Correction DS n°1 CPES

Exercice 1

$$A = \left(2 - \frac{5}{7}\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{5}\right) - 1$$

$$A = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{7}_{1}} \times \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{15}_{5}} - 1$$

$$A = \frac{6}{5} - 1$$

$$\boxed{A = \frac{1}{5}}$$

$$B = \frac{2 + \frac{3}{2}}{5 - \frac{1}{4}}$$

$$B = \frac{7/2}{\frac{19}{4}} = \frac{7}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}^{2}}{19}$$

$$\boxed{B = \frac{14}{19}}$$

Exercice 2

1°) $(x^2 - x + 1)(x^2 - 7x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - x + 1 = 0$ ou $x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Delta = -3 < 0$ Pas de sol° réelle | $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 x_2 = 12 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \{3 ; 4\}}$

2°) $$\frac{2x^2 - 5x + 4}{(3 - x)(5 + x)} \leqslant 0$$

Signe de $2x^2 - 5x + 4$:

$\Delta = 25 - 4 \times 2 \times 4 = -7 < 0$

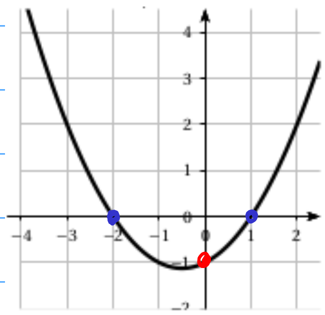
donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - 5x + 4 > 0$

car $a = 2 > 0$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 4$		+		+		+	
$(3-x)(5+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
quotient		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; -5[\cup]3 ; +\infty[}$$

Exercice 3



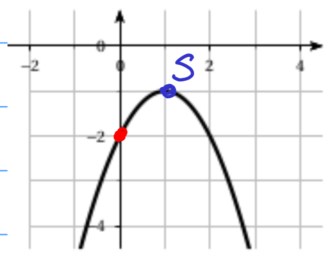
racines : -2 et 1 $\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+2)(x-1)$

$f(0) = -1$ $\iff -1 = a(0+2)(0-1)$

$\iff -1 = -2a$

$\iff a = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)}$



$S(1;-1) \iff \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{array} \iff f(x) = a(x-1)^2 - 1$

$f(0) = -2 \iff -2 = a(0-1)^2 - 1$

$\iff -2 = a - 1$

$\iff a = -1$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(x-1)^2 - 1}$

Exercice 4

(E) $2x^3 - 8x^2 + 3x + 10 = 0$

1°) Si $x = 2$, $2\times 2^3 - 8\times 2^2 + 3\times 2 + 10 = 16 - 32 + 6 + 10$
$= 0$

Donc $\boxed{\text{2 est solution de l'équation (E).}}$

2°) Pour factoriser, on va procéder par division :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 3x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ (2x^3 - 4x) & 2x^2 - 4x - 5 \\ \hline -4x^2 + 3x + 10 & \\ -\ (-4x^2 + 8x) & \\ \hline -5x + 10 & \\ -5x + 10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ainsi

$\boxed{2x^3 - 8x^2 + 3x + 10 = (x-2)(2x^2 - 4x - 5)}$

3°) Ainsi $2x^3 - 8x^2 + 3x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2-4x-5) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $2x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Delta = 16 + 40 = 56 = 4 \times 14.$

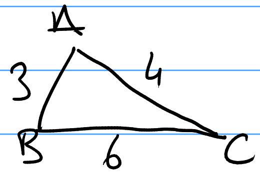
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = \dfrac{4 - 2\sqrt{14}}{4}$ ou $x = \dfrac{4 + 2\sqrt{14}}{4}$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 1 - \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ ou $x = 1 + \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

$\mathcal{S} = \left\{ 2 ; 1 - \sqrt{\dfrac{7}{2}} ; 1 + \sqrt{\dfrac{7}{2}} \right\}$

Exercice 5

Soit ABC le triangle



1°) $BC^2 = 6^2 = 36$

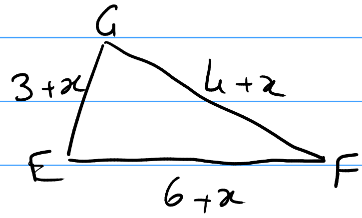
$AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$

donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

D'après le théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle en A

Donc ABC n'est pas rectangle car [BC] était le plus grand côté.

2°) Soit GEF le triangle



D'après le théorème de Pythagore, GEF est rectangle en G

$\Leftrightarrow EF^2 = GE^2 + GF^2$

$\Leftrightarrow (6+x)^2 = (3+x)^2 + (4+x)^2$

$\Leftrightarrow 36 + 12x + x^2 = 2x^2 + 14x + 25$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 11 = 0$

$\Delta = 4 + 44 = 48 = 16 \times 3$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{2 - 4\sqrt{3}}{8} = 1 - 2\sqrt{3} < 0$ ou $x_2 = 1 + 2\sqrt{3} > 0$

Exercice 6

$f : x \longmapsto 2x^2 + 6x - 1 \qquad g : 2x + 1$

1°) Forme canonique de $f(x)$: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$

$$\beta = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{9}{4} + 6 \times \left(\frac{-3}{2}\right) - 1$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{18}{2} - 1$$
$$= -\frac{11}{2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$$

On en déduit les variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{11}{2}$	↗

2°) $f(x) < g(x)$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 6x - 1 < 2x + 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 < 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8 = 4 \times 2$

Donc les racines de $x^2 - 2x - 1$ sont

$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2}$

Soit $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{2}$

Comme $a > 0$, $x^2 + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1-\sqrt{2} ; -1+\sqrt{2}\right[$

Ainsi, sur l'intervalle $\left]-1-\sqrt{2} ; -1+\sqrt{2}\right[$, la courbe de f est située en dessous de la courbe de g

Exercice 7 $\quad f_m(x) = 2x^2 - mx - m + 1$

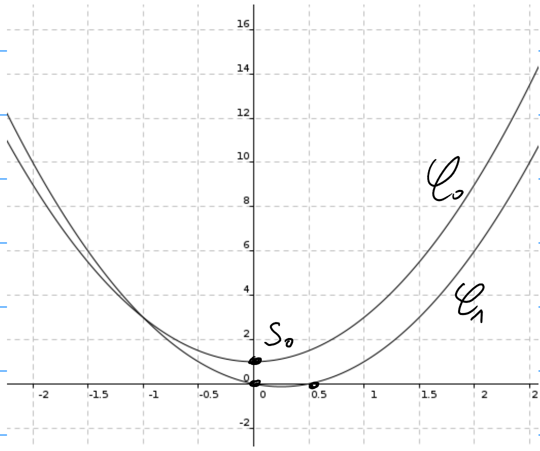
1°) a) $f_1(x) = 2x^2 - x$ et $f_0(x) = 2x^2 + 1$

1°) b) $f_1(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ et $f_0(x) = 2(x-0)^2 + 1$

$S_0(0\,;1)$

$S_1\left(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{8}\right)$

f s'annule en 0 et en $\frac{1}{2}$



1°) c) $f_1(x) = 0 \iff x(2x-1) = 0$ et $f_0(x) = 0 \iff 2x^2 = -1$ impossible

$\iff x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

2°) l'équation $f_m(x) = 0$ admet une solution unique si et seulement si son discriminant vaut 0

a $\Delta_m = (-m)^2 - 4 \times 2 \times (-m+1)$
$= m^2 + 8m - 8$

Ainsi $\Delta_m = 0 \iff m^2 + 8m - 8 = 0$

$\Delta = 64 + 32 = 96 = 16 \times 6$

$\iff m = \dfrac{-8 - 4\sqrt{6}}{2}$ ou $m = \dfrac{-8 + 4\sqrt{6}}{2}$

$\iff m = -4 - 2\sqrt{6}$ ou $m = -4 + 2\sqrt{6}$

Si $m = -4 - 2\sqrt{6}$, alors la solution de l'équation est
$x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m}{2 \times 2} = -1 - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Si $m = -4 + 2\sqrt{6}$ alors $x = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

3°) Dans cette question, x_1, x_2 sont les solutions de l'équation.

3a) $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m}{2}$

$p = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+1}{2}$

Ainsi : $s = \frac{m}{2}$; $p = \frac{1-m}{2}$

3b) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 \times (x_1 + x_2)$

Ainsi $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = p \times s = \frac{1}{4} m(1-m)$

3c) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 > -2 \iff \frac{1}{4} m(1-m) > -2$

$\iff -m^2 + m + 8 > 0$

$\Delta = 33$

donc les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$

$\iff m \in \left] \frac{1-\sqrt{33}}{2} ; \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right[$

4°) P_1 et P_0 ont un point commun ssi il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(x) = f_0(x)$

$\iff 2x^2 - x = 2x^2 + 1$

$\iff x = -1$

Le point commun des deux paraboles est $A(-1 ; 3)$

4b) Soit $m \in \mathbb{R}$, $f_m(-1) = 2 - m(-1) - m + 1 = 3$
donc $\forall m \in \mathbb{R}$, $A \in P_m$

5°) O_m est le sommet de P_m.

Alors $O_m(\alpha_m ; \beta_m)$

avec $\alpha_m = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{4}$

et $\beta_m = f_m\left(\frac{m}{4}\right) = 2\left(\frac{m}{4}\right)^2 - m\left(\frac{m}{4}\right) - m + 1$

$= \frac{m^2}{8} - \frac{m^2}{4} - m + 1$

$= \frac{-m^2 - 8m + 8}{8}$

Ainsi $\boxed{O_m\left(\frac{m}{4} ; \frac{-m^2-8m+8}{8}\right)}$

b) Si on pose $x = \frac{m}{4}$ alors $m = 4x$

et $\frac{-m^2-8m+8}{8} = \frac{1}{8} \times \left(-(4x)^2 - 8 \times 4x + 8\right)$

$= \frac{1}{8}\left(-16x^2 - 32x + 8\right)$

$= -2x^2 - 4x + 1$

Donc $\boxed{\forall m \in \mathbb{R},\ O_m \text{ appartient à la parabole } y = -2x^2 - 4x + 1}$