Chapitre 3 : Éléments de trigonométrie

Table des matières

1 Radian et cercle trigonométrique **1**
1.1 Le cercle trigonométrique . . . 1
1.2 Unité de mesure d'angle, le Radian . . . 2

2 Angle orienté d'un couple de vecteurs **3**
2.1 Définition . . . 3
2.2 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs . . . 4
2.3 Propriétés . . . 4

3 Trigonométrie **5**
3.1 Cosinus et sinus d'un nombre réel . . . 5
3.2 Propriétés . . . 5
3.3 Cosinus et sinus des angles associés . . . 6
3.4 Équations trigonométriques . . . 6
3.5 Formules de trigonométrie . . . 7
3.6 Tangente d'un nombre réel . . . 7

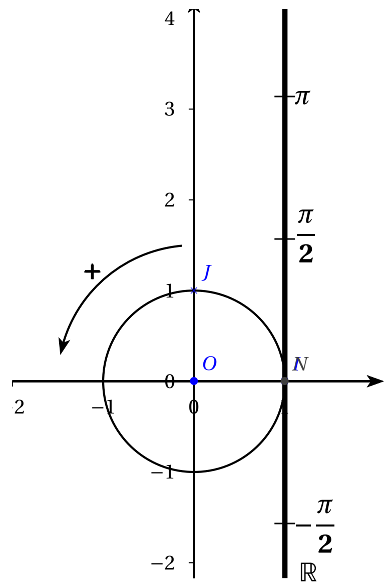
1 Radian et cercle trigonométrique

1.1 Le cercle trigonométrique

Définition 1 (Cercle trigonométrique).

Dans un repère orthonormal, le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 centré sur l'origine du repère, doté d'un « sens de parcours », sens inverse du sens horaire.

Il permet d'illustrer et de définir les notions d'angle de vecteurs, de radian, de cosinus et sinus et tangente d'un nombre réel.
Cet objet particulier deviendra un objet familier : il vous suivra pendant tout le reste de votre scolarité et vous y ferez référence à de nombreuses reprises.



Dans le cercle trigonométrique,

Rayon : $r = \ldots\ldots$
Périmètre : $p = \ldots\ldots$
Tout nombre $x \in \mathbb{R}$ est associé à un point M sur le cercle. Inversement, tout point du cercle a une infinité d'antécédents sur la droite des réels.

1.2 Unité de mesure d'angle, le Radian

On définit le radian en « enroulant » la droite réelle autour du cercle trigonométrique.

Définition 2 (radian).

Si M est le point du cercle associé au nombre réel x alors la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radian est la *longueur de l'arc* $\widehat{IM}$ sur le cercle de rayon 1.

Remarque 1.

- Une mesure d'un angle plat est donc de π rad, celle d'un angle droit est ainsi de $\frac{\pi}{2}$ rad.
- Si α est une mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha + k2\pi$ est également une mesure en radians de cet angle.

Propriété 1.

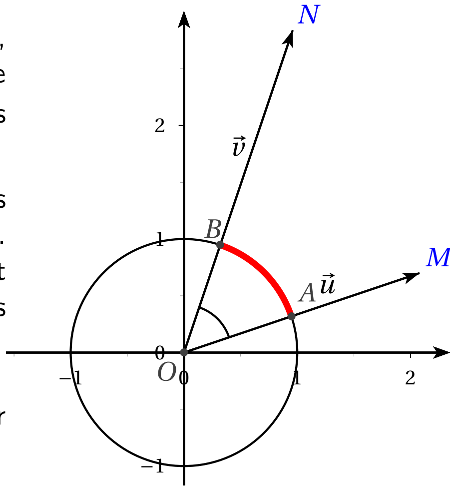
Les mesures des angles en degré et en radian comprises dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ sont proportionnelles.

Angle en radian (*rad*)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\boldsymbol{\pi}$	2π
Angle en degré ($^\circ$)	0					**180**	

2 Angle orienté d'un couple de vecteurs

2.1 Définition

Si on considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, alors on peut leur associer deux représentants d'origine O dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. On définit ainsi deux points M et N tels que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$.
Soient alors A et B les intersections respectives des droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique. On note alors a et b deux nombres réels que l'on peut associer aux points A et B par enroulement de l'axe des réels.



On note $\alpha=b-a$. Ainsi, $|\alpha|$ représente alors la longueur de l'arc $\widehat{AB}$

Définition 3 (Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs).

Quel que soit l'entier $k\in\mathbb{Z}$, le nombre réel $\alpha+2k\pi$ est *une mesure* de l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $(\vec{u};\vec{v})$ (on l'écrit comme le *couple* de vecteurs).

Remarque 2.

- On fait alors un abus de langage : on confond (dans les notations tout au moins) la mesure d'un angle et l'angle lui même.
- La norme des vecteurs n'intervient pas dans la mesure des angles de vecteurs, seulement leur sens et leur direction.
- Une mesure d'angle orientée est définie à $k\times 2\pi$ près. On dit qu'elle est définie modulo 2π. On l'écrit :

$$(\vec{u};\vec{v})\equiv\alpha[2\pi] \text{ ou } =\alpha \mod(2\pi)$$

  Derrière la mesure d'angle orienté de vecteurs se cache la notion de rotation de centre O : de combien dois-je tourner autour de O de façon à passer de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OB}$. Il n'y a pas qu'une seule façon...
  La confusion entre angle et mesure est la même qu'entre la rotation et l'angle de rotation.

Propriété 2 (Orthogonalité, colinéarité).

En particulier,

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u};\vec{v})\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u};\vec{v})\equiv 0\ [\pi]$

2.2 Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

Un angle orienté de vecteurs possède donc une infinité de mesures. En effet, si α est une mesure de l'angle, alors toutes les mesures de la forme $\alpha + k \times 2\pi$ (où k est un nombre entier relatif) sont des mesures de cet angle. Nous allons privilégier une mesure parmi toutes celles-là.

Définition 4 (Mesure principale).

On appelle *mesure principale* d'un angle sa mesure en radians appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$

Remarque 3.

- La mesure principale n'est donc plus définie modulo 2π !
- Parmi toutes les mesures d'un angle, c'est celle qui a la plus petite valeur absolue.
- On peut faire un parallèle entre la mesure principale d'un angle de vecteurs et la forme irréductible d'une fraction par exemple.

2.3 Propriétés

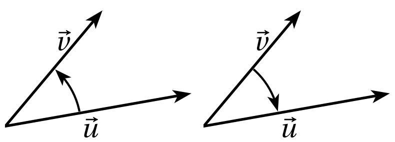
Propriété 3.

Soient k et k' deux réels ; $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.

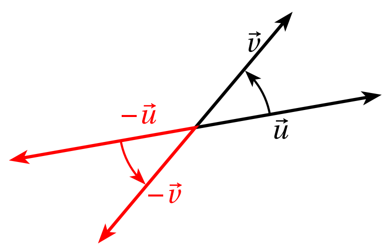
- $(\vec{u};\vec{v}) \equiv -(\vec{v};\vec{u})\,[2\pi]$. angle opposé
- si k et k' sont de même signe, alors $\left(k\vec{u};k'\vec{v}\right) \equiv (\vec{u};\vec{v})\,[2\pi]$.
- si k et k' sont de signes contraires, alors $\left(k\vec{u};k'\vec{v}\right) \equiv \pi + (\vec{u};\vec{v})\,[2\pi]$.
- Relation de Chasles :
$$(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{w}) + (\vec{w};\vec{v}) \quad [2\pi]$$

■ **Exemple 1:**
Avec des angles orientés de vecteurs

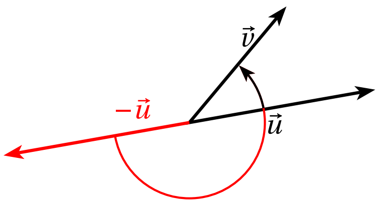
$\boxed{(\vec{v};\vec{u}) \equiv \ldots\ldots\ldots \; [2\pi]}$



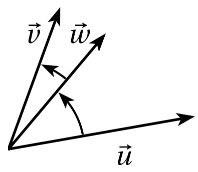
$\boxed{(-\vec{u};-\vec{v}) \equiv \ldots\ldots\ldots \; [2\pi]}$



$\boxed{(-\vec{u};\vec{v}) \equiv \dots\dots\dots\dots \quad [2\pi]}$



Chasles : $\boxed{(\vec{u};\vec{w})+(\vec{w};\vec{v}) \equiv \dots\dots\dots \quad [2\pi]}$



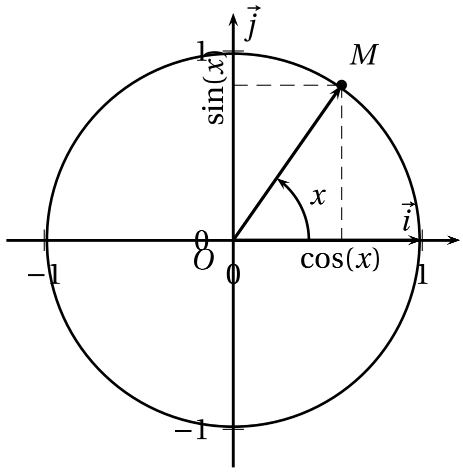
3 Trigonométrie

3.1 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Étant donné un réel x, on définit M sur le cercle trigonométrique tel que $\left(\vec{i};\overrightarrow{OM}\right) = x$ rad. On peut alors définir :

Définition 5 (Cosinus et sinus d'un nombre réel).

On appelle *cosinus* et *sinus* de x les abscisse et ordonnée de M respectivement. On les note $\cos x$ et $\sin x$.



3.2 Propriétés

Propriété 4.

Quel que soit le nombre réel x,

- $\dots \leqslant \cos x \leqslant \dots$
- $\dots \leqslant \sin x \leqslant \dots$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = \dots$

Propriété 5 (Tableau des valeurs particulières).

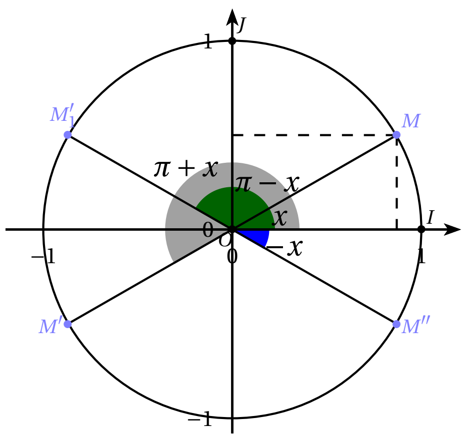
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						

3.3 Cosinus et sinus des angles associés

Propriété 6.

Soit x un nombre réel, on a :

1. <u>Périodicité :</u> $\sin(2\pi + x) = \dots\dots\dots$ et $\cos(2\pi + x) = \dots\dots\dots$
2. $\sin(-x) = \dots\dots\dots$ et $\cos(-x) = \dots\dots\dots$
3. $\sin(\pi + x) = \dots\dots\dots$ et $\cos(\pi + x) = \dots\dots\dots$
4. $\sin(\pi - x) = \dots\dots\dots$ et $\cos(\pi - x) = \dots\dots\dots$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots\dots\dots$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots\dots\dots$ (formules d'échanges)



3.4 Équations trigonométriques

Propriété 7.

Si x et a sont des nombres réels donnés, alors

- $\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou } x = -a + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou } x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3.5 Formules de trigonométrie

Propriété 8 (Formules d'addition).

- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

Propriété 9 (Formules de duplication).

- $$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Propriété 10 (Formules de linéarisation).

- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
- $\cos x \sin x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

3.6 Tangente d'un nombre réel

Comme $\cos x = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

Définition 6 (Tangente d'un nombre réel).

Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ on définit la tangente de x par :

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Propriété 11 (Valeurs remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\tan(x)$						

Propriété 12 (Formulaire).

1. Périodicité : Pour tout $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\tan(x+\pi)=\tan x$
2. Quand ces opérations sont possibles,
   - $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
   - $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
   - $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
   - $\tan(2a)=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
   - $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$