

Correcher DM n°3 - Suites - CPES Général.

Exercice 1 1°) a) $\sum_{i=1}^{16} i = \sum_{i=1}^{16} i - 1 - 2 = \frac{16 \times 17}{2} - 3 = 133$

b) $\sum_{k=0}^{25} 2k+1 = 2 \sum_{k=0}^{25} k + \sum_{k=0}^{25} 1 = 2 \frac{25 \times 26}{2} + 26 = 26^2$

2°) $\sum_{k=0}^m (3k-1) = 3 \sum_{k=0}^m k - \sum_{k=0}^m 1 = 3 \frac{m(m+1)}{2} - (m+1) = \frac{(m+1) \times (3m-2)}{2}$

3°) $\sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}\right)$

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 0,9 u_n + 90 \end{cases}$ et $v_n = u_n - 900$ par tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 900 = 0,9 u_n + 90 - 900 = 0,9 u_n - 810 = 0,9(u_n - 900)$

$v_{n+1} = 0,9 v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,9. $v_0 = 100$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 100 \times 0,9^n$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 900 = 100 \times 0,9^n + 900$

3°) u_{44} est la première valeur de (u_n) inférieure ou égale à 901. (la limite est 900).

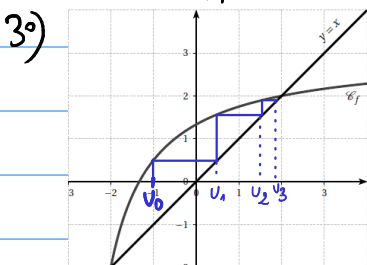
Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \end{cases}$

1°) $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{\frac{3}{2} + 4}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{11}{7}$

2°) $\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{3}{2} \\ u_2 - u_1 = \frac{15}{14} \end{cases}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\begin{cases} u_1/u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_2/u_1 = \frac{22}{7} \end{cases}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.



4°) Il semble que (u_n) tende vers 2.

5°) On définit, par tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{3u_n + 4}{u_n + 3} + 2}{\frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - 2} = \frac{3u_n + 4 + 2(u_n + 3)}{3u_n + 4 - 2(u_n + 3)}$

$v_{n+1} = \frac{5u_n + 10}{u_n - 2} = 5 v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 5.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 5^n$ et $v_0 = -\frac{1}{3}$ donc $v_n = -\frac{1}{3} \times 5^n$

$$5.c) \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2} \Leftrightarrow v_n \times (u_n - 2) = u_n + 2$$

$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = 2 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2 + 2v_n}{v_n - 1}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2 - \frac{2}{3} \times 5^n}{-\frac{1}{3} \times 5^n - 1} = \frac{2/5^n - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3} - \frac{1}{5^n}} \quad (\text{la limite est } 2)$$

Exercice 4

$$u_n = \frac{27}{100^n} \quad 1.) u_0 = 27, u_1 = 0,27, u_2 = 0,0027$$

$$\text{Il semble que } u_k = 0, \underbrace{00000000 \dots}_{2 \times (k-1) \text{ zéros}} \infty 27 \quad \text{si } k > 0.$$

$$2.) (u_n) \text{ SG de raison } \frac{1}{100}, u_0 = 27.$$

$$3.) S_m = \sum_{k=0}^m u_k. \quad a) S_1 = 27,27 \quad S_2 = 27,2727, \quad S_3 = 27,272727.$$

$$b) \text{ Il semble que } S_m = 27, \underbrace{272727 \dots 27}_m \text{ fois "27"}$$

$$c) S_m = 27 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{100}} = 27 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1}}{\frac{99}{100}} = 2700 \times \frac{1 - \frac{1}{100^{m+1}}}{99}$$

$$d) \text{ Comme } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^{m+1} = 0, \text{ on en déduit que}$$

$$27, 2727272727 \dots = \frac{2700}{99} = \frac{300}{11}$$