\,ent}(E,R/Rg)\right\}$

(d) ➔ Torseur dynamique des effets de Coriolis de ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère galiléen ***Rg*** $\left\{\mathcal{D}_{O\,Corolis}(E,R/Rg)\right\}$

Le principe fondamental de la dynamique s'applique relativement à tout repère, à condition de retrancher au torseur des actions mécaniques extérieures, le torseur des effets d'inertie d'entraînement et le torseur des effets d'inertie de Coriolis.

☞ **<u>Relation 17</u>**

Conseil	