

Feuille de TD n°1

Second Degré

1 Étude des fonctions polynômes du second degré

1.1 Fonction polynôme de degré 2

1 Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est une fonction polynôme du second degré et, le cas échéant, donner les valeurs de a , b et c .

1. $f(x) = 2x^2 + 1$
2. $h(x) = (x - 1)(3x + 2)$ (développer)
3. $g(x) = x^3 + 2x^2$
4. $i(x) = (x + 1)^2 - x^2$

1.2 Forme canonique

2 Trouver la forme canonique Donner la forme canonique de chacun des trinômes suivants :

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1. $2x^2 + 6x - 3$ | 5. $x^2 - 6x - 3$ |
| 2. $3x^2 + 2x - 6$ | 6. $x^2 + 10x + 5$ |
| 3. $3x + 4x^2 - 1$ | 7. $3x^2 + 12x + 19$ |
| 4. $0,5x^2 + 0,5 - x$ | 8. $4x^2 - 28x + 24$ |

3 Lien forme canonique avec le graphique

Soit \mathcal{P} la parabole représentant le trinôme défini par $f(x) = x^2 + bx + c$ et S son sommet. On sait que $f(0) = f(6)$ et que $y_S = 4$. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

4 Soit \mathcal{P} la parabole représentant dans un repère orthogonal le trinôme $f(x) = -4(x - 3)^2 + 7$. Déterminer les coordonnées du sommet S de \mathcal{P} .

1.3 Variations

5 Déterminer le sommet et l'axe de symétrie des paraboles d'équations suivantes :

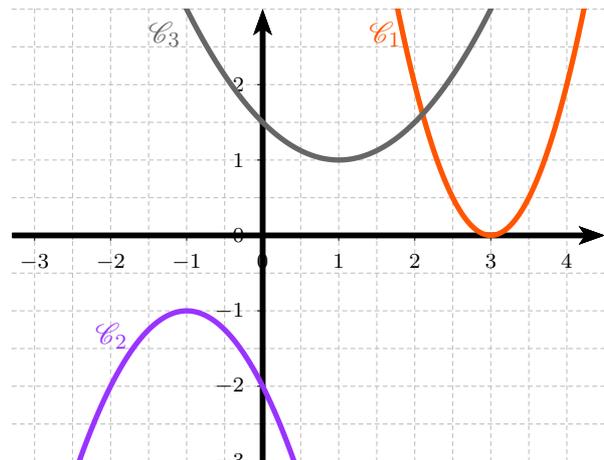
1. $y = -4(x - 3)^2 + 7$
2. $y = 2(x + 1)^2 - 3$

3. $y = -3x^2 + 5$
4. $y = (2x - 4)^2 + 3$

6 Les fonctions f , g et h sont définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -(x + 1)^2 - 1, \quad g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 1 \quad \text{et} \\ h(x) = 2(x - 3)^2$$

On donne ci-dessous leurs courbes représentatives. Associer, en justifiant, chaque fonction, à sa courbe.



7 Un problème d'optimisation (1) :

Un éleveur de chiens souhaite créer un enclos rectangulaire pour ses animaux. Il dispose de 20 m de clôture. Quelles doivent être les dimensions de l'enclos pour que la surface soit maximale ?

1.4 Courbe représentative

8 Axe de symétrie de la parabole :

Soit f la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ et h un nombre réel positif quelconque.

1. Calculer les images de $\alpha - h$ et de $\alpha + h$ en fonction de h .
2. Interpréter graphiquement les nombres $\alpha - h$, $\alpha + h$, $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$.
3. En déduire que la parabole représentative de f admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

9 ** Parabole par foyer et directrice :

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soient \mathcal{D} la droite d'équation $y = 5$ et F le point de coordonnées $F(3; 3)$.

L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points équidistants de \mathcal{D} et de F .

1. (a) Faire une figure
- (b) Placer quelques points qui semblent convenir.
2. Soit $M(x; y)$
 - (a) Calculer MF^2 en fonction de x et y .
 - (b) Calculer la distance entre M et \mathcal{D} en fonction de x et y .
 - (c) En déduire l'expression de y en fonction de x quand M décrit \mathcal{E} .
 - (d) Réciproquement, vérifier que si x et y vérifient la relation précédente, alors $M \in \mathcal{E}$.
 - (e) Conclure.

10 Donner l'équation de la parabole qui :

- coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 et qui passe par le point de coordonnées $(0, 2)$
- coupe l'axe des abscisses en 1 et en -2 et qui passe par le point de coordonnées $(0, -4)$
- a pour sommet $S(-1; -2)$ et passe par le point de coordonnées $(0, 1)$
- a pour sommet $S(1; 4)$ et passe par le point de coordonnées $(0, 1)$

2 Équations du second degré

2.1 Racine du trinôme

11 Déterminer les racines des trinômes suivants, en cherchant des racines évidentes.

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
2. $g(x) = x^2 - 3x - 4$
3. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x$
4. $k(x) = -x^2 + 5x - 6$

12 Compléter les factorisations suivantes :

1. $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(\dots x + \dots)$
2. $2x^2 + 7x + 5 = (x + 1)(\dots x + \dots)$
3. $-3x^2 + 10x - 7 = (x - \dots)(\dots x + \dots)$
4. $-2x^2 + 8x - 8 = \dots(x - \dots)^2$

2.2 Résolution

13 Forme canonique et racines

Soit f le trinôme défini par $f(x) = -7(x + 2)^2 - 5$.

1. Déterminer, sans le calculer, le signe du discriminant de f .
2. En déduire le signe de f sur \mathbb{R} .

14 Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $x^2 + 2x + 1 = 0$
3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
4. $2x^2 - 3x + 2 = 0$
5. $-3x^2 + 6x + 9 = 0$
6. $4x^2 = 2x + 3$
7. $3x^2 + 3x + 3 = 10 - x$
8. $2x^2 - 2x + 5 = 2x + 4 - 2x^2$

15 Dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, justifier que si a et c sont de signes contraires, alors l'équation admet deux solutions réelles.

16 Résolution d'équations (2)

Il n'est parfois pas nécessaire d'utiliser le discriminant.

1. $2x^2 - 3 = 0$
2. $x^2 + 19 = 12$
3. $x^2 - 4x = 0$
4. $6x^2 - x - 1 = 0$
5. $16x^2 - 8x + 13 = 0$
6. $2x^2 - 10x + \frac{25}{4} = 0$

17 Équation à paramètre :

On considère le trinôme suivant :

$$x^2 - (2m + 3)x + m^2$$

Pour quelles valeurs de m ce trinôme n'admet-il qu'une seule racine réelle ? Déterminer alors cette racine.

18 Une équation du troisième degré

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

On cherche à résoudre l'équation

$$(E) : x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

1. Vérifier que 1 est solution de l'équation.

- On admet que $f(x)$ peut s'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. Déterminer, en utilisant une technique de division, ou d'identification, les valeurs de a , b et c .
- En déduire toutes les solutions de l'équation (E)

19 Pratiquer la division de polynômes

Compléter les factorisations suivantes :

- $3x^2 - 7x + 4 = (x-1)(\dots\dots\dots)$
- $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(\dots\dots\dots)$
- $2x^3 + 2x^2 - 17x - 15 = (x+3)(\dots\dots\dots)$
- $6x^3 - x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(\dots\dots\dots)$

20 Factoriser pour résoudre une équation :

- Factoriser les expressions $x^2 + x - 2$ et $-3x^2 - 5x + 2$.
- Résoudre l'équation

$$(E) : \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{2x}{-3x^2 - 5x + 2} = 0$$

21 Somme et produit de racines :

Si f est une fspd définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, admettant deux racines, exprimer la somme et le produit des racines en fonction de a , b et c . Étudier ensuite en particulier le cas où $a = 1$.

Indication : utiliser la forme factorisée que vous développerez.

22 Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré admettant deux racines réelles x_1 et x_2 .

On rappelle que
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} .$$

- Calcul de $x_1^2 + x_2^2$**
 - Compléter l'égalité : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - \dots\dots\dots$
 - En déduire une expression de $x_1^2 + x_2^2$ en fonction de a , b et c .
- Calcul de $x_1^3 + x_2^3$**
 - En s'inspirant de la question précédente, exprimer $x_1^3 + x_2^3$ en fonction de $x_1 + x_2$ et de $x_1 x_2$.

(b) En déduire que $x_1^3 + x_2^3 = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$

1. On rappelle que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3. Application

Soit P définie sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 - x - 1$.

- Justifier brièvement que P admet deux racines réelles x_1 et x_2 .
- Déterminer, sans calculer ces deux racines, les valeurs de $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^3 + x_2^3$.
- Calculer la valeur des racines du trinôme, et vérifier les résultats obtenus.

23 Équation à paramètre (2)

On considère l'équation suivante :

$$(4m+1)x^2 - 4mx + m - 3 = 0 \quad , \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

Pour quelles valeurs de m admet-elle des solutions distinctes ?

Donner les expressions des solutions en fonction de m .

24 Un problème

On prolonge de 12 cm un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle. La longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle obtenu est alors 5 fois supérieure à celle du triangle initial.

Quelles étaient les dimensions du triangle initial ?

25 Changements d'inconnue

- Une *équation bicarrée* ne comporte que des termes de degrés pairs :
Résoudre l'équation $x^4 - 16x^2 + 39 = 0$ en posant dans un premier temps comme nouvelle inconnue X définie par $X = x^2$. On obtiendra une nouvelle équation qui sera du second degré en X .
- Résoudre les équations suivantes en proposant un changement d'inconnue adéquat.

(a) $5x^4 - x^2 - 4 = 0$

(b) $5x - 7\sqrt{x} - 6 = 0$

26 Équation avec des radicaux $A = \sqrt{B}$:

- À l'aide de la calculatrice, tracer les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto 5 - x$ et $x \mapsto 3\sqrt{4 - x}$.
- Conjecturer, grâce au graphique, le nombre de solutions et leurs valeurs approchées de l'équation $5 - x = 3\sqrt{4 - x}$.

3. Résoudre par le calcul l'équation $5 - x = 3\sqrt{4 - x}$.

Indication : $A = \sqrt{B} \iff A^2 = B \text{ et } A \geq 0$

27 ** Tangentes passant par un point donné

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soient \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 10$ et $A(0; h)$ un point de l'axe des ordonnées, avec $h \in \mathbb{R}$.

1. Soit m un réel et \mathcal{D}_m la droite de coefficient directeur m passant par A . Donner l'équation réduite de la droite \mathcal{D}_m .
2. Déterminer, en fonction de h , les valeurs de m pour lesquelles \mathcal{P} et \mathcal{D}_m ont un seul point commun.
3. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

28 **Interpolation (Lagrange) :** Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soient $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$ et $M_2(x_2; y_2)$ trois points tels que $x_0 \neq x_1$, $x_0 \neq x_2$ et $x_1 \neq x_2$. On appelle *polynôme d'interpolation de Lagrange* des points M_0 , M_1 et M_2 le polynôme L défini par :

$$L(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + y_2\ell_2(x)$$

où ℓ_0 , ℓ_1 et ℓ_2 sont définis sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} \ell_0(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) \\ \ell_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \\ \ell_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \end{cases}$$

1. Évaluer les fonctions ℓ_0 , ℓ_1 et ℓ_2 en x_0 , x_1 et x_2 . Que remarque-t-on ?
2. Calculer $L(x_0)$, $L(x_1)$ et $L(x_2)$.
3. Application : Soit les points $A(1; 1)$, $B(2; 8)$ et $C(3; 27)$.
 - (a) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange L des points A , B et C .
 - (b) Calculer $L(x_A)$, $L(x_B)$ et $L(x_C)$.
 - (c) Interpréter graphiquement ces derniers résultats.

3 Signe du trinôme

29 Étudier le signe de $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

30 Application : Résolution d'inéquations

1. $-6x^2 - 10x + 3 < -4 + x$
2. $\frac{3x - 13}{x^2 + x + 1} \leq -1$
3. $\frac{5}{x + 7} - \frac{2}{2x - 1} > \frac{7}{9(x - 1)}$
4. $\frac{2t}{1 - t} > \frac{t + 2}{t}$

Feuille de TD n°1

Réponses ou Solutions

4 Étude des fonctions polynômes du second degré

4.1 Fonction polynôme de degré 2

1 $f : a = 2, b = 0, c = 1, h, : a = 3, b = -1, c = -2, g$ est du troisième degré et i est une fonction affine : $i(x) = 2x + 1$.

4.2 Forme canonique

2

1. $2 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{15}{2}$

2. $3 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{19}{3}$

3. $3 \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{3}$

4. $0,5(x - 1)^2$

5. $(x - 3)^2 + 6$

6. $(x + 5)^2 - 20$

7. $3(x + 2)^2 + 7$

8. $4 \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 25$

3

41. $f(0) = f(6)$, donc par symétrie de la parabole, $\alpha = 3$, comme $y_S = 4$, alors $\beta = 4$ et $a = 1$, donc $f(x) = (x - 3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 13$.

47. La parabole est tournée vers le haut car $a = 1 > 0$, le sommet $S(2; -5)$ et pour finir, par exemple, $f(0) = -1 = f(4)$.

4 $S(3; -7)$

4.3 Variations

5 Sommets

1. $S(3; 7)$ | 2. $S(-1; -3)$ | 3. $S(0; 5)$ | 4. $S(2; 3)$

6 $h \rightarrow \mathcal{C}_1$ $f \rightarrow \mathcal{C}_2$ $g \rightarrow \mathcal{C}_3$

7 Soit x un côté de l'enclos, l'autre côté a pour dimension $10 - x$ pour que le périmètre du rectangle soit de 20 m.

L'aire du domaine est donc de $f(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$. On remarque que f est croissante puis décroissante et, par exemple, comme $f(0) = f(10) = 0$, alors $\alpha = 5$.

Ainsi, l'enclos est d'aire maximale lorsque le côté du rectangle est de 5 m (c'est alors un carré).

4.4 Courbe représentative

8

1. $f(\alpha - h) = f(\alpha + h) = ah^2 + \beta$.
2. $\alpha - h$ et $\alpha + h$ sont symétriques par rapport à α , et leurs images $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ sont égales, et cela, quel que soit le nombre h .
3. Cela prouve qu'il y a un axe de symétrie pour la parabole.

9

1. geogeb
2. Soit $M(x; y)$.

(a) $\overrightarrow{MF} \left(\begin{matrix} x-3 \\ y-3 \end{matrix} \right)$ donc $\underline{MF^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2}$.

(b) $d(M, \mathcal{D})^2 = (y-5)^2$

(c) $M \in \mathcal{E} \iff (x-3)^2 + (y-3)^2 = (y-5)^2 \iff x^2 - 6x + 4y - 7 = 0 \iff y = \frac{1}{4}(-x^2 + 6x + 7) = -\frac{1}{4}(x^2 - 6x - 7) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 4$

(d) Nous avons fait un raisonnement par équivalences et donc

$$M \in \mathcal{E} \iff y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 4$$

(e) En conclusion, l'ensemble des points équidistants d'un point et d'une droite est une parabole.

DÉFINITION 1

On dit que $\mathcal{D} : y = 5$ est la directrice que $F(3; 3)$ est le foyer de la parabole.

10 1. $y = -\frac{2}{3}(x+1)(x-3)$, 2. $y = 2(x-1)(x+2)$, 3. $y = 3(x+1)^2 - 2$, 4. $y = -3(x-1)^2 + 4$

5 Équations du second degré

5.1 Racine du trinôme

11

1. 1 et $\frac{1}{2}$
2. -1 et 4
3. 0 et $-\frac{3}{2}$
4. 2 et 3

12

1. $x^2 + 7x - 8 = (x-1)(x+8)$
2. $2x^2 + 7x + 5 = (x+1)(2x+5)$
3. $-3x^2 + 10x - 7 = (x-1)(-3x+7)$
4. $-2x^2 + 8x - 8 = -2(x-2)^2$

5.2 Résolution

13

- Comme a et β sont de même signe (parabole tournée vers le bas et un sommet d'ordonnée négative, on peut dire que $\Delta < 0$)
- on peut en déduire que f est toujours négative.

14

- $\Delta = 16, \mathcal{S} = \{3, 1\}$
- $\Delta = 0, \mathcal{S} = \{-1\}$
- $\Delta = 0, \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
- $\Delta = -7, \mathcal{S} = \emptyset.$
- $\Delta = 144, \mathcal{S} = \{-1, 3\}$
- $\Delta = 52, \mathcal{S} = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{13}}{4}\right\}$
- $\Delta = 100, \mathcal{S} = \left\{-\frac{7}{3}, 1\right\}$
- $\Delta = 0, \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$

15 Si a et c n'ont pas le même signe, alors le produit ac est négatif, donc $\Delta = \underbrace{b^2}_{\geq 0} \underbrace{-4ac}_{> 0} > 0,$

donc l'équation admet deux solutions.

16

- $2x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = \frac{3}{2}$ donc $\mathcal{S} = \left\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}.$
- $x^2 + 19 = 12 \iff x^2 = -7$ donc $\mathcal{S} = \emptyset$
- $x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 4) = 0$ donc $\mathcal{S} = \{0, 4\}$
- $6x^2 - x - 1 = 0. \Delta = 1 + 4 \times 6 = 25$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$
- $16x^2 - 8x + 13 = 0, \Delta = -768 < 0$ donc $\mathcal{S} = \emptyset.$
- $2x^2 - 10x + \frac{25}{4} = 0, \Delta = 50$ donc $\begin{cases} x_1 = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{4} \\ x_2 = \frac{10 - 5\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

17 L'équation $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$ admet une solution unique si et seulement si son discriminant est nul.

Or, $\Delta = (2m + 3)^2 - 4m^2 = 12m + 9$ et donc $\Delta = 0 \iff 12m + 9 = 0 \iff m = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}.$

Dans ce cas, l'équation devient $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0$ et la solution est $r_0 = -\frac{b}{2a} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}.$

18

- $f(1) = 0$, donc 1 est solution de l'équation $f(x) = 0.$
- Par division, ou identification, on trouve $f(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$

3. Par somme et produit, on voit que les deux autres racines sont -2 et 3 . Ce qui nous donne $\mathcal{S} = \{-2, 1, 3\}$

19 $(x-1)(3x-4), (x-2)(x^2+x+1), (x+3)(2x^2-4x-5), (2x-1)(3x^2+x-2)$

20

1. En cherchant les racines des deux polynômes proposés, on a :

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \quad -3x^2 - 5x + 2 = -3(x+2) \left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+2)(1-3x)$$

2. Le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

$$\begin{aligned} (E) \quad & \frac{1}{x^2+x-2} - \frac{2x}{-3x^2-5x+2} = 0 \\ \iff & \frac{1}{(x-1)(x+2)} - \frac{2x}{(x+2)(1-3x)} = 0 \\ \iff & \frac{1-3x}{(x-1)(x+2)(1-3x)} - \frac{2x(x-1)}{2x(x-1)(x+2)(1-3x)} = 0 \\ \iff & \frac{1-3x-2x(x-1)}{(x-1)(x+2)(1-3x)} = 0 \\ \iff & \frac{1-x-2x^2}{1-x-2x^2} = 0 \end{aligned}$$

Car une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.

Ainsi, en résolvant l'équation, on trouve $\mathcal{S} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

21 Soient r_1 et r_2 les deux racines du trinôme. On a alors :

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2) = ax^2 - a(r_1+r_2)x + ar_1r_2$$

On a donc, par **identification** des deux expressions développées :

$$\begin{cases} -a(r_1+r_2) = b \\ ar_1r_2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} r_1+r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Cela donne des résultats intéressants lorsque $a = 1$, en effet, dans ce cas, $-b$ est la somme des racines et c est le produit des deux racines.

22

1. **Calcul de $x_1^2 + x_2^2$**

(a) À partir de l'identité remarquable, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

(b) $x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ca}{a^2}$

2. **Calcul de $x_1^3 + x_2^3$**

(a) En utilisant l'identité remarquable, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \iff a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, donc $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

(b) Ainsi, $x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a} \left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}$

3. **Application**

Soit P définie sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 - 2x - 1$.

(a) P admet deux racines réelles x_1 et x_2 car son discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$.

(b) On a donc : $x_1 + x_2 = 2$, $x_1^2 + x_2^2 = 6$ et $x_1^3 + x_2^3 = 8 + 3 \times 2 = 14$.

(c) Les deux racines étant $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$, on vérifie gentiment tous ces calculs.

$$\boxed{23} \quad \Delta > 0 \iff 16m^2 - 4(m-3)(4m+1) > 0 \iff 44m + 12 > 0 \iff m > -\frac{3}{11}$$

Solutions :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2 + \sqrt{11m+3}}{4m+1} \\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{11m+3}}{4m+1} \end{cases}$$

$\boxed{24}$ Si les dimensions du triangle initial sont (a, a, c) , avec $c^2 = 2a^2$ (*), alors le nouveau triangle a pour dimensions $(a+12, a, 5c)$, avec $(a+12)^2 + a^2 = 25c^2 \iff a^2 + 24a + 144 + a^2 = 25c^2 \iff 24a + 144 = 24c^2$ par (*), de plus cela est équivalent à $a+6 = c^2 = 2a^2 \iff 2a^2 - a - 6$.

Cette équation a deux solutions : $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$. Comme une longueur ne peut pas être négative, le triangle de départ a pour dimensions : $(2, 2, 2\sqrt{2})$.

$\boxed{25}$

1. Dans l'équation $x^4 - 16x^2 + 39 = 0$ en posant $X = x^2$, on obtient $X^2 - 16X + 39 = 0$, $\Delta = 100$,

$$\begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = 13 \end{cases}$$

Les solutions en x donnent :

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{13} \end{cases}$$

2. Dans les exemples suivants, on fera attention aux changements de variable et aux restrictions qu'ils entraînent.

(a) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$ en posant $X = \cos x$, on obtient $2X^2 - 7X + 3 = 0$ et $\Delta = 25$ et donc

$$\begin{cases} X_1 = 3 \\ X_2 = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ or, un cosinus est compris entre } -1 \text{ et } 1, \text{ donc seul } X = \frac{1}{2} \text{ convient, cela}$$

correspond à $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3}$.

(b) $5x - 7\sqrt{x} - 6 = 0$ en posant $X = \sqrt{x}$, on obtient $\begin{cases} X_1 = 2 \\ X_2 = -3/5 \end{cases}$ et ainsi, $x = 4$ est la seule solution.

$\boxed{26}$

$$3. \quad 5 - x = 3\sqrt{4-x} \iff (5-x)^2 = 9(4-x) \text{ et } 5-x > 0 \iff x^2 - x - 11 = 0 \text{ et } 5-x > 0 \quad \text{ainsi} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1+3\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ qui sont toutes}$$

les deux valides ($5-x > 0$ pour les deux).

$\boxed{27}$

1. $\mathcal{D}_m : y = mx + h$

2. $x^2 - 4x + 10 - mx - h = 0$ admet une seule solution si et seulement si $\Delta = 0 \iff (-4-m)^2 - 4 \times (10-h) = 0 \iff m^2 + 8m + 4h - 24 = 0$

Résolvons cette équation en fonction de h . $\delta = 64 - 16h + 96 = 16(10-h)$ Si $h \geq 10$, alors $\delta \geq 0$ et l'équation admet deux solutions :

$$\begin{cases} m_1 = \frac{-8 - 4\sqrt{10-h}}{2} = -4 - 2\sqrt{10-h} \\ m_2 = \frac{-8 + 4\sqrt{10-h}}{2} = -4 + 2\sqrt{10-h} \end{cases}$$

3. Ces deux solutions correspondent aux pentes des droites tangentes à la parabole passant par A.

28

1. $\ell_0(x_0) = 1, \ell_0(x_1) = 0$ et $\ell_0(x_2) = 0$
 $\ell_1(x_0) = 0, \ell_1(x_1) = 1$ et $\ell_1(x_2) = 0$
 $\ell_2(x_0) = 0, \ell_2(x_1) = 0$ et $\ell_2(x_2) = 1$

Donc les fonctions ℓ_i valent 1 en x_i et 0 ailleurs.

2. On a donc $L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1$ et $L(x_2) = y_2$.

3. Application : Soit les points A (1 ; 1), B (2 ; 8) et C (3 ; 27).

(a) On trouve

$$\begin{cases} \ell_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \\ \ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \\ \ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \end{cases}$$

Donc $L(x) = 6x^2 - 11x + 6$.

(b) On remarque que $L(1) = 1, L(2) = 8$ et $L(3) = 27$

(c) La parabole représentant L passe par les trois points A, B et C. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange L des points A, B et C.

(d) Calculer $L(x_A), L(x_B)$ et $L(x_C)$.

(e) Interpréter graphiquement ces derniers résultats.

6 Signe du trinôme

x	$-\infty$	-3	$1/2$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

29

30

1. $-6x^2 - 10x + 3 < -4 + x \iff -6x^2 - 11x + 7 < 0 \iff x \in]-\infty; -\frac{7}{3}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

2. $\frac{3x-13}{x^2+x+1} \leq -1 \iff \frac{x^2+4x-12}{x^2+x+1} \leq 0$.

x^2+x+1 a un discriminant négatif, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 > 0$, donc le signe de la fraction est celui du numérateur.

x	$-\infty$	-6	2	$+\infty$	
$x^2+4x-12$	+	0	-	0	+

$\mathcal{S} = [-6; 2]$.

3. $\frac{5}{x+7} - \frac{2}{2x-1} > \frac{7}{9(x-1)} \iff \frac{5(2x-1)9(x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)} - \frac{2(x+7)9(x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)} - \frac{7(x+7)(2x-1)}{9(x+7)(2x-1)(x-1)} >$

$$\Leftrightarrow \frac{58x^2 - 334x + 220}{9(x+7)(2x-1)(x-1)} > 0 \text{ avec } 58x^2 - 334x + 220 \text{ qui a deux racines : } 5 \text{ et } \frac{22}{29}.$$

x	$-\infty$	-7	$1/2$	$22/29$	1	5	$+\infty$
$58x^2 - 334x + 220$			+	0	-	0	+
$x + 7$		-	0		+		
$2x - 1$			-	0		+	
$x - 1$					-	0	+
fraction		-	+	-	0	+	-

La solution est donc $\mathcal{S} =]-7; \frac{1}{2}[\cup]\frac{22}{29}; 1[\cup]5; +\infty[.$

$$4. \frac{2t}{1-t} > \frac{t+2}{t} \Leftrightarrow \frac{2t}{1-t} - \frac{t+2}{t} > 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - (t+2)(1-t)}{t(1-t)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2 - t - 2}{t(1-t)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(3t+2)}{t(1-t)} > 0$$

1 est une valeur interdite, mais on peut simplifier le problème si $x \neq 1$: $\Leftrightarrow \frac{3t+2}{-t} > 0.$

$$\mathcal{S} =]-\frac{2}{3}; 0[$$