

**Corrigé partiel du T. D. B2**  
**Ensembles**

**10** Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ . On définit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\longmapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

Démontrer que :

- a.  $f$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ .
- b.  $f$  est surjective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

- a. Supposons que  $f$  est injective, démontrons que  $A \cup B = E$ .

Tout d'abord  $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$ .

De plus  $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B)$ .

Comme  $A$  est inclus dans  $A \cup B$  alors  $(A \cup B) \cap A = A$ , et comme  $B$  est inclus dans  $A \cup B$  alors  $(A \cup B) \cap B = B$ , donc  $f(A \cup B) = (A, B)$ .

Ainsi  $f(E) = f(A \cup B)$ . Comme  $f$  est injective alors  $E = A \cup B$ .

Supposons maintenant que  $A \cup B = E$  et démontrons que  $f$  est injective.

Soit  $X$  et  $X'$  deux parties de  $E$  telles que  $f(X) = f(X')$ .

Ceci donne  $X \cap A = X' \cap A$  et  $X \cap B = X' \cap B$ . On en déduit  $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X' \cap A) \cup (X' \cap B)$ .

Par distributivité et comme  $A \cup B = E$  :

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$$

De même  $(X' \cap A) \cup (X' \cap B) = X'$ , et donc  $X = X'$ .

On a démontré que pour toutes parties  $X$  et  $X'$  de  $E$ , si  $f(X) = f(X')$  alors  $X = X'$ . Ainsi  $f$  est injective.

Finalement par double implication nous avons démontré que  $f$  est injective si et seulement si  $A \cup B = E$ .

- b. Supposons que  $f$  est surjective et démontrons que  $A \cap B = \emptyset$ .

Comme  $A \subseteq A$  et  $\emptyset \subseteq B$  alors le couple  $(A, \emptyset)$  appartient à  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ . Par surjectivité de  $f$  il admet un antécédent par  $f$ , *i.e.*, il existe  $X \in \mathcal{P}(E)$  tel que  $f(X) = (A, \emptyset)$ . Ce sous-ensemble vérifie alors  $X \cap A = A$  et  $X \cap B = \emptyset$ .

Comme  $X \cap A = A$  alors  $A \subseteq X$ . On en déduit  $A \cap B \subseteq X \cap B = \emptyset$ , donc  $A \cap B = \emptyset$ .

On a démontré que si  $f$  est surjective alors  $A \cap B = \emptyset$ .

Supposons que  $A \cap B = \emptyset$  et démontrons que  $f$  est surjective.

Soit  $(C, D)$  un élément de  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ , c'est-à-dire que  $C$  est une partie de  $A$  et  $D$  est une partie de  $B$ .

Posons  $X = C \cup D$ . Alors  $X \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A)$ . Comme  $C \subseteq A$  alors  $C \cap A = C$ . Comme  $D \subseteq B$  alors  $D \cap A \subseteq B \cap A = \emptyset$ , donc  $D \cap A = \emptyset$ . Ainsi  $X \cap A = C \cup \emptyset = C$ .

De même on obtient  $X \cap B = D$ , et ainsi  $f(X) = (C, D)$ .

On a démontré que tout élément de  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  possède un antécédent par  $f$ , *i.e.*, que  $f$  est surjective.

Par double implication on a démontré que  $f$  est surjective si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$ .

**15** On munit  $\mathbb{R}^2$  d'une relation que l'on note  $\leq$  en posant, pour  $(a, b)$  et  $(a', b')$  dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leq b')$$

- a. Démontrer que cette nouvelle relation est une relation d'ordre. Est-elle totale ?  
 b. L'axe des abscisses et l'axe des ordonnées sont-ils bornés ? Possèdent-ils un minimum et un maximum ? Et le cercle trigonométrique ?  
 c. Cette relation d'ordre procure une relation d'ordre à  $\mathbb{C}$  en l'identifiant à  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que l'implication :

$$0 \leq a \text{ et } b \leq c \implies ab \leq ac$$

est fautive en général.

a. Démontrons que cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

- Pour tout couple  $(a, b)$  de réels :  $(a, b) \leq (a, b)$  car  $a = a$  et  $b \leq b$ .

La relation est réflexive.

- Soit  $(a, b)$  et  $(a', b')$  deux couples de réels tels que  $(a, b) \leq (a', b')$  et  $(a', b') \leq (a, b)$ .

Si  $a < a'$  alors on n'a ni  $a' = a$  ni  $a' < a$  donc on ne peut avoir  $(a', b') \leq (a, b)$ . Ainsi  $a = a'$ .

Comme  $(a, b) \leq (a', b')$  et  $(a', b') \leq (a, b)$  alors  $b \leq b'$  et  $b' \leq b$ , donc  $b = b'$ .

Finalement si  $(a, b) \leq (a', b')$  et  $(a', b') \leq (a, b)$  alors  $a = a'$  et  $b = b'$  donc  $(a, b) = (a', b')$ .

La relation est antisymétrique.

- Soit  $(a, b)$ ,  $(a', b')$  et  $(a'', b'')$  trois couples de réels tels que  $(a, b) \leq (a', b')$  et  $(a', b') \leq (a'', b'')$ .

Si  $a < a'$ , comme  $a' < a''$  ou  $a' = a''$  alors  $a < a''$  donc  $(a, b) \leq (a'', b'')$ .

Si  $a = a'$  et  $a' < a''$  alors  $a < a''$  donc  $(a, b) \leq (a'', b'')$ .

Enfin si  $a = a'$  et  $a' = a''$  alors  $b \leq b'$  et  $b' \leq b''$  donc  $a = a''$  et  $b \leq b''$ , puis  $(a, b) \leq (a'', b'')$ .

On a démontré que si  $(a, b) \leq (a', b')$  et  $(a', b') \leq (a'', b'')$  alors  $(a, b) \leq (a'', b'')$ .

La relation est transitive.

La relation  $\leq$  est réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.

Cette relation d'ordre est totale. En effet, si  $(a, b)$  et  $(a', b')$  sont deux couples de réels alors :

- Si  $a < a'$  alors  $(a, b) \leq (a', b')$ .
- Si  $a' < a$  alors  $(a', b') \leq (a, b)$ .
- Si  $a = a'$  alors  $b \leq b'$  ou  $b' \leq b$ , donc  $(a, b) \leq (a', b')$  ou  $(a', b') \leq (a, b)$ .

On a donc dans tous les cas  $(a, b) \leq (a', b')$  ou  $(a', b') \leq (a, b)$ , donc la relation d'ordre  $\leq$  est totale.

Ce nouvel ordre est appelé *ordre lexicographique*. C'est l'analogue de l'ordre alphabétique des mots du dictionnaire, qui hérite de l'ordre des lettres de l'alphabet.

- b. L'axe des abscisses n'est ni minoré ni majoré. En effet si  $(a, b)$  est un couple de réels alors le couple  $(a - 1, 0)$  lui est inférieur et le couple  $(a + 1, 0)$  lui est supérieur, et ces deux couples appartiennent à l'axe des abscisses.

Aucun couple  $(a, b)$  ne peut donc minorer ni majorer l'axe des abscisses, ce qui montre que celui-ci n'est ni minoré ni majoré.

L'axe des ordonnées est borné. En effet il contient les couples de la forme  $(0, b)$ , et :

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad (-1, 0) \leq (0, b) \leq (1, 0)$$

Ceci montre que  $(-1, 0)$  est un minorant de l'axe des ordonnées et  $(1, 0)$  en est un majorant.

Par contre l'axe des ordonnées ne possède pas de plus grand minorant ni de plus petit majorant.

Démontrons par exemple qu'il ne possède pas de plus petit majorant. Supposons que  $m = (a, b)$  est un majorant de l'axe des ordonnées. Alors :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (0, y) \leq (a, b)$$

En particulier  $(0, b + 1) \leq (a, b)$ , ce qui impose  $0 < a$ . Alors le couple  $(\frac{a}{2}, b)$  vérifie :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (0, y) \leq (\frac{a}{2}, b) < (a, b) = m$$

Ce couple et un majorant de l'axe des ordonnées, strictement plus petit que  $m$ . Ceci prouve que l'axe des ordonnées ne possède pas de plus petit majorant.

On démontre de même qu'il ne possède pas de plus grand minorant.

Le cercle trigonométrique est borné, et il possède un plus grand minorant et un plus petit majorant.

En effet un couple  $(a, b)$  appartient au cercle trigonométrique si et seulement si  $a^2 + b^2 = 1$ . Ceci impose  $-1 \leq a \leq 1$ , avec  $a = \pm 1$  si et seulement si  $b = 0$ . Donc  $(-1, 0) \leq (a, b) \leq (1, 0)$ .

Or les couples  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$  appartiennent au cercle trigonométrique. Ils sont donc respectivement le plus grand minorant et le plus petit majorant du cercle trigonométrique.

c. Comme  $i$  est identifié au couple  $(0, 1)$  et  $(0, 0) \leq (0, 1)$  alors  $0 \leq i$ . L'implication :

$$0 \leq a \quad \text{et} \quad b \leq c \quad \implies \quad ab \leq ac$$

devrait donner : Comme  $0 \leq i$  et  $0 \leq i$  alors  $0 \leq i^2$ . Mais ceci est faux car  $-1 < 0$ , puisque  $(-1, 0) < (0, 0)$ .

L'ordre lexicographique procure donc une relation d'ordre à l'ensemble  $\mathbb{C}$  mais cet ordre n'est pas compatible avec la multiplication.