ÉNERGÉTIQUE

Objectifs du chapitre :

Ce chapitre définit les notions de **puissance**, de **travail**, **d'énergie** ainsi que les relations qui les relient. A partir de ces théorèmes il sera facile de déterminer la puissance minimale d'un moteur, le rendement d'un mécanisme ...

1- PRELIMINAIRES

Pour fixer les idées voyons ce qui se passe pour un point matériel ; nous étudierons ensuite le cas du solide puis des systèmes de solides :

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel.

Soit un repère galiléen R_g ;

Un point matériel P, de masse m, est soumis à une force $\vec{F}$ et se déplace par rapport à R_g à la vitesse $\overrightarrow{V(P/R_g)}$.

L'énergie cinétique du point matériel, dans son mouvement par rapport à Rg se calcule par :

$$\boxed{Ec(P/Rg) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\vec{V}(P/Rg)\right]^2}$$

La puissance galiléenne (Rg est un repère galiléen) développée par l'action $\vec{F}$ appliquée sur le point matériel se calcule par :

$$\boxed{\mathbf{P}\ (\vec{F}/Rg) = \vec{F} \cdot \vec{V}(P/Rg)}$$

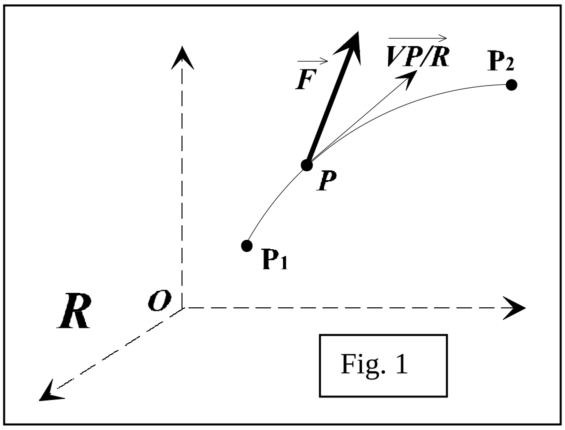


Fig. 1

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

La dérivée par rapport au temps, de l'énergie cinétique du point matériel dans son mouvement par rapport au repère <u>galiléen</u> Rg est égale à la puissance <u>galiléenne</u> développée par l'action qui lui est appliquée.

☞ **<u>Relation 1</u> :** $\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_c(P/R_g)\right)_{Rg} = \mathrm{P}(\vec{F}/R_g)}$

<u>Démonstration :</u>

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au point P donne:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}(P/Rg) \qquad \text{donc :} \quad \vec{F} = m.\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P/Rg)\right]_{Rg}$$

En multipliant les deux termes de cette égalité par $\vec{V}(P/Rg)$, on obtient :

$$\mathbf{P}\ (\vec{F}/R_g) = m.\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P/Rg)\right]_{R_g} . \vec{V}(P/R_g) = m.\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\vec{V}(P/R_g)\right)^2\right]_{R_g} = \frac{d}{dt}\left(E_c(P/R_g)\right)_{Rg}$$

Commentaires :

Le théorème de l'énergie cinétique est obtenu à partir du Principe Fondamental de la Dynamique ; il donnera donc des résultats identiques à ceux donnés par le PFD.
Toutefois nous allons voir que dans le cas des systèmes de solides, le Théorème de l'Energie Cinétique permettra de traiter beaucoup plus rapidement les relations d'entrée-sortie entre les efforts, ou les lois de mouvement de l'ensemble du système.

Nous allons tout d'abord, dans les paragraphes 2 et 3, voir comment on calcule l'énergie cinétique et la puissance dans le cas d'un solide.

2- ENERGIE CINÉTIQUE

2-1 Energie cinétique d'un système matériel quelconque E

L'énergie cinétique de l'ensemble matériel ***(E)*** dans son mouvement par rapport au repère R_0 est le scalaire positif $E_c(E/R_0)$ défini par la relation:

☞ **Relation 2.1 :**

2-2 Energie cinétique d'un solide

Le solide ***(S)***, de masse m, de centre d'inertie G, est en mouvement par rapport à un repère R_0. Soit A un point de ***(S)*** et $R = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ le repère lié au solide.

- On note $\{\mathcal{V}(S/R_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A,S/R) \end{Bmatrix}$ le torseur **cinématique** du solide (S), exprimé au point A, dans son mouvement par rapport à R0.
- On note $\{\mathcal{C}(S/R_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_c(S/R_0) \\ \vec{\sigma}_A(S/R_0) \end{Bmatrix}$ le torseur **cinétique** du solide (S), exprimé au point A, dans son mouvement par rapport à R0.

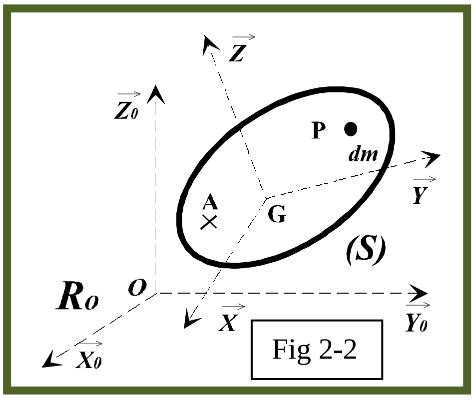


Fig 2-2

L'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R0 se calcule par le demi commoment du torseur cinématique et du torseur cinétique, tous deux étant exprimés en un même point A.

☞ **Relation 2.2 :**

ou encore :

Nota : on cherchera à utiliser le point (A) qui donne les calculs les plus simples.

Démonstration :

Relation 2-1 ➔ $2.E_c(S/R_0) = \int_S \left[\overrightarrow{V(P,S/R_0)}\right]^2 dm$

Les points A et P appartiennent au solide, on a la relation : $\overrightarrow{V(P,S/R_0)} = \overrightarrow{V(A,S/R_0)} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}$

$$2.E_c(S/R_0) = \int_S \overrightarrow{V(P,S/R_0)}.\overrightarrow{V(P,S/R_0)}\, dm$$

$$= \underbrace{\int_S \left[\vec{V}(P,S/R_0).\vec{V}(A,S/R_0)\right] dm}_{(1)} + \underbrace{\int_S \left[\vec{V}(P,S/R_0) . \left(\vec{P}A \wedge \vec{\Omega}(S/R_0)\right)\right] dm}_{(2)}$$

(1) ➔ $= \overrightarrow{V(A,S/R_0)}.\int_S \overrightarrow{V(P,S/R_0)}\, dm = m\cdot \vec{V}(A,S/R_0).\vec{V}(G,S/R_0) = \vec{V}(A,S/R_0).\vec{R}_c(S/R_0)$

(2) ➔ $= \int_S \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}.\left(\overrightarrow{V(P,S/R_0)} \wedge \overrightarrow{PA}\right) dm = \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}.\int_S \left(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V(P,S/R_0)}\right) dm$

$= \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}.\overrightarrow{\sigma_A(S/R_0)}$

$$2.E_c(S/R_0) = \underbrace{\overrightarrow{V(A,S/R_0)}}_{(a)}.\underbrace{\overrightarrow{R_C(S/R_0)}}_{(b)} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega(S/R_0)}}_{(c)}.\underbrace{\overrightarrow{\sigma_A(S/R_0)}}_{(d)}$$

Les éléments ***(a)*** et ***(c)*** sont les composantes du torseur cinématique $\{\mathcal{V}\ (S/R_0)\}_A$

Les éléments ***(b)*** et ***(d)*** sont les composantes du torseur cinétique $\{\mathcal{C}\ (S/R_0)\}_A$

D'où on obtient la relation 2-2.

Cas Particuliers:

- **Si *A* est fixe dans le repère *R₀*:**

  $\Rightarrow \overrightarrow{V(A,S/R_0)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2.E_c(S/R_0) = \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}.\overrightarrow{\sigma_A(S/R_0)}$

  ◊ **Mouvement de rotation quelconque autour de A** :

  ◊ **Mouvement de rotation autour d'un axe fixe :**

  Démonstration : (L'axe $(A, \vec{Z})$ est par exemple axe de rotation : $\overrightarrow{\Omega(S/R_0)} = \dot{\theta}\vec{Z}$)

- **Le point *A* est centre d'inertie de *(S)***

$$2.E_c(S/R_0) = m.\overrightarrow{V(G,S/R_0)}^2 + \overrightarrow{\Omega(S/R_0)}.\overrightarrow{\sigma_G(S/R_0)}$$

◊ **Mouvement de rotation quelconque autour de *G*:**

◊ **Mouvement de rotation autour d'un axe de direction fixe:**

(L'axe $(G,\vec{Z})$ par exemple , $\overrightarrow{\Omega(S/R_0)} = \dot{\theta}\,\vec{Z}$)

- **<u>Le solide *(S) est en mouvement de translation*</u>**

$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0}$ d'où :

2-3 Inertie équivalente

Lorsqu'on détermine littéralement <u>l'énergie cinétique</u> d'un ensemble de solides qui appartiennent à une même chaîne cinématique, on peut en général <u>l'exprimer en fonction d'un seul paramètre cinématique (élevé au carré)</u> ; on fait alors apparaître un terme en facteur de ce paramètre (élevé au carré), qui est « $\frac{1}{2}$ **. Inertie équivalente ».**

Exemple : Chaîne cinématique d'une transmission avec réducteur de vitesse

- Soit (Sm) l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre moteur (en général : rotor moteur, accouplement, pignon menant …) ; on note ωm la vitesse de rotation de l'ensemble (Sm) et Jm son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.
- Soit (Sr) l'ensemble des pièces liées en rotation avec l'arbre récepteur (en général : élément récepteur, pignon mené …) ; on note ωr la vitesse de rotation de l'ensemble (Sr) et Jr son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

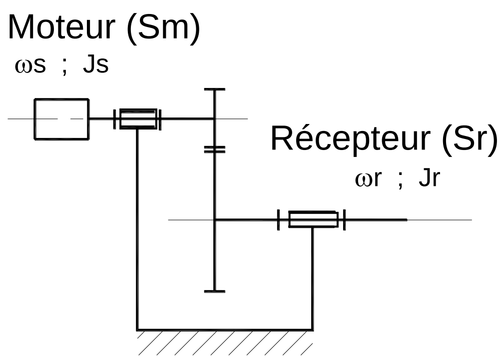


Fig. 2-3

3- TRAVAIL ET PUISSANCE

3-1 Travail d'une force

- La trajectoire de P dans le repère R est la courbe P_1P_2
- Une force $\vec{F}$ est appliquée constamment sur le point matériel P.
- Soit $\overrightarrow{V(P/R)}$ la vitesse de P par rapport à R.

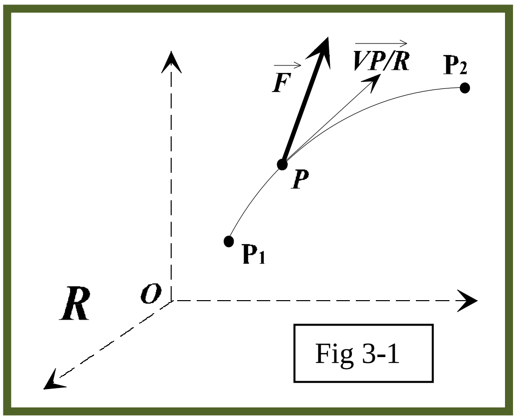


Fig 3-1

Le travail de la force $\vec{F}$ pendant le temps dt est le produit scalaire:

$dW(F/R) = \vec{F}.\overrightarrow{V(P/R)}.dt$, on en déduit le travail de $\vec{F}$ entre P_1 et P_2:

☞ **Relation 3.1 :** $\boxed{W(F/R) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}.\vec{V}(P/R).dt}$

Unité du travail: Dans le système SI, c'est le joule = **J**

3-2 Puissance développée par une force.

La puissance développée par la force $\vec{F}$ à un instant t donné est :

☞ **Relation 2-2 :** $\boxed{\mathbf{P}(F/R) = \frac{d}{dt} W(F/R) = \vec{F}.\vec{V}(P/R)}$

Unité pour la puissance: Dans le système SI, c'est le watt = **W**

On remarque que la puissance est une représentation « instantanée » du travail (ou de l'énergie) fournie par la force $\vec{F}$.

3-3 Puissance développée par un champ d'actions élémentaires sur un solide (S)

Soit un champ d'actions élémentaires $\vec{f}$ exercé sur un solide (S) ;

Exprimons en chaque point P , la **puissance élémentaire** développée par cette action par rapport au repère R :

Si ce champ d'actions est volumique (action de pesanteur).

$$d\mathbf{P}(\vec{f}_v \rightarrow S/R) = \vec{f}_v(P).dm.\vec{V}(P/R)$$

Si ce champ d'action est surfacique (action de contact) :

$$d\mathbf{P}(\vec{f}_s \rightarrow S/R) = \vec{f}_s(P).dS.\vec{V}(P/R)$$

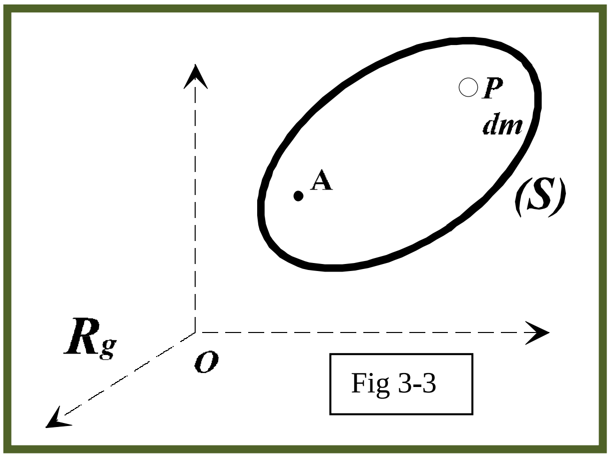


Fig 3-3

La puissance développée par le champ d'action est alors :

☞ **<u>Relation 3.3 :</u>**

$$\boxed{\mathbf{P}\ (\vec{f} \rightarrow S/R) = \int_{Vs} \vec{f}(P)\,.\,\vec{V}(P/R)\ dm}$$ dans le cas d'une action volumique

$$\boxed{\mathbf{P}\ (\vec{f} \rightarrow S/R) = \int_{Ss} \vec{f}(P)\,.\,\vec{V}(P/R)\ dS}$$ dans le cas d'une action surfacique.

3-4 Puissance développée par une action mécanique sur un solide (S)

- Soit $\{\mathbf{V}\ (S/R)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A,S/R) \end{Bmatrix}$ le torseur **cinématique** du solide (S), exprimé au point A, dans son mouvement par rapport à R.

- Soit $\{\mathbf{T}\ (\Sigma \rightarrow S)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}(\Sigma \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(\Sigma \rightarrow S) \end{Bmatrix}$ un torseur d'action mécanique exercée par un système (Σ) sur le solide (S).

La puissance développée par l'action mécanique exercée par le système (Σ) sur le solide (S) (dans son mouvement par rapport au repère R), se calcule par le comoment du torseur cinématique et du torseur d'action, les deux torseurs étant exprimés au même point :

☞ **<u>Relation 3.4</u> :**

ou encore :

Remarque:

La notion de puissance n'a de sens que relativement à un repère, ceci à cause du torseur cinématique. Ainsi la puissance développée par les actions mécaniques de ***(Σ)*** sur ***(S)*** est nulle dans tout repère lié à ***(S)*** (car Le torseur cinématique du mouvement de ***(S)*** par rapport ***(S)*** est nul).

<u>Démonstration :</u>

1er cas : le torseur est un glisseur ; soit P un point de l'axe du glisseur :

$$\mathbf{P}\ (\vec{F} \rightarrow S/R) = \vec{F}.\ \vec{V}(P, S/R)$$

$$= \vec{F}.\vec{V}(A,S/R) + \vec{F}.\left(\vec{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right) = \vec{V}(A,S/R).\vec{F} + \vec{\Omega}(S/R).(\vec{AP} \wedge \vec{F})$$ (C.Q.F.D)

2ème cas : le torseur est défini par son champ d'actions élémentaires agissant sur (S) : soit sur le volume, soit sur des surfaces, soit sur les deux. Pour simplifier la démarche on considère uniquement l'action volumique :

$$\mathbf{P}\,(\vec{f} \rightarrow S/R) = \int_S \vec{f}(P).\ \vec{V}(P,S/R)dm$$ (d'après la relation 3-3)

$$=\int_S \overrightarrow{f(P)}.\overrightarrow{V(A,S/R)}.dm+\int_S \overrightarrow{f(P)}.\left(\overrightarrow{PA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/R)}\right)dm$$

$$=\overrightarrow{V(A,S/R)}.\int_S \overrightarrow{f(P)}\,dm+\overrightarrow{\Omega(S/R)}.\int_S \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{f(P)}\,dm \qquad \text{(C.Q.F.D)}$$

Cas particuliers:

- Le torseur est un **glisseur** : $\left\{\mathcal{T}\ (\Sigma\to S)\right\}_A = \begin{Bmatrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$ alors :
- Le torseur est un **couple** (cas d'un moteur par exemple) :

$$\left\{\mathcal{T}\ (\Sigma\to S)\right\} = \begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{M}_A(\Sigma\to S)\end{Bmatrix}_A \quad \text{alors :}$$

On retrouve dans les deux cas des résultats bien connus.

4- THEOREME DEL'ENERGIE CINETIQUE POUR UN SOLIDE

Un solide ***(S)*** de masse ***m*** est en mouvement par rapport à un repère galiléen $\boldsymbol{R_g}$.

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne du solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions exercées sur (S) :

☞ **Relation 4.0** :

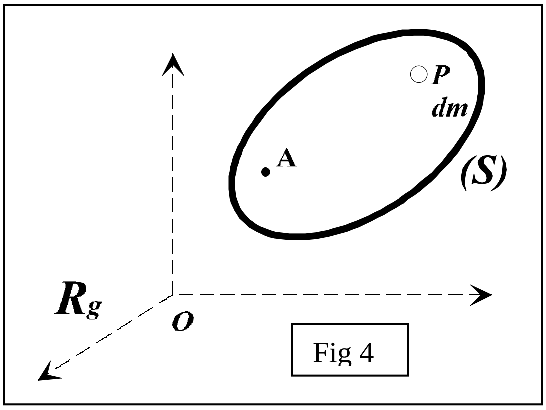


Fig 4

Attention : le repère de référence doit être galiléen !

Démonstration :

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide ***(S)*** donne: $\left\{\mathcal{D}_A(S/R_g)\right\}=\left\{\mathcal{T}_A(\bar{S}/S)\right\}$

On multiple les deux membres par la torseur cinématique:

$$\underbrace{\left\{\mathcal{V}_A(S/R_g)\right\}.\left\{\mathcal{D}_A(S/R_g)\right\}}_{(1)}=\underbrace{\left\{\mathcal{V}_A(S/R_g)\right\}\left\{\mathcal{T}_A(\bar{S}/S)\right\}}_{(2)}$$

(2) ➔ D'après la relation 3.4 on a:

$P(\bar{S}\to S/R_g)=\left\{\mathcal{V}_A(S/R_g)\right\}\left\{\mathcal{T}_A(\bar{S}/S)\right\}$ = puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures.

(1) ➔ Développement du comoment:

$$=\underbrace{\overrightarrow{V(A,S/R_g)}.\int_S \overrightarrow{a(P,S/R_g)}\,dm}_{(a)}+\underbrace{\overrightarrow{WS/R_g}.\int_S \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{a(P,S/R_g)}\,dm}_{(b)}$$

(a) ➔ $=\int_S \overrightarrow{V(A,S/R_g)}.\overrightarrow{a(P,S/R_g)}\,dm$

Les points ***A*** et ***P*** appartiennent au solide ***(S)*** on a la relation: $\overrightarrow{V(A,S/R_g)}=\overrightarrow{V(P,S/R_g)}+\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/R_g)}$

(a)= $\int_S \overrightarrow{V(P,S/R_g)}.\overrightarrow{a(P,S/R_g)}\,dm + \int_S \left(\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{W(S/R_g)}\right).\overrightarrow{a(P,S/R_g)}\,dm$

$= \int_S \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V(P,S/R_g)}\right)^2\right]dm + \int_S \left(\overrightarrow{a(P\,S/R_g)}\wedge\overrightarrow{AP}\right).\overrightarrow{W(S/R_g)}\,dm$

$= \int_S \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V(P,S/R_g)}\right)^2\right]dm - \overrightarrow{W(S/R_g)}.\int_S \overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{a(P,S/R_g)}\,dm$

(1) = (a)+(b) ➔ (1) $= \int_S \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V(P,S/R_g)}\right)^2\right].dm$

La masse étant conservative (voir le cours de Cinétique page 1)

$$\frac{d}{dt}\int_S\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V(P,S/R_g)}\right)^2 dm\right] = \frac{d}{dt}\left(E_c(S/R_g)\right) \qquad \text{(C.Q.F.D)}$$

5- THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE POUR UN ENSEMBLE DE SOLIDES

5-1 Puissance développée par les inter-efforts entre 2 solides.

5-1-1 Définition.

- Deux solides *(S1)* et *(S2)* sont en contact au point ***M***.

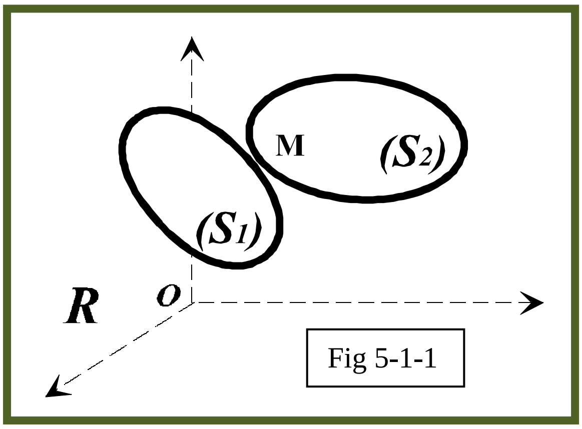


Fig 5-1-1

- La puissance développée par les actions de *(S1)* sur *(S2)* dans le mouvement de *(S2)* par rapport à ***R*** est:
  La relation 3.4 donne:
  $P(S_1 \rightarrow S_2/R) = \{\mathcal{V}_M(S_2/R)\}.\{\mathcal{T}_M(S_1/S_2)\}$
- La puissance développée par les actions de *(S2)* sur *(S1)* dans le mouvement de *(S1)* par rapport à ***R*** est:
  La relation 3.4 donne:
  $P(S_2 \rightarrow S_1/R) = \{\mathcal{V}_M(S_1/R)\}.\{\mathcal{T}_M(S_2/S_1)\}$

La puissance développée par les inter-efforts entre *(S1)* et *(S2)* est
$P(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = P(S_1 \rightarrow S_2/R) + P(S_2 \rightarrow S_1/R)$

comme $\{\mathcal{T}_M(S_2/S_1)\} = -\{\mathcal{T}_M(S_1/S_2)\}$

on a :

$P(S_1 \leftrightarrow S_2/R) =$

$$\{\mathcal{T}_M(S_2/S_1)\}.\left[\{\mathcal{V}_M(S_1/R)\} - \{\mathcal{V}_M(S_2/R)\}\right]$$

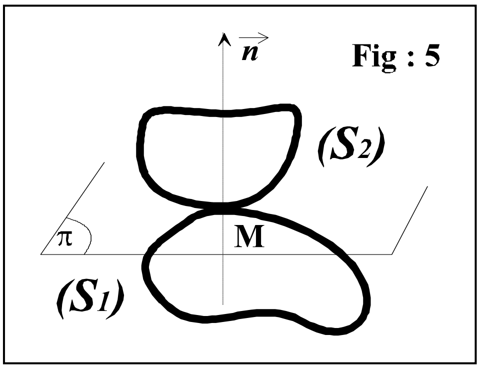
$P(S_1 \leftrightarrow S_2/R) = \{\mathcal{T}_M(S_2/S_1)\}.\{\mathcal{V}_M(S_1/S_2)\}$

Remarque: le torseur cinématique du mouvement de *(S1)* par rapport à *(S2)* est indépendant du repère ***R***, on peut donc simplifier l'écriture de la puissance des inter-efforts:

☞ **Relation 5-1 :**

5-1-2 Cas particulier : Puissance des inter-efforts dans un contact ponctuel

- Deux solides sont en contact au point ***M***.
- Soit $\vec{n}$ la normale au contact et $\vec{T}(1/2)$ l'effort tangentiel au contact.
- Le plan ***(π)*** est tangent à la surface de contact.
- Le contact est géométriquement parfait, sans résistance au roulement et au pivotement.
- Le coefficient de frottement est noté ***f***.



Deux cas particuliers sont possibles :

- $\overrightarrow{T(1/2)} = \vec{0}$: le coefficient de frottement f est nul.
- $\vec{V}(S_2/S_1) = \vec{0}$: la vitesse de glissement au point ***M*** est nulle.

  (Exemple : roulement sans glissement au niveau du contact en ***M***)

Alors : $\mathbf{P}\,(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$

Remarque:

Si les solides ***(S1)*** et ***(S2)*** sont en liaison parfaite (f est nul), alors la puissance des inter-efforts est nulle : $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$,

mais la puissance $P(S_1 \rightarrow S_2/R)$ n'est pas nulle, sauf si le repère ***R*** est lié à ***(S2).***

5-2 Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides.

Soit un ensemble (E) de n solides (S1, (S2) ...(Sn), en mouvement par rapport à un repère galiléen Rg.

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble (E) est égale à la somme des puissance galiléenne des actions extérieures exercées sur l'ensemble (E) et de la puissance des inter-efforts exercée entre les solides de (E).

☞ **Relation 5.2 :**
$$\frac{d}{dt}\left(E_c(E/R_g)\right) = P(\overline{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{\substack{i=1\\ j=2\\ i<j}}^{\substack{i=n-1\\ j=n}} P(S_j \leftrightarrow S_i)$$

Démonstration :

Pour le solide (Si), le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

$$P(\overline{S_i} \rightarrow S_i/R_g) = \frac{d}{dt}\left(E_c(S_i/R_g)\right)$$

Les actions extérieures à (Si) peuvent s'écrire aussi:

$$(\overline{S_i} \rightarrow S_i) = (\overline{E} \rightarrow S_i) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{j=n} (S_j \rightarrow S_i)$$

En ajoutant membre à membre les relations obtenues grâce au théorème de l'énergie cinétique appliqué à chaque solide de l'ensemble (E), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d}{dt}\Big(E_c(S_i/R_g)\Big)\right]=\sum_{i=1}^{i=n}P(\overline{S_i}\rightarrow S_i/R_g)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(E_c(E/R_g)\Big)=\sum_{i=1}^{i=n}P(\overline{E}\rightarrow S_i/R_g)+\sum_{i=1}^{i=n}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{j=n}P(S_j\rightarrow S_i/R_g)\right]$$

Remarques:

- L'équation donnée par le théorème de l'énergie cinétique est déduite du principe fondamental de la dynamique, cette équation n'est donc pas indépendante des équations scalaires fournies par le principe fondamental de la dynamique. Par contre elle se substitue souvent avantageusement à l'une d'entre elles.
- Le théorème de l'énergie cinétique ne fournissant qu'une seule équation, il ne sera pas suffisant pour résoudre un problème à plusieurs inconnues.
- Le principe fondamental de la dynamique ne fait apparaître que les actions mécaniques extérieures. Le théorème de l'énergie cinétique introduit le calcul des puissances des inter-efforts entre les solides, dont les efforts intérieurs au système étudié.

5-3 Forme intégrée du théorème de l'énergie cinétique.

Entre deux dates t_1 et t_2, l'intégration de la relation 5-2 donne:

☞ **Relation 5.3 :**

$$\boxed{\Big(E_c(E/R_g)\Big)_{t_2}-\Big(E_c(E/R_g)\Big)_{t_1}=\overset{t_2}{\underset{t_1}{W}}(\overline{E}\rightarrow E/R_g)+\sum_{\substack{i=1\\ j=2\\ i<j}}^{\substack{i=n-1\\ j=n}}\overset{t_2}{\underset{t_1}{W}}(S_j\leftrightarrow S_i)}$$

Ce théorème sous cette forme est souvent très pratique dans les applications.

6- ÉNERGIE POTENTIELLE

6-1 Fonction de force

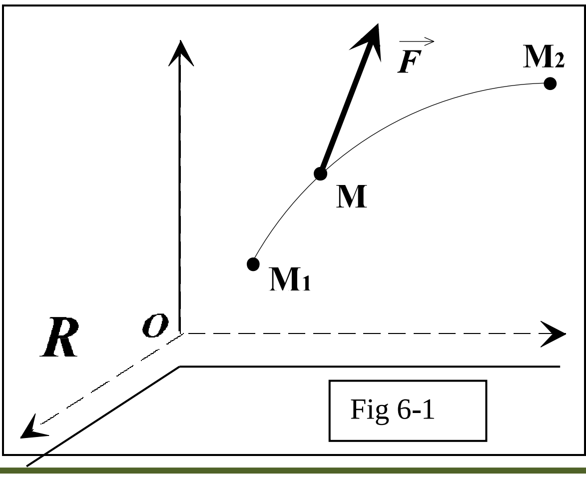


Fig 6-1

Un point matériel ***M*** est mobile par rapport à ***R***, sa trajectoire est ***M₁M₂***. Soit ***(x,y,z)*** les coordonnées de ***M*** dans ***R***.

Le point ***M*** est soumis à une force $\vec{F}$, de coordonnées ***(X,Y,Z)*** dépendant uniquement de la position occupée par ***M*** (***X***, ***Y*** et ***Z*** sont fonction de ***x***, ***y*** et ***z***).

S'il existe une fonction ***U(x,y,z)***, telle que: $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ alors ***U*** est **une fonction de force**.

($\vec{F}$ dérive d'une fonction de force: $\vec{F} = \vec{grad}\ U$)

Exemples: action de la pesanteur, forces électrostatiques, ressort...

Remarque:

Pour des raisons de commodité on est amené à considérer la fonction potentielle ***Ep = - U***.

6-2 Propriétés d'une fonction potentielle.

- Le travail élémentaire de l'action $\vec{F}$ a pour expression:

$$dW = \vec{F}.\vec{dM} \text{ avec } \vec{dM} = (dx, dy, dz)_R$$

$$\Rightarrow \quad dW = Xdx + Ydy + Zdz$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

$$W_{M_1}^{M_2}(\vec{F}/R) = \int_{M_1}^{M_2} dW = \int_{M_1}^{M_2} dU$$

$$= U_{M_2} - U_{M_1} = Ep_{M_1} - Ep_{M_2}$$

☞ **Relation 6-2-1 :**

- La puissance développée par l'action $\vec{F}$ sur ***M*** est:

$$P(\vec{F} \rightarrow M / R) = \frac{dW}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

☞ **Relation 6-2-2 :**

Remarques:

- On constate que ***W*** ne dépend pas du chemin suivi pour aller de ***M₁*** à ***M₂***. Le long d'une courbe fermée le travail de $\vec{F}$ est nul.
- Suivant le signe de ***W***, l'élément matériel fournit ou absorbe du travail.
- ***Ep*** est homogène à une quantité d'énergie, on l'appelle **Energie Potentielle**.

6-3 Exemples.

6-3-1 Energie potentielle de la pesanteur.

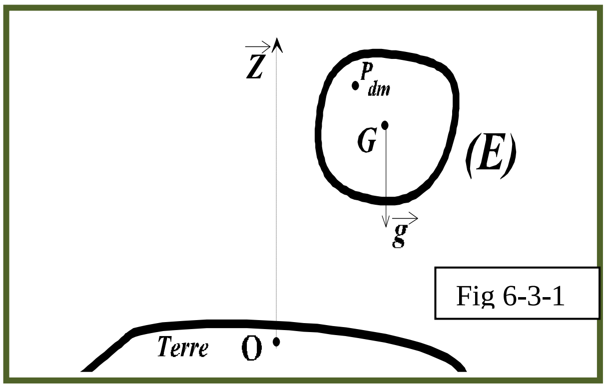


Fig 6-3-1

- ***R*** est un repère lié à la terre.
- ***P*** est un point matériel du système ***(E)***, de masse ***dm***.
- $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.

Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de la pesanteur est :

(avec z ascendant).

6-3-2 Energie potentielle d'un ressort

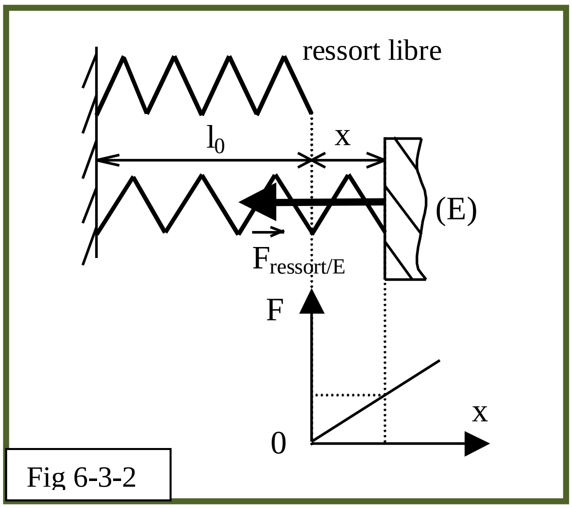


Fig 6-3-2

- l_0 = longueur libre du ressort.
- ***x*** = allongement du ressort
- ***k*** = raideur du ressort

Montrer que l'expression de l'énergie potentielle du ressort en fonction de ***x*** est :

6-4 Intégrale première de l'énergie cinétique.

Si les puissances intervenant dans le théorème de l'énergie cinétique sont nulles (liaisons parfaites) ou si elles dérivent d'une fonction de force notée $U(E/R_g)$ (action d'un ressort, poids, ...) alors les puissances intervenant dans le théorème de l'énergie cinétique s'écrivent:

$$P(\overline{E} \rightarrow E/R_g) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=2 \\ i<j}}^{\substack{i=n-1 \\ j=n}} P(S_j \leftrightarrow S_i) = \frac{d}{dt}\left[U(E/R_g)\right]$$

Si on introduit l'énergie potentielle $Ep(E/R_g) = -U(E/R_g)$, le théorème de l'énergie cinétique devient:

$$\frac{d}{dt}\left[E_c(E/R_g)\right] = -\frac{d}{dt}\left[Ep(E/R_g)\right]$$

☞ **Relation 6-4 :**

C étant une constante réelle déterminée à partir des conditions initiales.

Remarques:

Ce théorème traduit la conservation de l'énergie du système isolé, et montre les transferts d'énergie qui se produisent au cours du mouvement.