

Correction DM 2 - Général.

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a-b)^2 \geq 0$ donc $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ donc $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1)
de plus $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$ donc $(a+b)^2 \geq 4ab$ (2)

2) Inégalité de moyennes. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

a) si on applique l'inégalité (1) à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, on trouve

$$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

donc $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ donc $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

b) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$ or d'après (2) : $(a+b)^2 \geq 4ab$
 $\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$ car $a+b > 0$

donc $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

c) Or $a \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \stackrel{\substack{\div \sqrt{ab} : 2 \\ \times (a+b)}}{\Leftrightarrow} \sqrt{a} \leq \frac{a+b}{2}$

donc $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ harmonique $\leq$ géométrique $\leq$ arithmétique.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$
Donc l'inégalité est vérifiée. $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$ (égalité si $x=1$) VRAI

(on peut aussi faire l'étude de $f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$)

4) Inégalité de Nesbitt. Soient $a, b, c > 0$

a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1 + \frac{b+a+c}{a+c} - 1 + \frac{c+a+b}{a+b} - 1$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$$

b) or $\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq 2 - x$

donc $\frac{1}{b+c} \geq 2 - (b+c)$

$\frac{1}{a+c} \geq 2 - (a+c)$

$\frac{1}{a+b} \geq 2 - (a+b)$

$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq 6 - (a+b+c) \times 2$

c) Ainsi, si on pose $\Delta = a+b+c$, on retrouve

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq (a+b+c) \left(\frac{6-2(a+b+c)}{\Delta^2} \right) - 3$$

$$\geq -2\Delta^2 + 6\Delta - 3.$$

$$\text{Or, } -2\Delta^2 + 6\Delta - 3 = -2\left(\Delta^2 - 3\Delta\right) - 3$$

$$= -2\left(\Delta - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} - 3$$

$$= -2\left(\Delta - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}.$$

Donc $\forall \Delta \in \mathbb{R}$, l'expression $-2\Delta^2 + 6\Delta - 3$ admet un maximum de $\frac{3}{2}$ atteint quand $\Delta = \frac{3}{2}$.

On remarque ensuite que si $f(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$\forall \lambda \neq 0$.

Comme $f(a,b,c) \geq -2\Delta^2 + 6\Delta - 3 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}$, alors $f(a,b,c) \geq \frac{3}{2}$ en particulier

$$\text{Donc } \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

5) Cauchy-Schwarz

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - x b_i)^2$

$$\text{On a } P(x) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + x^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^n a_i b_i + x^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

P est donc un polynôme du 2nd degré avec $a = \sum_{i=1}^n b_i^2$, $b = -2 \sum_{i=1}^n a_i b_i$ et $c = \sum_{i=1}^n a_i^2$

b) Or, P est toujours positif ou nul (somme de termes ≥ 0) donc son discriminant Δ est inférieur ou égal à zéro.

$$\Delta = \left(-2 \sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \times \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (\text{CS})$$

Correção DT 2 - Techno / Pro

Exercício 1

1º) $6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x+3) = 0$

$$\mathcal{S} = \left\{ 0; -\frac{3}{2} \right\}.$$

2º) $2(x+1)(3x+2) + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2(3x+2) + x+1) = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(7x+5) = 0$

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; -\frac{5}{7} \right\}$$

3º) $(4x-5)^2 - (3x+7)(4x-5) = 0 \Leftrightarrow (4x-5)(x-12) = 0.$

$$\mathcal{S} = \left\{ 12; \frac{5}{4} \right\}.$$

4º) $(2x+3)^2 = (3x-2)^2 \Leftrightarrow (2x+3)^2 - (3x-2)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x+3+3x-2)(2x+3-3x+2) = 0$
 $\Leftrightarrow (5x+1)(-x+5) = 0$

$$\mathcal{S} = \left\{ 5; -\frac{1}{5} \right\}$$

Exercício 2

1º) $x^2 + 3x + 2 = 0$ - 1 solº evidente

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ outra raiz: -2. $\mathcal{S} = \{-1; -2\}.$

2º) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Delta = 16 - 8 = 8.$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right\}$$

3º) $3x^2 + 5x + 7 = 0$ $\Delta = 25 - 7 \times 12 < 0$ pois não solº reais $\mathcal{S} = \emptyset$

4º) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ $\Delta = 144 - 144 = 0$ solução dupla: $x_0 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

5º) $-5x^2 - 10x - 3 = 0$ $\Delta = 100 - 60 = 40$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{40}}{-10} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{10}}{-10} = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{5}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-5-\sqrt{10}}{5}; \frac{-5+\sqrt{10}}{5} \right\}$$

6º) $-2x^2 + 5x + 7 = 0$ $\Delta = 25 + 56 = 81$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 7 = 0 \quad x = \frac{5 \pm 9}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -1; \frac{7}{2} \right\}$$

7º) $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$ $\Delta = 2 + 12 = 14$

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{14}}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}; \frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right\}$$

Exercice 3

1°) $x^2 - 5x + 6 > 0$

$\Delta = 1$

racines : 2 et 3

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	ϕ	$-\phi$	+

$\mathcal{S} =]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

2°) $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$ 1 sol^o évident, $-\frac{5}{2}$ autre racine par produit

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	1	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 5$	+	ϕ	$-\phi$	+

$\mathcal{S} = [-\frac{5}{2}; 1]$

3°) $-5x^2 + 6x - 1 \geq 0$ 1 sol^o évident, $\frac{1}{5}$ par produit.

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	$+\infty$
$-5x^2 + 6x - 1$	-	ϕ	$+\phi$	-

$\mathcal{S} = [\frac{1}{5}; 1]$

4°) $-8x^2 + 7x - 4 > 0$ $\Delta = 49 - 128 < 0$ Donc pas de racine réelle.

$\mathcal{S} = \phi$

Exercice 4

(E) : $3x^4 + 5x^2 - 12 = 0$.

1°) $X = x^2$ $3X^2 + 5X - 12 = 0$

2°) -3 racine évidente, $3X^2 + 5X - 12 = (X+3)(3X-4)$

$\frac{4}{3}$ autre racine.

3°) $x^2 = -3$ ou $x^2 = \frac{4}{3}$

pas de racine réelle ou $x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$