

1 Généraux - Inégalités

1. Pour tous réels a et b , démontrer que

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{et} \quad 4ab \leq (a+b)^2$$

2. **Inégalités de moyennes** : pour tous a, b réels positifs,

(a) Prouver l'**inégalité arithmético-géométrique** (la Moyenne géométrique est inférieure à la Moyenne arithmétique) :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (\text{IAG})$$

(b) Moyenne harmonique / Moyenne arithmétique :

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$$

(c) Les trois entre elles :

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (h \leq g \leq m)$$

3. Prouver que quel que soit le réel $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

4. Application : Nous allons prouver l'inégalité de Nesbitt :

Quels que soient les réels a, b et c strictement positifs,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (\text{NSBT})$$

(a) Justifier que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) - 3$

(b) En utilisant l'inégalité précédente, prouver que

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \geq 6 - 2(a+b+c)$$

(c) Si l'on pose $s = a+b+c$, justifier que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq -2s^2 + 6s - 3$

(d) Déterminer la valeur maximale de $-2s^2 + 6s - 3$ sur $\mathbb{R}$ et en remarquant que la quantité $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$ est invariante en multipliant a, b et c par une même constante, prouver l'inégalité NSBT.

5. **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels quelconques. Alors

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \quad (\text{CS})$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère le polynôme $P(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - xb_i)^2$.

$$\text{Justifier que } P(x) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) x^2$$

(b) En utilisant le fait que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS). Quels sont les cas d'égalité ?

2 Techno/Pro : Entraînement

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

► EXERCICE 1

Sans discriminant

1. $6x^2 + 9x = 0$
2. $2(x+1)(3x+2) + (x+1)^2 = 0$
3. $(4x-5)^2 - (3x+7)(4x-5) = 0$
4. $(2x+3)^2 = (3x-2)^2$

► EXERCICE 2

Avec discriminant ou racines évidentes

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$
2. $2x^2 - 4x + 1 = 0$
3. $3x^2 + 5x + 7 = 0$
4. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
5. $-5x^2 - 10x - 3 = 0$
6. $-2x^2 + 5x + 7 = 0$
7. $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$

► EXERCICE 3

Inéquations

1. $x^2 - 5x + 6 > 0$
2. $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$
3. $-5x^2 + 6x - 1 \geq 0$
4. $-8x^2 + 7x - 4 > 0$

► EXERCICE 4

Changement de variable

On considère l'équation (E) , d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(E) \quad : \quad 3x^4 + 5x^2 - 12 = 0$$

1. Pour x un réel, on pose $X = x^2$.
Réécrire l'équation (E) sous la forme d'une nouvelle équation (E') , d'inconnue X .
2. Résoudre l'équation (E') .
3. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.