Chapitre 4 : Généralités sur les fonctions

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Quelques définitions

Définition 1 (Vocabulaire des fonctions).

On note E et F deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de E dans F. On dit que E est l'*ensemble de départ* (et pas ensemble de définition) et F l'*ensemble d'arrivée* de la fonction f.
L'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est l'ensemble des nombres de E ayant une image par f.
Le sous ensemble

$$\Gamma = \left\{ \left(x, f(x)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E \right\}$$

est appelé *graphe* de f.
Si x est un élément de E et $y = f(x)$, alors y est appelé *image* de x par f et x est appelé *antécédent* de y par f.

NOTATION :
On note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions de E dans F.

Remarque 1.

Soit f une fonction de E dans F, définie sur $\mathscr{D}_f$.

1. Si x est un élément de $\mathscr{D}_f$ alors x admet une image unique dans F.
2. Si y est un élément de F, alors il peut n'avoir aucun antécédent, en avoir un unique ou plusieurs.

NOTATION :
Si f est une fonction de E dans F alors on note :

$$f: \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Définition 2 (bornitude)**.**

Soit une fonction $E \xrightarrow{f} F$.
On dit que f est

- *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$.
- *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$.
- *bornée* si f est minorée **et** majorée.

Définition 3 (Maximum et Minimum)**.**

On dit que f admet un *minimum* [resp. *maximum*] m [resp. M] sur E s'il existe $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ [resp. $f(x) \leqslant f(x_0)$]. On dit que le minimum m [resp. maximum M] est *atteint* en x_0.

■ **Exemple 1:**
La fonction $f: x \mapsto 2(x-1)^2 - 3$ admet un minimum de -3, atteint en 1.

▶ Exercice 1

Montrer que $g: x \mapsto \sin\left(5x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition 4 (parité)**.**

- On dit qu'une fonction f est *paire* si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit qu'une fonction f est *impaire* si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

▶ Exercice 2

Prouver que la fonction carré est paire, que la fonction inverse est impaire.

Définition 5 (périodicité).

On dit qu'une fonction est *périodique de période* T (ou T*−périodique*) si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

▶ Exercice 3

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

Définition 6 (Variations).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite *croissante* [resp. strictement croissante] si et seulement si pour tous $a, b \in I$, tels que $a < b$, $f(a) \leqslant f(b)$ [resp. $f(a) < f(b)$]
- f est dite *décroissante* [resp. strictement croissante] si et seulement si pour tous $a, b \in I$, tels que $a < b$, $f(a) \geqslant f(b)$ [resp. $f(a) > f(b)$]
- f est dite *constante* si et seulement si pour tous $a, b \in I$, tels que $a < b$, $f(a) = f(b)$

▶ Exercice 4

Montrer que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$.

1.2 Opérations sur les fonctions

Définition 7 (Combinaison linéaire et produit).

Si f et g sont définies sur un ensemble E, on peut définir les fonctions $f+g$, λf pour tout λ réel et $f \times g$ pour tout $x \in E$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f+g : x \mapsto (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) \\ \lambda f : x \mapsto \lambda f(x) & = & \lambda f(x) \\ f \times g : x \mapsto (f \times g)(x) & = & f(x) \times g(x) \end{array}\right.$$

Remarque 2.

On utilise souvent la fonction différence : $f - g$. Pour déterminer des positions relatives de courbes, par exemple, on cherche le signe de $f - g$.

Lorsqu'on enchaîne les transformations,si l'ensemble d'arrivée de la première fonction est dans l'ensemble de définition de la seconde, alors la fonction qui en résulte est appelée *composée* des deux premières :

$$v \circ u \; : \; x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{v}{\longmapsto} v(u(x)) := v \circ u(x)$$

L'opération de *composition* entre deux fonctions se note $\circ$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[rr, bend right, "\boldsymbol{v \circ u}"'] & u(x) \arrow[r, bend left, "v"] & v(u(x)) = v \circ u(x) \end{tikzcd}$$

Remarque 3 (Non commutativité).

L'opération de composition n'est pas commutative en général.

$$\boldsymbol{u \circ v \neq v \circ u}$$

■ Exemple 2:

Soit les fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x+1$ pour tout x réel.
On constate que $u \circ v(x) = (x+1)^2$ et $v \circ u(x) = x^2+1$ et ces deux fonctions sont différentes.

▶ Exercice 5

Décomposer les fonctions f et g suivantes sous forme $u \circ v$, on précisera u et v.

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
2. $g(x) = \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

2 Limite de fonctions

2.1 Limites en $\pm\infty$

Définition 8 (limite finie en $\pm\infty$).

On dit que la fonction f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note

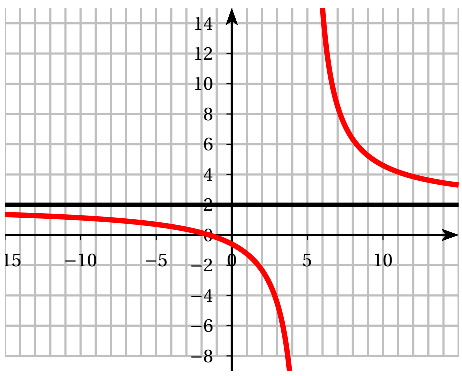
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$$

Autrement dit, $\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x > K, \quad f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[\text{ (ou } |f(x)-\ell| < \epsilon)}$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors la courbe représentative de f se confond en l'infini avec la droite horizontale $y = \ell$. On dit alors que la droite $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* de la courbe de f.

■ Exemple 3:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-5}$.
On a : $\dfrac{2x+3}{x-5} = \dfrac{2(x-5)+13}{x-5} = 2 + \dfrac{13}{x-5}$.
On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-5} = 2$.
Et donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction.



Propriété 1 (Fonctions puissance).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; +\infty[$. On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

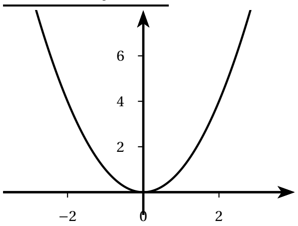
Définition 9 (limite infinie en $\pm\infty$).

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour un x assez grand. On note

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

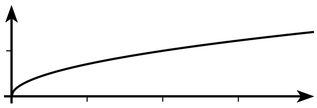
Autrement dit $\boxed{\forall A\in\mathbb{R},\ \exists k\in\mathbb{R},\ x\geqslant k \Rightarrow f(x)>A}$

■ **Exemple 4:**

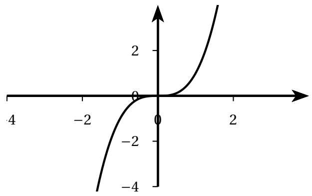


$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Propriété 2 (Fonctions puissance).

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in]0;+\infty[$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$$

⚠

Il y a des fonctions qui n'admettent pas de limites en $\pm\infty$: $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$, etc... Tracer les courbes sur la calculatrice

2.2 Limite infinie en un réel $a\in\mathbb{R}$

Définition 10 (limites en a).

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert du type $]a-h;a[$ ou $]a;a+h[$.
La fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x « assez proche » de a. On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

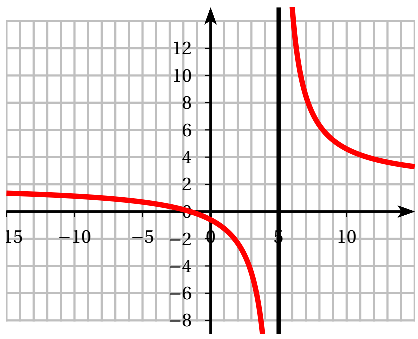
Dans ce cas, la droite $x=a$ *est une asymptote verticale* à la courbe $\mathscr{C}_f$.

■ **Exemple 5:**

$$\lim_{\substack{x\to5\\x<5}} \frac{2x+3}{x-5} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to5\\x>5}} \frac{2x+3}{x-5} = +\infty$$

Il faut regarder quel sera le signe de la fraction pour déterminer si la limite sera plus ou moins l'infini.

Et donc la droite $x=5$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction.



2.3 Opérations

2.3.1 Somme, produit, inverse et quotient

Les règles d'opérations sur les limites des fonctions sont les mêmes que pour les suites.

1. Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

2. Limite d'un produit :

f	g	$f\times g$
ℓ	ℓ'	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq 0$	∞	∞ (**)
∞	∞	∞ (**)
0	∞	**F.I.**

3. Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell\neq 0$	0	∞ (**)
ℓ	∞	0
0	0	**F.I.**
∞	∞	**F.I.**

(**) ⚠Règle des signes

2.3.2 Composée

Propriété 3 (Composition).

a, b et c sont des réels, éventuellement infinis.
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} f(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f\circ g(x) = c$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & b \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

Exemple 6:

Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty}$

3 Premières fonctions de référence

3.1 Fonction Carré

Définition 11.

On appelle *fonction carré* la fonction qui à tout nombre réel x, associe son carré.

$$c : x \mapsto x^2$$

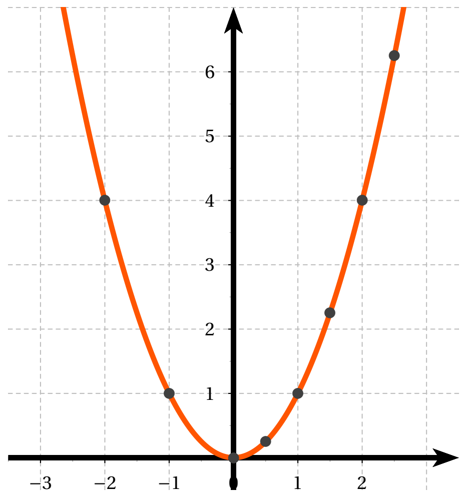
Propriété 4.

La fonction carré est

1. paire.
2. décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

On a donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$c(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



▶ Exercice 6

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 5$
2. Résoudre les inéquations $x^2 < 5$ et $x^2 \geqslant 5$

3.2 Fonction Racine carrée

Définition 12.

On appelle fonction racine carrée la fonction qui à tout nombre réel positif ou nul x, associe sa racine carrée.

$$r : x \mapsto \sqrt{x}$$

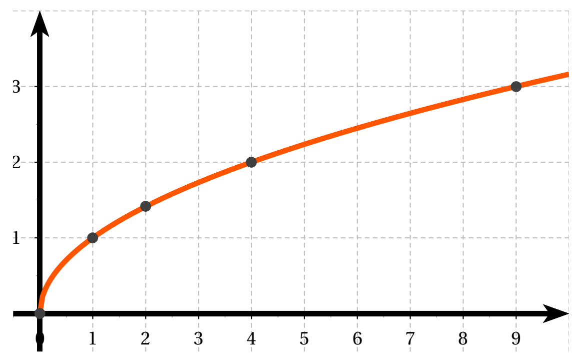
Propriété 5.

La fonction Racine carrée est

1. Croissante sur $[0; +\infty[$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

On a donc

x	0	$+\infty$
$r(x)$	0 ↗	$+\infty$



Propriété 6 (Lien avec la fonction carrée).

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x}^2 = x$

Propriété 7 (Équations avec des racines carrées).

$$\sqrt{A} = B \iff \begin{cases} A = B^2 \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

▶ Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x^2+2x-3} = x-2$
2. $\sqrt{1-4x} + x = 1$
3. $8\sqrt{3x+1} = 3x+17$

$\emptyset$, $\{-2, 0\}$, $\{5\}$

3.3 Fonction valeur absolue

Définition 13.

On appelle *fonction valeur absolue* la fonction qui à tout nombre réel x, associe sa valeur absolue.

$$v : x \mapsto |x| \begin{cases} = x \text{ si } x \text{ est positif} \\ = -x \text{ si } x \text{ est négatif} \end{cases}$$

Propriété 8 (Lien avec la fonction racine).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

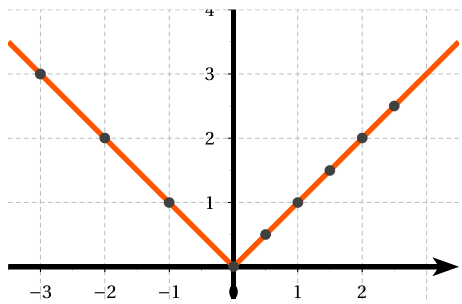
Propriété 9.

La fonction valeur absolue est

1. paire.
2. décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$

On a donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$v(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



▶ Exercice 8

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-2| - \left|-\dfrac{3}{2}x+1\right|$

1. Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue et représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$.
   On pourra utiliser un tableau pour synthétiser les expressions de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = -3$.

3.4 Fonction Inverse

Définition 14.

On appelle *fonction inverse* la fonction qui à tout nombre réel x **non nul**, associe son inverse.

$$i : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

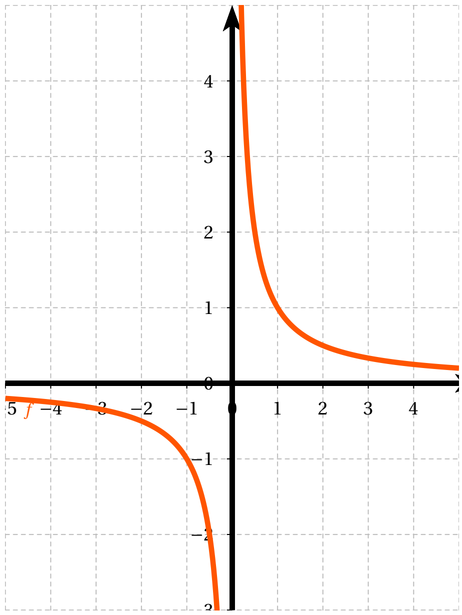
Propriété 10.

La fonction inverse est

1. Définie, dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
2. impaire.
3. décroissante sur chaque intervalle $]-\infty; 0[$, décroissante sur $]0; +\infty[$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

On a donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$i(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘



3.5 Fonction Cube

Définition 15.

On appelle fonction cube la fonction qui à tout nombre réel x, associe son cube.

$$\text{cb} : x \longmapsto x^3$$

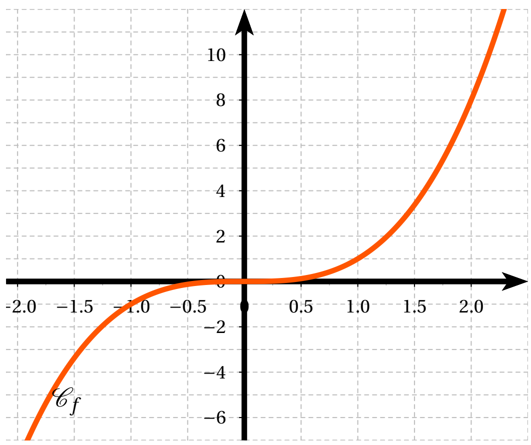
Propriété 11.

La fonction cube est

1. impaire
2. Croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

On a donc

x	$-\infty$	$+\infty$
$cb(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



4 Dérivation

4.1 Nombre dérivé

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et $x \in I$.
Le taux d'accroissement entre a et $a+h$ [resp. entre a et b] est

$$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_a(h)$ existe, alors cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a*. On note $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_a(h) = f'(a)$.

Définition 16 (Équation de la tangente)**.**

Si f est dérivable en a, alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a existe et a pour équation $\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.

4.2 Fonction dérivée

Si f admet un nombre dérivé pour tout a de l'intervalle I, on dit que f est *dérivable sur I* et on appelle fonction dérivée de f la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé en x :

$$f' \; : \; x \mapsto f'(x)$$

Fonction f	Dérivable sur	Fonction dérivée f'
$f(x) = mx+p$	$\mathbb{R}$	m
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$3x^2$
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$\begin{cases} 1 & = \text{sur }]0; +\infty[\\ -1 & = \text{sur }]-\infty; 0[\end{cases}$

4.3 Formules de calcul de fonctions dérivées

Propriété 12 (Florilège de formules de Première)**.**

- $(u+v)' = u'+v'$
- $(uv)' = u'v+uv'$
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
- $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$

▶ Exercice 9

Calculer les dérivées des fonctions suivantes f, g et h après avoir déterminé leur domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$
2. $g(x) = 4x^2 - 5x + 2x\sqrt{x}$

Propriété 13 (Dérivée d'une composée (admis)).

Soit $E \xrightarrow{u} F$ et $F \xrightarrow{v} G$ deux fonctions réelles telles que u est dérivable sur E et v dérivable sur F. Alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur E et pour tout $x \in E$,

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$$

$$\boxed{(v \circ u)' = u' \times v' \circ u}$$

On admettra cette propriété.

▶ Exercice 10

Après avoir écrit la décomposition des fonctions suivantes en composée de deux fonctions, calculer leur fonction dérivée. On pourra déterminer leur ensemble de dérivabilité.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

4.4 Lien avec les variations

Théorème 1 (Signe de la dérivée et variations (admis)).

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

▶ Exercice 11

Étudier les variations de chacune des fonctions f et g suivantes, après avoir déterminer leur domaine de dérivabilité :

1. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.
2. $g(x) = \dfrac{1-x}{x^2+6x-5}$.

5 Continuité et TVI

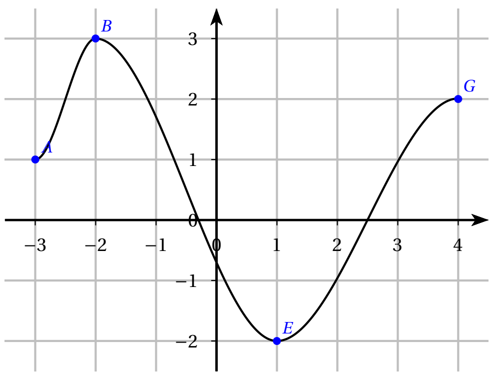
5.1 Continuité

Définition 17 (Continuité).

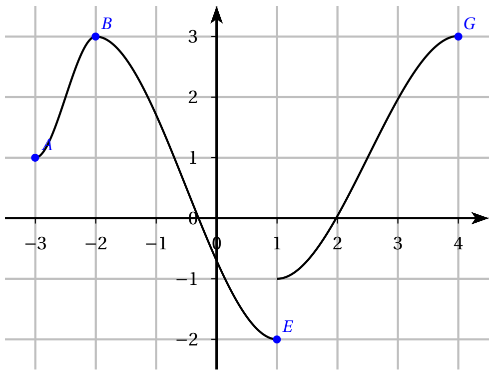
Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.
On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est définie sur l'intervalle I si et seulement si, f est continue en tout point de I.

Remarque 4 (Image mentale de la Continuité).

On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si on peut tracer sa représentation graphique sur l'intervalle I « sans lever le crayon ».



Fonction continue sur $[-3; 4]$



Fonction non continue sur $[-3; 4]$, mais bien définie sur l'intervalle

Propriété 14 (Lien dérivabilité/continuité)**.**

Si une fonction est dérivable sur l'intervalle I alors elle est continue sur I.

Remarque 5.

La réciproque n'est pas vraie. Exemples de la fonction $x \mapsto |x|$, continue sur $\mathbb{R}$, mais non dérivable en 0 ou $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $[0; +\infty[$, mais dérivable sur $]0; +\infty[$.

Propriété 15 (Opérations sur les fonctions continues)**.**

Si deux fonctions f et g sont continues sur un même intervalle I, alors

- La somme $f + g$ est continue sur I.
- Le multiple λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ est continu sur I
- Le produit $f \times g$ est continu sur I.
- si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

5.2 Théorème des valeurs intermédiaires

5.2.1 Conséquence de la continuité

Théorème 2 (Des valeurs intermédiaires (TVI) (admis))**.**

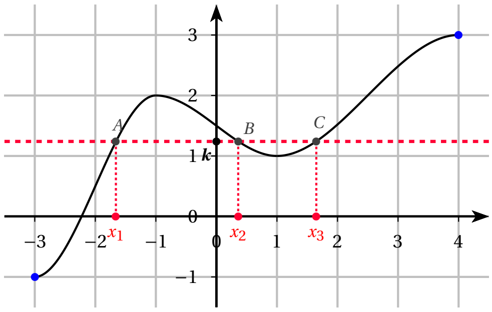
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autre formulation, plus pratique :

Théorème 3 (Des valeurs intermédiaires (admis))**.**

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout nombre $k \in \left[f(a); f(b)\right]$, il existe au moins un antécédent $(x \in [a; b]$ tel que $f(x) = k)$

Attention il peut y avoir plusieurs antécédents :



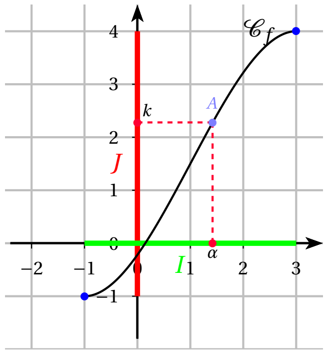
x_1, x_2 et x_3 sont trois antécédents du nombre k.

5.2.2 Conséquence pour une fonction monotone

Le théorème suivant est aussi appelé « Corollaire du théorème des Valeurs Intermédiaires »

Théorème 4 (De la « bijection »).

Si f est continue et monotone de $I =]a; b[$ vers $J = [f(a); f(b)]$ (ou $J = [f(b); f(a)]$ si f est décroissante), alors tout nombre k de l'intervalle image J admet un antécédent unique α dans l'intervalle $[a; b]$.



On dit que f réalise une bijection de I dans J : tout nombre de I admet une seule image (normal), mais tout nombre de J admet **un et un seul** antécédent, et ça c'est nouveau.

▶ Exercice 12 — Application à la résolution d'équation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x - 1$.
Démontrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0; 1]$.
Déterminer une valeur approchée de la solution à 10^{-2} près.

Remarque 6.

On peut étendre le théorème à d'autres intervalles ouverts ou semi-ouverts, du type $]a; b[$ où a ou b sont éventuellement égaux à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Et on utilisera alors les limites des fonctions

■ Exemple 7:
En utilisant la fonction précédente, on peut démontrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 13 — Étude des variations d'une dérivée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$. Pourquoi est-ce difficile d'étudier son signe ?
2. (a) Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur arrondie au centième de α.
   (c) En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.