Feuille de TD n°3   **Angles et Trigonométrie**

1 Radian et cercle trigonométrique

1.1 Le cercle trigonométrique

1.2 Degré - Radian

$\boxed{1}$ **Conversions :**

1. Convertissez en degré les mesures d'angles suivantes exprimées en radian :

$$\frac{2\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{5} \qquad \frac{3\pi}{5} \qquad \frac{\pi}{10} \qquad \frac{7\pi}{10} \qquad \frac{5\pi}{12} \qquad 1$$

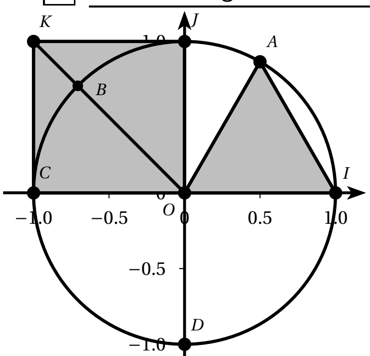
2. Convertissez en radian les mesures d'angles suivantes exprimées en degré, écrire les fractions sous forme irréductible lorsque cela est possible :

$$1 \qquad 10 \qquad 20 \qquad 75 \qquad 150$$

2 Angle orienté d'un couple de vecteurs

2.1 Définition

$\boxed{2}$ Premiers angles orientés de vecteurs :



1. **Vrai ou Faux ?**
   (a) A est associé à $\frac{\pi}{3}$
   (b) B est associé à $\frac{2\pi}{3}$
   (c) C est associé à 3π
   (d) D est associé à $\frac{17\pi}{2}$
2. Donner une mesure en radians des angles suivants :

(a) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$ | (b) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})$ | (c) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

3. Donner une mesure en radians des angles suivants :

(a) $(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB})$ | (b) $(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB})$ | (c) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$

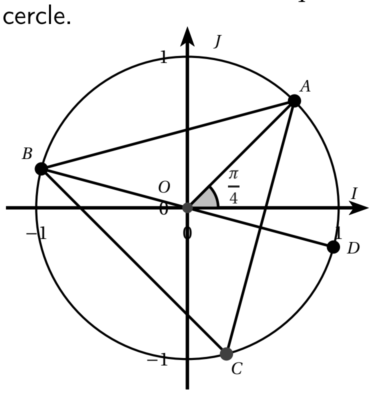
2.2 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

$\boxed{3}$ Donner la mesure principale des angles de mesures respectives $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{19\pi}{3}$ et $\frac{59\pi}{8}$

$\boxed{4}$ Donner la mesure principale des angles de mesures respectives

1. (a) $\frac{35\pi}{3}$ | (b) $\frac{17\pi}{6}$ | (c) $-\frac{23\pi}{4}$
2. (a) $\frac{23\pi}{2}$ | (b) $-\frac{17\pi}{3}$ | (c) $\frac{173\pi}{6}$

$\boxed{5}$ Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ 2\pi$. $[BD]$ est un diamètre du cercle.



1. Donner des réels associés aux points A, B, C et D.
2. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

(a) $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})$ | (b) $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$ | (c) $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})$

2.3 Propriétés

$\boxed{6}$ **Relation de Chasles dans un triangle**
On se donne un triangle ABC. Calculer la somme suivante et conclure :

$$S = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$$

Vous rappelez-vous de la démonstration donnée en 5^{e} de cette propriété ?

$\boxed{7}$ Soient A, B, C et D quatre points du plan. Démontrer l'égalité suivante :

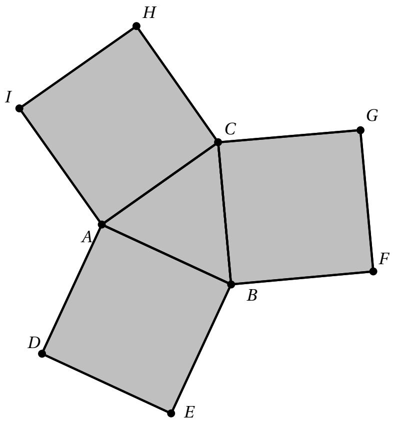
$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) \equiv 0\ [2\pi]$$

Interpréter cette égalité.

$\boxed{8}$

1. Construire un triangle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{5}$.
2. Déterminer la mesure principale des angles orientés : $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right)$

$\boxed{9}$ Sur la figure ci-dessous, trois carrés entourent un triangle équilatéral



Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

1. $\left(\overrightarrow{BE}\,;\overrightarrow{BA}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BC}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{EB}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{CG}\,;\overrightarrow{CH}\right)$
5. $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CF}\right)$
6. $\left(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{IC}\right)$

3 Trigonométrie

3.1 Cosinus et sinus d'un réel

$\boxed{10}$ Déterminer le signe des nombres suivants, sans utiliser de calculatrice.

1. $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8}$
2. $\cos\frac{11\pi}{7}$ et $\sin\frac{11\pi}{7}$

3.2 Propriétés

3.3 Cosinus et sinus des angles associés

$\boxed{11}$ Compléter les pointillés avec « égaux » ou « opposés ».

1. Les réels $\frac{23\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ ont des cosinus ...

   Les réels $-\frac{13\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ ont des cosinus...
2. Les réels $\frac{17\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ ont des sinus ...

   Les réels $-\frac{23\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ ont des sinus ...
3. Les réels $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ ont des cosinus ...et des sinus ...
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{6}$ et de $\sin\frac{5\pi}{6}$

3.4 Équations trigonométriques

$\boxed{12}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x suivantes :

1. $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$
2. $\sin x = -0,5$
3. $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

   Indic : Poser $X = \cos x$

$\boxed{13}$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\tan x = -\sqrt{3}$
3. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$
4. $\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{14}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) $\sin x = \cos\frac{\pi}{8}$.

1. Trouver un réel a tel que $\cos\frac{\pi}{8} = \sin a$.

   $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. En déduire les solutions de (E).

$\boxed{15}$ Résoudre les équations suivantes :

1. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ dans l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x)$ dans $\mathbb{R}$
3. $2\sin^2(x) - 3\cos x - 2 = 0$ dans $[-3\pi\,;\pi]$
4. $\cos x = \sin x$ dans $]-\pi\,;\pi]$
5. $\cos 3x = \sin 2x$ dans $[0\,;2\pi]$

$\boxed{16}$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants.

1. $\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$
4. $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \sin x = \frac{3}{4} \end{cases}$

$\boxed{17}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3}$
2. $\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2} = 1$

3.5 Formules de trigonométrie

$\boxed{18}$

1. Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.
2. Même question avec $\cos 4x$ et $\sin 4x$. Que remarque-t-on pour $\sin 4x$?

$\boxed{19}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(2x)$, on pourra poser $x = \frac{\pi}{4} + X$.
2. $\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x$

Feuille de TD n°3
Réponses ou Solutions

1 Radian et cercle trigonométrique

1.1 Le cercle trigonométrique

1.2 Degré - Radian

2 Angle orienté d'un couple de vecteurs

2.1 Définition

$\boxed{2}$

1. 1. V
   2. F : $\dfrac{3\pi}{4}$
   3. V
   4. F : $\dfrac{17\pi}{2} \equiv 8\pi + \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
2. (a) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
   (b) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
   (c) $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$
3. (a) $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
   (b) $\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}\right) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$
   (c) $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right) \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$

2.2 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

$\boxed{3}$ $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{5\pi}{8}$

$\boxed{4}$

1. (a) $\dfrac{35\pi}{3} \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
   (b) $\dfrac{17\pi}{6} \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$
   (c) $-\dfrac{23\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$
2. (a) $\dfrac{23\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
   (b) $-\dfrac{17\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$
   (c) $\dfrac{173\pi}{6} \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

$\boxed{5}$

1. $A\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, pour B, on fait $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3}(120°) = \underline{\dfrac{11\pi}{12}}$ et pour C, on fait le contraire : $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} = \underline{-\dfrac{5\pi}{12}}$ enfin, pour D, on part de B et on fait une rotation de π radians : $\dfrac{11\pi}{12} - \pi = \underline{-\dfrac{\pi}{12}}$.
2. (a) l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{11\pi}{12}$, c'est immédiat par la question précédente.

(b) $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}\right)=\underbrace{-\dfrac{\pi}{12}-\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)}_{\text{diff. entre pos arrivée et départ}}=\dfrac{4\pi}{12}=\underline{\dfrac{\pi}{3}}$

(c) $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)=-\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{4\pi}{12}=-\dfrac{\pi}{3}$.

2.3 Propriétés

6

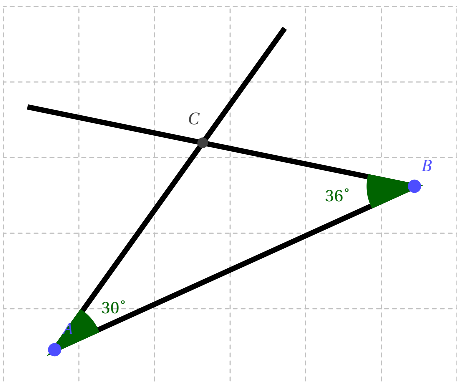
$$\begin{aligned}S &\equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)\ [2\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)\ [2\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}\right)\ [2\pi]\\ &\equiv \pi\ [2\pi]\end{aligned}$$

7 Soit $S=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$

$$\begin{aligned}S&\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) && [2\pi]\\ &\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AB}\right) && [2\pi]\\ &\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB}\right) && [2\pi]\\ &\equiv 0 && [2\pi]\end{aligned}$$

Une interprétation possible est :
La somme des angles orientés dans un quadrilatère est égale à 2π.

8

1. Figure : 

2.
   - $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+\pi\equiv\dfrac{\pi}{6}+\pi\equiv\dfrac{7\pi}{6}\equiv-\dfrac{5\pi}{6}(\mathrm{MP})\ [2\pi]$
   - On peut bricoler avec la somme des angles d'un triangle, en raisonnant avec les angles géométriques, cependant, il faut faire attention à l'orientation ou bien on peut utiliser avec profit la relation de Chasles sur les angles :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)&\equiv\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right) && [2\pi]\\ &\equiv\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)+\pi+\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) && [2\pi]\\ &\equiv-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{\pi}{5} && [2\pi]\\ &\equiv\frac{19\pi}{30} && [2\pi]\end{aligned}$$

   (ça correspond bien à un angle de 114 °)
   - $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)+\pi\equiv\dfrac{\pi}{5}+\pi\equiv\dfrac{6\pi}{5}\equiv-\dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$

9

1. $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BA}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$
2. $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{3}$
3. $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{EB}\right)=\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DA}\right)=\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AD}\right)+\pi=\pi$

4. $\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CH}\right)=\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CH}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=-\pi-\dfrac{\pi}{3}\notin\,]-\pi\,;\pi]$
   Donc $\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CH}\right)=-\pi-\dfrac{\pi}{3}+\boldsymbol{2\pi}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$
5. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CF}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CF}\right)=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)+\cancel{\pi}+\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CF}\right)+\cancel{\pi}=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{12}$
6. $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{IC}\right)=\cancel{\dfrac{\pi}{4}}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\pi-\cancel{\dfrac{\pi}{4}}=-\dfrac{\pi}{6}$

3 Trigonométrie

3.1 Cosinus et sinus d'un réel

10

1. $\cos\dfrac{5\pi}{8}<0$ et $\sin\dfrac{5\pi}{8}>0$ car $\dfrac{5\pi}{8}\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$
2. $\cos\dfrac{11\pi}{7}>0$ et $\sin\dfrac{11\pi}{7}<0$ car $\dfrac{11\pi}{7}\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$

3.2 Propriétés

3.3 Cosinus et sinus des angles associés

11

1. égaux, égaux
2. opposés, égaux
3. opposés, égaux
4. $\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$

3.4 Équations trigonométriques

12

1. $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\times 2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$
2. $\sin x=-0{,}5\iff\sin x=\sin-\dfrac{\pi}{6}$

   $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\times 2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\underbrace{\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}_{\equiv-\frac{5\pi}{6}}+k\times 2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. En posant $X=\cos x$, on transforme l'équation en :

$$2X^2+2\sqrt{2}X+1=0\iff\left(\sqrt{2}X+1\right)^2=0\iff X=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Pour finir, on doit retrouver les solutions en x :

$$\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{3\pi}{4}$$

   $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\times 2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{3\pi}{4}+k\times 2\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

13

1. $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\iff\cos x=\cos\dfrac{\pi}{6}$ ainsi $\mathscr{S}=\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$
2. $\tan x=-\sqrt{3}\iff\tan x=-\dfrac{\pi}{3}$ ainsi $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

3. $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

$\iff 2x+\dfrac{\pi}{3}=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $2x+\dfrac{\pi}{3}=\pi+2\ell\pi,\ \ell\in\mathbb{Z}.$

$\iff 2x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $2x=\dfrac{2\pi}{3}+2\ell\pi,\ \ell\in\mathbb{Z}.$

$\iff x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\dfrac{\pi}{3}+\ell\pi,\ \ell\in\mathbb{Z}.$

4. $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\iff 3x-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\iff 3x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\iff x=\dfrac{2\pi}{9}+k\dfrac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

14 $\cos\dfrac{\pi}{8}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{8}$ et puis on déroule

15

1. $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3};\dfrac{7\pi}{3}\right\}$
2. $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\times\dfrac{2\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$
3. $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{5\pi}{2};-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}$
4. $\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right\}$
5. $\mathscr{S}=\left\{\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{\pi}{10};\dfrac{5\pi}{10}=\dfrac{\pi}{2};\dfrac{9\pi}{10};\dfrac{13\pi}{10};\dfrac{17\pi}{10}\right\}$

16 On utilise le cercle trigonométrique et les angles associés.

1. $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$
2. $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$
3. $\begin{cases}\tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\iff x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$
4. $\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\iff x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$
5. $\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{5}}{4}\\ \sin x=\dfrac{3}{4}\end{cases}\implies\cos^2x+\sin^2x=\dfrac{14}{16}\neq1$ donc il n'y a pas de solution réelle.

17

3.5 Formules de trigonométrie

18

1. $\cos3x=\cos(2x+x)=\ldots=4\cos^3x-3\cos x$ et $\sin3x=-4\sin^3x+3\sin x$
2. $\cos4x=\cos(3x+x)=\ldots=8\cos^4x-8\cos^2x+1$ et $\sin4x=4\sin x\cos^3x-4\sin^3x\cos x=8\sin x\cos^3x-4\sin x\cos x$

Pour un prolongement, voir DM « Polynômes de Tchebichev »

19

1. L'équation se ramène à $\cos X=\cos2X$ donc $X=\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$. Puis $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.
2. L'équation est équivalente, par factorisation, à :
   $\cos4x\cos2x=-\sin2x\cos4x\iff\cos4x=0$ ou $\cos2x=-\sin2x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$.
   Les solutions sont : $x=\pm\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$.