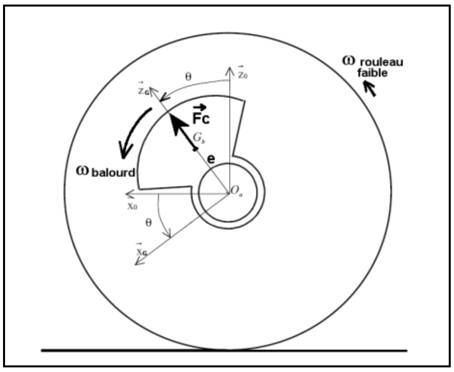
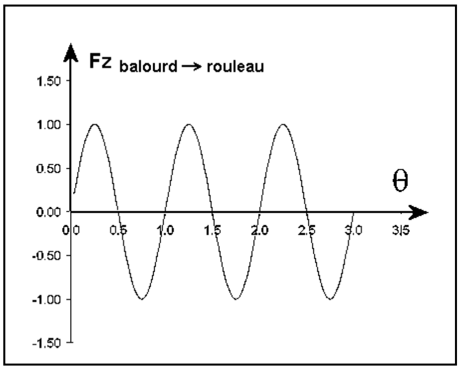
- D - ÉQUILIBRAGE DES ROTORS

1. PRESENTATION

Lorsqu'un solide est entraîné en rotation autour d'un axe fixe, et qu'il possède une **mauvaise répartition de matière autour de l'axe de rotation,** l'application du Principe Fondamental de la Dynamique permet de montrer**, que des forces centrifuges tournantes, s'exercent sur ce solide ;**





$\boxed{Fz_{balourd \to rouleau} = M_b.e.(\omega_b)^2.\cos(\theta)}$ (projection sur Z_0 de l'action « centrifuge » Fc)

Les vibrations provoquées par le balourd tournant sont, dans ce cas, utiles au compactage du sol ;

Par contre, dans la plupart des applications où des solides sont entraînés en rotation, ces forces tournantes sont indésirables car elles provoquent des vibrations nuisibles ; celles-ci peuvent engendrer une détérioration rapide des paliers (fatigue du matériau et usure), ainsi qu'une gène pour l'utilisateur du matériel.

Exemple : arbre de compresseur de réacteur

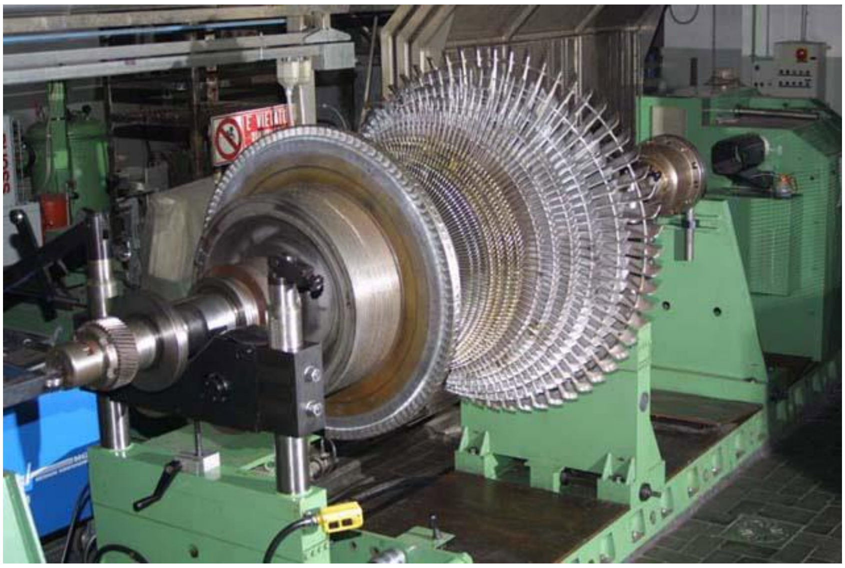


image : http://www.kelvin.it/fran/attivita/attivita_equilibrat.htm

Pour supprimer ces vibrations dues aux masses mal réparties, on réalise un **équilibrage statique et dynamique**. Cet équilibrage est d'autant plus nécessaire que la vitesse de rotation est grande.

Les solutions correctives « d'équilibrage des rotors » sont réalisées par ajout de matière (masses d'équilibrage) ou enlèvement de matière (perçages ou meulages).

Exemples : roue de voiture, rotor de moteur électrique, vilebrequin ...


image : F_WEISS

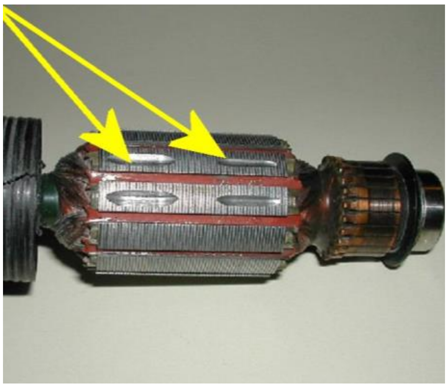


image : B_EGO


image : http://perso.numericable.fr/~promitiphi24/Tigrax16xe/Site/Preparation.htm

Ces opérations d' « équilibrage » sont en général effectuées sur des « **machines d'équilibrage** » qui mesurent les déformations ou les efforts variables générés par le rotor lors de sa rotation sur le support :

Machine d'équilibrage de roues d'auto

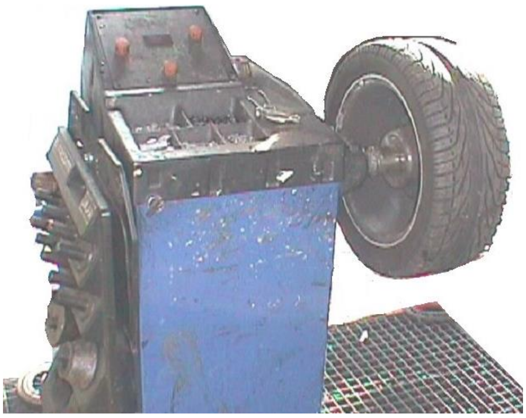


image : F_WEISS

Machine d'équilibrage de rotors de moteurs électriques


image : http://www.sie.fr/plaquette/bobinage_reparation/cadre_plaquette_activite.html

L'équilibrage est parfois réalisé sur site avec des analyseurs portatifs :
Ces appareils permettent de déterminer rapidement l'état de déséquilibre des machines et installations.
Ils permettent de procéder à l'équilibrage statique ou dynamique de rotors, sans avoir à les déposer, et à un prix particulièrement attractif.

Ils utilisent en général les informations fournies par des accéléromètres et un capteur de vitesse angulaire.

image : http://www.schenck.net/rotec/smart/fr/geraet/index.html

L'objectif de l'étude qui suit est de :

- Exprimer de façon pratique les conditions qui définissent le fait qu'un solide soit « équilibré » (§3) ;
- Déterminer l'expression des inconnues de l'équilibrage (§ 4) ;
- Exprimer les relations mathématiques entre les paramètres du problème, de façon à permettre la programmation du calculateur d'une machine d'équilibrage (§ 5).

2. PARAMÉTRAGE DU PROBLEME

La figure (1) définit un rotor ***(1)*** en liaison pivot avec le support ***(0)*** ; On définit :

- **le bâti** ***(0)*** auquel on lie le repère $R_O = (O, \overrightarrow{X_O}, \overrightarrow{Y_O}, \overrightarrow{Z_O})$; on le suppose galiléen, l'axe $(O, \overrightarrow{Z_O})$ est vertical ascendant.

- **le rotor** ***(1)*** en liaison pivot parfaite avec ***(0)*** d'axe $(O, \overrightarrow{Y_O})$. Le repère $R_1 = (O, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Z_1})$ lié au solide ***(1)*** est défini par $\overrightarrow{Y_O} = \overrightarrow{Y_1}$ et sa position angulaire est définie par $(\overrightarrow{X_O}, \overrightarrow{X_1}) = \theta$.

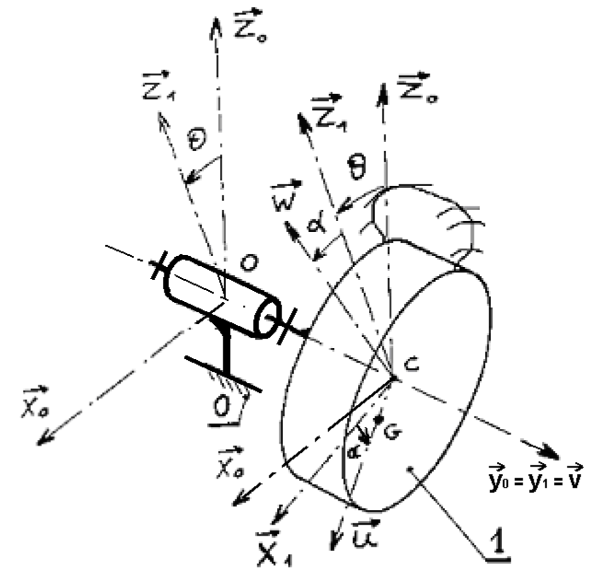


Figure 1 : paramétrage

Soit ***G*** le centre de gravité de l'ensemble tournant ***(1)***.

On définit un repère complémentaire $R'_1 = (C, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ lié à ***(1)*** tel que $(O, \overrightarrow{v}) = (O, \overrightarrow{Y_0})$ et $\overrightarrow{OG} = l\,\overrightarrow{Y_0} + a\,\overrightarrow{u}$.

La position angulaire de R'_1 par rapport à R_1 est définie par $\boxed{(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{u}) = \alpha = constante}$.

On notera $\dot{\theta}$ la dérivée première de θ par rapport au temps, pour simplifier les calculs on supposera $\dot{\theta}$ = ***constante***.

La matrice d'inertie de ***(1)*** au point ***O*** dans le repère R'_1 est notée :

$$[I_O(1)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R'_1 = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

Le moteur entraîne le rotor ***(1)*** en rotation, l'action du moteur sur ***(1)*** est notée $C_m\,\overrightarrow{Y_0}$.

3. EXPRESSION DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRAGE

Définition de l'équilibrage dynamique d'un rotor

Un rotor est équilibré dynamiquement si les actions mécaniques dans la liaison pivot (1/0) sont indépendantes de la position angulaire de (1) quel que soit le mouvement de rotation du rotor

Actions dans la liaison pivot en O:

Les éléments de réduction en O du torseur des actions du bâti *(0)* sur l'arbre *(1)* sont : $\overrightarrow{F\,0\to1}$ et $\overrightarrow{M_o\,0\to1}$.

tels que : $\boxed{\vec{F}0\to1 = m.g.\vec{Z}_0 - m.a.\dot{\theta}^2\vec{U}}$ et $\boxed{\vec{M}_o0\to1 = -C_m\vec{Y}_0 + l.m.g.\vec{X}_0 - a.m.g.\cos(\alpha+\theta).\vec{Y}_0 + F.\dot{\theta}^2.\vec{W} - D.\dot{\theta}^2.\vec{U}}$

Démonstration :

En projection sur les axes Z0 et X0 ces équations deviennnent :

$$Fz_{0->1} = m.g + m.a.\dot{\theta}^2.\sin(\theta+\alpha) \quad \text{et} \quad Fx_{0->1} = -m.a.\dot{\theta}^2.\cos(\theta+\alpha)$$

$$Mz_{0->1} = F.\dot{\theta}^2.\cos(\theta+\alpha) + D.\dot{\theta}^2.\sin(\theta+\alpha) \quad \text{et} \quad Mx_{0->1} = l.m.g + F.\dot{\theta}^2.\sin(\theta+\alpha) - D.\dot{\theta}^2.\cos(\theta+\alpha)$$

et de plus (projection de l'équation de moments sur Y0) : $\boxed{C_m = -a.m.g.\cos(\alpha+\theta)}$

Le rotor sera équilibré si les actions de *(0)* sur *(1)* sont aussi constantes que possible, donc indépendantes de la position de *(1)*, c'est à dire de **θ**.

- La résultante $\overrightarrow{F\,0\to1}$ est indépendante de **θ**si

☞ **Condition d'équilibrage statique**	**Un rotor est équilibré statiquement si son**

- Le moment $\overrightarrow{M_o\,0\to1}$ est indépendant de **θ** si

☞ **Condition d'équilibrage dynamique**	**Un rotor est équilibré dynamiquement si son et si cet**

Remarques :

- Dans un équilibrage statique, seule la résultante des actions de **(0)** sur **(1)** est indépendante du mouvement du rotor par rapport au bâti.
- Si le calcul est fait avec un mouvement de rotation accéléré, les conclusions seront les mêmes.
- La matrice d'inertie n'est pas obligatoirement diagonale pour avoir l'équilibrage dynamique : $[I_O(1)] = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1'=(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$

4. EXPRESSION DES INCONNUES DE L'ÉQUILIBRAGE DYNAMIQUE

Pour que le centre de gravité du rotor soit sur l'axe de rotation il est nécessaire de fixer **une masse** complémentaire sur le rotor.

Pour que l'axe de rotation soit un axe principal d'inertie il est nécessaire de fixer **une deuxième masse** sur le rotor.

Ces deux masses sont fixées aux points M1 et M2, sur deux cercles de rayons r_1 et r_2 centrés autour de l'axe de rotation, et dans deux plans de position (y1 et y2) ; **à ce stade de l'étude r_1, r_2, y1 et y2 sont supposés inconnus.** (Remarque : on pourra aussi enlever les mêmes masses aux points N_1 et N_2 symétriques des points M_1 et M_2 par rapport à l'axe de rotation).

4.1 Paramétrage : (fig 2)

- La masse m_1 est fixée au point M_1 défini par

$$\overrightarrow{OM_1} = y_1\overrightarrow{Y_1} + r_1\overrightarrow{u_1} = r_1\cos\alpha_1\,\vec{u} + y_1\overrightarrow{Y_1} - r_1\sin\alpha_1\,\vec{w}$$

- La masse m_2 est fixée au point M_2 défini par

$$\overrightarrow{OM_2} = y_2\overrightarrow{Y_1} + r_2\overrightarrow{u_2} = r_2\cos\alpha_2\,\vec{u} + y_2\overrightarrow{Y_1} - r_2\sin\alpha_2\,\vec{w}$$

- Les masses m_1 est m_2 sont supposées ponctuelles.
- La matrice d'inertie au point O dans le repère R_1' **du nouveau solide** $(1')=(1+m_1+m_2)$ est notée :

$$[I_O(1')] = \begin{bmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{bmatrix}_{R_1'=(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

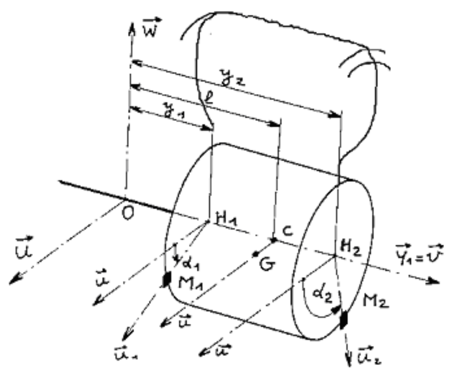


Figure 2 : paramétrage des deux masselottes

4.2 Étude de l'équilibrage:

Inconnues de l'étude:

La réalisation de l'équilibrage à l'aide des masses m_1 et m_2 nécessite la connaissance de 8 paramètres :

- masse en M_1 : 3 paramètres de position (r_1 , y1, α1) plus la valeur de m_1 .
- masse en M_2 : 3 paramètres de position (r_2 , y2, α2) plus la valeur de m_2 .

4.2.1. Mettre en place, à partir des résultats du §3, les équations qui traduisent l'équilibrage dynamique du solide ***(1')*** écrites dans le repère tournant (u, v, w) :

- Le centre de gravité de (1') est sur l'axe de rotation :

$\overrightarrow{OG'}\bullet\vec{u}=0$ donne

$\overrightarrow{OG'}\bullet\vec{w}=0$

- les produits d'inertie D' et F' sont nuls :

D' = 0 donne :

F' = 0 donne

4.2.2. Peut-on trouver une solution? Que proposez-vous si la résolution est impossible?

4.2.3. Montrer que l'on ne peut pas équilibrer un rotor à partir d'une seule masse (sauf s'il possède un plan de symétrie).

Cas pratique : Les paramètres *r1, r2, y1* et *y2* sont connus (en plus de m et a).

4.2.4. Déterminer les paramètres inconnus α_1, α_2, m_1 et m_2 en fonction des caractéristiques de ***(1)*** et de r_1, r_2, y_1 et y_2.. (à traiter sur feuille de copie).

4.2.5. Les deux masses additionnelles peuvent-elles avoir une même cote y ($y_1 = y_2$) ?

5. DÉTERMINATION DES MASSELOTTES D'ÉQUILIBRAGE

La détermination des masses a été faite en supposant les produits d'inertie ***D*** et ***F*** connus ; or dans la réalité ces deux produits d'inertie sont inconnus.
D'où l'utilisation d'une équilibreuse qui, à partir de la **mesure des efforts sur les paliers**, permet de déterminer ***D*** et ***F*** (et **a, α**), donc les masselottes d'équilibrage et leurs positions.

La liaison pivot est réalisée à partir d'une liaison rotule en ***O*** et d'une liaison linéaire annulaire en ***A (fig.3)*** ; on définit la position de ***A*** par la relation $\overrightarrow{AO} = d\ \overrightarrow{Y_O}$. Les actions mécaniques dans les liaisons sont notées $\overrightarrow{A_{0/1}} = X_A\ \overrightarrow{X_O} + Z_A\ \overrightarrow{Z_O}$ et $\overrightarrow{O_{0/1}} = X_O\ \overrightarrow{X_O} + Y_O\ \overrightarrow{Y_O} + Z_O\ \overrightarrow{Z_O}$.

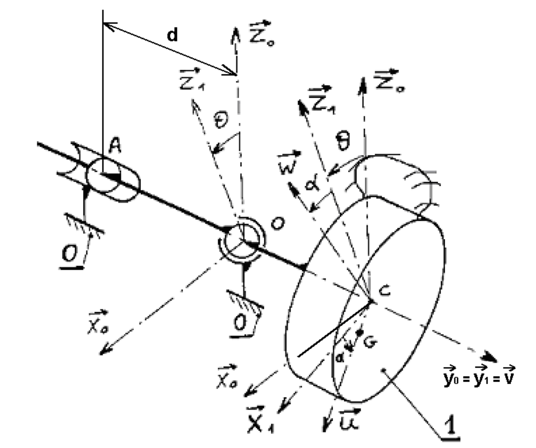


Figure 3 : montage sur deux paliers

la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée au solide tournant telle que : $\vec{OG} = \ell \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{u}$

- masse de M1 = m1 ; position :
$$\vec{OM}_1 = y_1 \cdot \vec{v} + r_1 \cdot \vec{u}_1$$
$$(\vec{u}, \vec{u}_1) = \alpha_1$$

- masse de M2 = m2 ; position :
$$\vec{OM}_2 = y_2 \cdot \vec{v} + r_2 \cdot \vec{u}_2$$
$$(\vec{u}, \vec{u}_2) = \alpha_2$$

L'objectif de l'étude est de déterminer ***a***, ***D***, ***F*** et ***α***, qui sont des inconnues dans les expression des 4 paramètres m1, m2, α1, α2, pour écrire les relations permettant la programmation du calculateur de la machine d'équilibrage. Les données étant les efforts mesurés sur les paliers de la machine.

5.1. A partir de la modélisation faite sur la figure 3, et des équations obtenues au § 3,

et en remplaçant $\overrightarrow{F\,0\to1}$ par $\overrightarrow{A\,0\to1} + \overrightarrow{B\,0\to1}$ et $\overrightarrow{M_o\,0\to1}$ par $\overrightarrow{M_o(O\,0\to1)} + \overrightarrow{M_o(A\,0\to1)}$,

déterminer les 4 équations qui mettent en relation **les efforts mesurés X_A , Z_A et X_O, Z_O**, avec les catactéristiques cinétiques inconues **D, F, a, α**.

En pratique, on n'utilise que deux capteurs sur les machines d'équilibrage ; on considère pour la suite, que ceux-ci donnent par exemple les mesures de $\mathbf{Z_A}$ **et** $\mathbf{Z_O}$.

5.2. Montrer qu'il existe une relation entre les composantes X_A et Z_A ainsi qu'entre X_O et Z_O , et donc qu'en pratique on peut se contenter d'une machine qui ne possède que deux capteurs d'efforts.

5.3. La détermination expérimentale de Z_A et Z_O pour deux valeurs particulières de θ (0° et 90° par exemple donnent $\mathbf{Z_{A(0°)}}$ **;** $\mathbf{Z_{A(90°)}}$ **;** $\mathbf{Z_{O(0°)}}$ **et** $\mathbf{Z_{O(90°)}}$) conduit à un système de quatre équations. En déduire l'expression des caractéristiques cinétiques a, D, F et α en fonction des efforts mesurés pour θ=0° et θ=90°.

L'équation (1') devient pour θ = 0° :

L'équation (1') devient pour θ = 90° :

L'équation (4') devient pour θ = 0° :

L'équation (4') devient pour θ = 90° :

5.4. A partir des résultats trouvés à la question 4.2.4. , déterminer la position (α_1 et α_2) des points M_1 et M_2 ainsi que la valeur des masselottes d'équilibrage (m_1 et m_2) en fonction des efforts mesurés.

en observant que les valeurs de m et l peuvent être connues facilement à partir des mesures des valeurs moyennes sur les capteurs .