Corrigé partiel du T. D. B2
Ensembles

9 Soit a, b, c, d quatre complexes avec c non-nul et $ad \neq bc$.

On pose : $\quad f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

a. Donner l'ensemble de définition de f, que l'on note C_1.

b. Démontrer que $f : C_1 \to \mathbb{C}$ est injective.

c. Calculer l'image de C_1 par f, qui l'on note C_2 : $C_2 = f(C_1)$.

d. Justifier que f réalise une bijection de C_1 dans C_2. Calculer sa réciproque.

a. Si $z \in \mathbb{C}$ alors $f(z)$ est défini si et seulement si $cz + d \neq 0$, *i.e.*, $z \neq -\frac{d}{c}$ car $c \neq 0$.
L'ensemble de définition de f est donc : $\quad C_1 = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

b. Soit $(z, z') \in C_1^2$. Par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
f(z) = f(z') \quad & \iff \quad \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az'+c}{cz'+d} \\
& \iff \quad (az+b)(cz'+d) = (az'+b)(cz+d) \\
& \iff \quad adz + bcz' = adz' + bcz \\
& \iff \quad (ad-bc)(z-z') = 0 \\
& \iff \quad z - z' = 0 \qquad \text{car} \quad ad - bc \neq 0
\end{aligned}$$

Ceci montre :

$$\forall (z, z') \in C_1^2 \qquad f(z) = f(z') \implies z = z'.$$

La fonction $f : C_1 \to \mathbb{C}$ est donc injective.

c. Soit u un complexe. On cherche à quelle condition u il admet un antécédent z par f.

$$\begin{aligned}
f(z) = u \quad & \iff \quad \frac{az+b}{cz+d} = u \\
& \iff \quad az + b = czu + du \\
& \iff \quad (a - cu)z = du - b
\end{aligned}$$

Si $u = \frac{a}{c}$ alors l'équation devient $0 = \frac{ad}{c} - b$, donc $\frac{ad-bc}{c} = 0$. Comme $ad - bc \neq 0$ alors elle n'a pas de solution.
Si $u \neq \frac{a}{c}$ alors l'équation donne :

$$z = \frac{du-b}{a-cu}.$$

Vérifions que cet antécédent appartient à C_1 :

$$\frac{du-b}{a-cu} = -\frac{d}{c} \quad \iff \quad cdu - bc = bcu - ad \quad \iff \quad ad - bc = 0$$

Comme $ad - bc \neq 0$ alors $\frac{du-b}{a-cu} \neq -\frac{d}{c}$.
Ceci montre que u admet un et un seul entécédent dans C_1 si $u \neq \frac{a}{c}$, et aucun sinon.
Ainsi l'image de f est $C_2 = \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

d. D'après la question précédente, tout complexe de C_2 admet un et un seul antécédent dans C_1. Ainsi $f : C_1 \to C_2$ est bijective.
De plus sa réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} C_2 & \longrightarrow & C_1 \\ z & \longmapsto & \frac{dz-b}{-cz+a}. \end{array}$$

10 Soit E un ensemble, et A une partie de E. On définit l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$

a. Démontrer que f est surjective.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

a. Soit $B \in \mathcal{P}(A)$. Alors B est une partie de A, qui est une partie de E, donc B est une partie de E : $B \in \mathcal{P}(E)$.
Alors $f(B)$ est définie, et $f(B) = B \cap A = B$ car $B \subseteq A$.
Ainsi tout élément de $\mathcal{P}(A)$ admet un antécédent par f, donc f est surjective.

b. On démontre que f est injective si et seulement si $A = E$.
- Si $A = E$ alors $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(E)$, et pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$: $f(B) = B \cap E = B$.
Donc f est l'identité de $\mathcal{P}(E)$. Elle est bijective, et *a fortiori* injective.
- Réciproquement, supposons que f est injective.
Comme $A \subseteq E$ alors $f(A) = A \cap A = A$, et $f(E) = E \cap A = A$. Ainsi $f(A) = f(E)$, et comme f est injective alors $A = E$.

Par double implication : f est injective si et seulement si $A = E$.

11 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit l'application :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

Démontrer que :

a. f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

b. f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

a. Supposons que f est injective, démontrons que $A \cup B = E$.
Tout d'abord $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$.
De plus $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B)$.
Comme A est inclus dans $A \cup B$ alors $(A \cup B) \cap A = A$, et comme B est inclus dans $A \cup B$ alors $(A \cup B) \cap B = B$, donc $f(A \cup B) = (A, B)$.
Ainsi $f(E) = f(A \cup B)$. Comme f est injective alors $E = A \cup B$.

Supposons maintenant que $A \cup B = E$ et démontrons que f est injective.
Soit X et X' deux parties de E telles que $f(X) = f(X')$.
Ceci donne $X \cap A = X' \cap A$ et $X \cap B = X' \cap B$. On en déduit $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B)$.
Par distributivité et comme $A \cup B = E$:

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$$

De même $(X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'$, et donc $X = X'$.
On a démontré que pour toutes parties X et X' de E, si $f(X) = f(X')$ alors $X = X'$. Ainsi f est injective.
Finalement par double implication nous avons démontré que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

b. Supposons que f est surjective et démontrons que $A \cap B = \varnothing$.
Comme $A \subseteq A$ et $\varnothing \subseteq B$ alors le couple $(A, \varnothing)$ appartient à $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Par sujectivité de f il admet un antécédent par f, *i.e.,* il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \varnothing)$. Ce sous-ensemble vérifie alors $X \cap A = A$ et $X \cap B = \varnothing$.
Comme $X \cap A = A$ alors $A \subseteq X$. On en déduit $A \cap B \subseteq X \cap B = \varnothing$, donc $A \cap B = \varnothing$.
On a démontré que si f est surjective alors $A \cap B = \varnothing$.

Supposons que $A \cap B = \varnothing$ et démontrons que f est surjective.
Soit (C, D) un élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, c'est-à-dire que C est une partie de A et D est une partie de B.
Posons $X = C \cup D$. Alors $X \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A)$. Comme $C \subseteq A$ alors $C \cap A = A$. Comme $D \subseteq B$ alors $D \cap A \subseteq B \cap A = \varnothing$, donc $D \cap A = \varnothing$. Ainsi $X \cap A = C \cup \varnothing = C$.
De même on obtient $X \cap B = D$, et ainsi $f(X) = (C, D)$.
On a démontré que tout élément de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ possède un antécédent par f, *i.e.,* que f est surjective.
Par double implication on a démontré que f est sujective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

12 Soit E un ensemble. Démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de E dans $\mathcal{P}(E)$.
On pourra pour ceci considérer la partie :
$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$$

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une application $f : E \to \mathcal{P}(E)$ surjective.
Posons alors : $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.
Si x est élément de E alors $f(x)$ est une partie de E donc la relation $x \in f(x)$ a un sens. Ainsi A est bien définie, et c'est une partie de E.
Comme f est surjective et $A \in \mathcal{P}(E)$ alors A admet un antécédent par f. Soit x un tel antécédent, *i.e.,* soit x un élément de E tel que $f(x) = A$. Alors x est élément de E : $x \in E$.
Si $x \in f(x)$ alors $x \in A$, ce qui par définition de A montre que $x \notin f(x)$.
Si $x \notin f(x)$ alors $x \in A$ par définition de A donc $x \in f(x)$.
L'équivalence $x \in A \iff x \notin A$ est fausse, donc on aboutit à une contradiction.
Il n'existe donc pas d'application $f : E \to \mathcal{P}(E)$ surjective.

14 On définit sur $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo π par :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$x \equiv y \quad [\pi] \qquad \iff \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = k\pi$$
a. Démontrer que cette relation est une relation d'équivalence.
b. Quelle est la classe d'équivalence d'un réel x_0 ?

a. On démontre que la relation $\equiv$ est réflexive, symétrique et transitive.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x - x = 0\pi$ et $0 \in \mathbb{Z}$ donc $x \equiv x$.
  La relation $\equiv$ est réflexive.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \equiv y$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k\pi$, donc tel que $y - x = -k\pi$. Comme $k \in \mathbb{Z}$ alors $-k \in \mathbb{Z}$ donc $y \equiv x$.
  La relation $\equiv$ est symétrique.
- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \equiv y$ et $y \equiv z$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k\pi$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $y - z = \ell\pi$.
  Par somme $x - z = (x - y) + (y - z) = (k + \ell)\pi$. Comme $k \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ alors $k + \ell \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que $x \equiv z$.
  La relation $\equiv$ est transitive.

La relation $\equiv$ est réflexive, symétrique et transitive donc c'est une relation d'équivalence.

b. Soit x_0 un réel. Alors pour tout réel y :

$$x_0 \equiv y \quad [\pi] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = x_0 + k\pi.$$

La classe d'équivalence de x_0 est donc :

$$\mathrm{Cl}(x_0) = \{\, x_0 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \, .$$

On peut ajouter que chaque classe d'équivalence admet un et un seul représentant dans l'intervalle $[0, \pi[$.

16 On munit $\mathbb{R}^2$ d'une relation que l'on note $\leqslant$ en posant, pour (a, b) et (a', b') dans $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \leqslant (a', b') \qquad \Longleftrightarrow \qquad a < a' \quad \text{ou} \quad (a = a' \text{ et } b \leqslant b')$$

a. Démontrer que cette nouvelle relation est une relation d'ordre. Est-elle totale ?

b. L'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont-ils bornés ? Possèdent-ils un minimum et un maximum ? Et le cercle trigonométrique ?

c. Cette relation d'ordre procure une relation d'ordre à $\mathbb{C}$ en l'identifiant à $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'implication :

$$0 \leqslant a \quad \text{et} \quad b \leqslant c \quad \Longrightarrow \quad ab \leqslant ac$$

est fausse en général.

a. Démontrons que cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

- Pour tout couple (a, b) de réels : $(a, b) \leqslant (a, b)$ car $a = a$ et $b \leqslant b$.
  La relation est réflexive.
- Soit (a, b) et (a', b') deux couples de réels tels que $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a', b') \leqslant (a, b)$.
  Si $a < a'$ alors on n'a ni $a' = a$ ni $a' < a$ donc on ne peut avoir $(a', b') \leqslant (a, b)$. Ainsi $a = a'$.
  Comme $(a, b) \leqslant (a, b')$ et $(a, b') \leqslant (a, b)$ alors $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b$, donc $b = b'$.
  Finalement si $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a', b') \leqslant (a, b)$ alors $a = a'$ et $b = b'$ donc $(a, b) = (a', b')$.
  La relation est antisymétrique.
- Soit (a, b), (a', b') et (a'', b'') trois couples de réels tels que $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a', b') \leqslant (a'', b'')$.
  Si $a < a'$, comme $a' < a''$ ou $a' = a''$ alors $a < a''$ donc $(a, b) \leqslant (a'', b'')$.
  Si $a = a'$ et $a' < a''$ alors $a < a''$ donc $(a, b) \leqslant (a'', b'')$.
  Enfin si $a = a'$ et $a' = a''$ alors $b \leqslant b'$ et $b' \leqslant b''$ donc $a = a''$ et $b \leqslant b''$, puis $(a, b) \leqslant (a'', b'')$.
  On a démontré que si $(a, b) \leqslant (a', b')$ et $(a', b') \leqslant (a'', b'')$ alors $(a, b) \leqslant (a'', b'')$.
  La relation est transitive.

La relation $\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.

Cette relation d'ordre est totale. En effet, si (a, b) et (a', b') sont deux couples de réels alors :

- Si $a < a'$ alors $(a, b) \leqslant (a', b')$.
- Si $a' < a$ alors $(a', b') \leqslant (a, b)$.
- Si $a = a'$ alors $b \leqslant b'$ ou $b' \leqslant b$, donc $(a, b) \leqslant (a', b')$ ou $(a', b') \leqslant (a, b)$.

On a donc dans tous les cas $(a, b) \leqslant (a', b')$ ou $(a', b') \leqslant (a, b)$, donc la relation d'ordre $\leqslant$ est totale.

Ce nouvel ordre est appelé *ordre lexicographique*. C'est l'analogue de l'ordre alphabétique des mots du dictionnaire, qui hérite de l'ordre des lettres de l'alphabet.

b. L'axe des abscisses n'est ni minoré ni majoré. En effet si (a, b) est un couple de réels alors le couple $(a - 1, 0)$ lui est inférieur et le couple $(a + 1, 0)$ lui est supérieur, et ces deux couples appartiennent à l'axe des abscisses.

Aucun couple (a, b) ne peut donc minorer ni majorer l'axe des abscisses, ce qui montre que celui-ci n'est ni minoré ni majoré.

L'axe des ordonnées est borné. En effet il contient les couples de la forme $(0, b)$, et :

$$\forall b \in \mathbb{R} \qquad (-1, 0) \leqslant (0, b) \leqslant (1, 0)$$

Ceci montre que $(-1, 0)$ est un minorant de l'axe des ordonnées et $(1, 0)$ en est un majorant.
Par contre l'axe des ordonnées ne possède pas de plus grand minorant ni de plus petit majorant.
Démontrons par exemple qu'il ne possède pas de plus petit majorant. Supposons que $m = (a, b)$ est un majorant de l'axe des ordonnées. Alors :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad (0, y) \leqslant (a, b)$$

En particulier $(0, b + 1) \leqslant (a, b)$, ce qui impose $0 < a$. Alors le couple $\left(\frac{a}{2}, b\right)$ vérifie :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad (0, y) \leqslant \left(\tfrac{a}{2}, b\right) < (a, b) = m$$

Ce couple et un majorant de l'axe des ordonnées, strictement plus petit que m. Ceci prouve que l'axe des ordonnées ne possède pas de plus petit majorant.
On démontre de même qu'il ne possède pas de plus grand minorant.

Le cercle trigonométrique est borné, et il possède un plus grand minorant et un plus petit majorant.
En effet un couple (a, b) appartient au cercle trigonométrique si et seulement si $a^2 + b^2 = 1$. Ceci impose $-1 \leqslant a \leqslant 1$, avec $a = \pm 1$ si et seulement si $b = 0$. Donc $(-1, 0) \leqslant (a, b) \leqslant (1, 0)$.
Or les couples $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ appartiennent au cercle trigonométrique. Ils sont donc respectivement le plus grand minorant et le plus petit majorant du cercle trigonométrique.

c. Comme i est identifé au couple $(0, 1)$ et $(0, 0) \leqslant (0, 1)$ alors $0 \leqslant i$. L'implication :

$$0 \leqslant a \quad \text{et} \quad b \leqslant c \qquad \Longrightarrow \qquad ab \leqslant ac$$

devrait donner : Comme $0 \leqslant i$ et $0 \leqslant i$ alors $0 \leqslant i^2$. Mais ceci est faux car $-1 < 0$, puisque $(-1, 0) < (0, 0)$.

L'ordre lexicographique procure donc une relation d'ordre à l'ensemble $\mathbb{C}$ mais cet ordre n'est pas compatible avec la multiplication.