Feuille de TD n°4
Généralités sur les fonctions

1 Vocabulaire et notions générales

$\boxed{1}$ **parité**

Donner la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. $g(x) = x\cos(x)$
3. $h(x) = \dfrac{x}{\sin x}$
4. $i(x) = x^3 - 4x$
5. $j(x) = x^3 - 4x + 1$
6. $k(x) = 2x^2 + 3x + 1$
7. $\ell(x) = x^2 + \cos(x) - 4|x| + 1$
8. $m(x) = \sin(x) \times \cos(x)$

$\boxed{2}$ Donner un exemple de fonction qui n'est ni paire, ni impaire. *Justifier la réponse en prouvant que la fonction proposée n'est bien ni l'un ni l'autre.*

$\boxed{3}$ **Périodicité :**

1. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \sin(x)\cos(x)$ est $\pi-$périodique
2. Montrer que la fonction $g\colon x \mapsto \cos\left(5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ est $\dfrac{2\pi}{5}-$périodique
3. Donner une période de $h\colon t \mapsto \sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$. Justifier.

$\boxed{4}$ **Variations :**

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$
2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

$\boxed{5}$ **Composition :**

Soient $f\colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1-x^2 \end{array}$, $g\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$ et $h\colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$

Donner les ensembles de définition et les expressions des images des fonctions suivantes :

$$f \circ g \qquad g \circ f \qquad f \circ h \qquad h \circ f$$

$\boxed{6}$ Soient $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ deux fonctions. Montrer que si f est $T-$périodique, alors $g \circ f$ est aussi $T-$périodique.

$\boxed{7}$ Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que :e

1. Si g est croissante sur un intervalle I, alors $f \circ g$ est croissante sur I.
2. Si g est décroissante sur un intervalle I, alors $f \circ g$ est décroissante sur I.

2 Limites de fonctions

$\boxed{8}$ Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 5-2x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3+x+1$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)(3-4x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1)(3-4x)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+\dfrac{3}{2x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+\dfrac{3}{2x^2}$

$\boxed{9}$ Calculer les limites suivantes en soignant les rédactions de levée des formes indéterminées lorsqu'il y en a.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x-1$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x-1$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+2$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x-1}{6-x}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}$

3 Fonctions de référence

$\boxed{10}$ **Équations :**

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-12} = 2x-6$
2. $\sqrt{4-x} = x-2$
3. $\sqrt{x^2+1} = 3x+1$
4. $|5x-2| = 3$
5. $|3x-4| = |5-2x|$

$\boxed{11}$ On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-4|+|x+6|$

1. Écrire $|x-4|$ et $|x+6|$ sans valeur absolue suivant les valeurs de x.
2. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue. *On pourra utiliser un tableau*
3. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère.

$\boxed{12}$ Tracé des représentations graphiques des fonctions $f\colon x \mapsto |2x-1|+|x+3|$ et $g\colon x \mapsto |2x-1|+2|x+3|$

4 Dérivation

$\boxed{13}$ Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminé leurs ensembles de définition et de dérivabilité.

1. $f_1(x) = \left(x^2+5\right)^3$
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\left(x^2+5\right)^3}$
3. $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2+3}}$
4. $f_4(x) = \left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^2$
5. $f_5(x) = 3x^4-5x^2+2x-4$
6. $f_6(x) = x^2+\sqrt{x}+2$
7. $f_7(x) = 2x^2-3+\dfrac{2}{x}$
8. $f_8(x) = \dfrac{x-4}{3-2x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{x}\left(3+\sqrt{x}\right)$
10. $f_{10}(x) = (3x-1)^{20}$
11. $f_{11}(x) = \left(3x^2-5x+1\right)^5$
12. $f_{12}(x) = \sqrt{2x+6}$
13. $f_{13}(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$
14. $f_{14}(x) = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$

5 Continuité et TVI

$\boxed{14}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4+4x+1$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ces deux solutions.

$\boxed{15}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4+2x^3+3x+1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. (a) Étudier les variations de f'.
   (b) Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le tableau de signes de f'
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{16}$ **Avec une fonction auxiliaire**

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3-3x-3$$

   (a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   (b) Calculer $g(3)$
   (c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   (d) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
   (e) Établir le tableau de signes de g.
2. f est la focntion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$
   (a) D2montrer que pour tout $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$: $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$.
   (b) Dresser le tableau de varations de f
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$

Feuille de TD n°4
Réponses ou Solutions

1 Vocabulaire et notions générales

$\boxed{1}$ On calcule $f(-x)$ et on avise.

1. paire
2. impaire
3. paire
4. impaire
5. ni l'un ni l'autre
6. ni l'un ni l'autre
7. paire
8. impaire

Une somme de fonctions paires est paire, une somme d'impaires est impaire, un produit d'impair/pair est impair, produit de paires est paire, produit de deux impaires est impaire.

$\boxed{3}$ Calculer $f(x+T)$, où T est la période. La fonction h est $\dfrac{2\pi}{\omega}$−périodique. ω s'appelle la pulsation en physique et s'exprime en rad/s.

$\boxed{4}$ Pour $a<b$ dans les intervalles désignés.

1. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$ puis étude de signe
2. $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ puis étude de signe

$\boxed{5}$

- $f\circ g(x)=1-x$ définie sur $[0;+\infty[$ (attention)
- $g\circ f(x)=\sqrt{1-x^2}$ définie sur $[-1;1]$
- $f\circ h(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
- $h\circ f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

$\boxed{6}$ $g\circ f(x+T)=g\circ f(x)$ par périodicité de f.

$\boxed{7}$ Soient $a<b$ deux réels dans l'intervalle I.

1. $g(a)<g(b)$ car g est croissante sur I donc $f(g(a))<f(g(b))$ comme f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. comme le précédent, première inégalité inversée.

2 Limites de fonctions

$\boxed{8}$

1. $-\infty$
2. $-\infty$
3. $+\infty$
4. $-\infty$
5. $+\infty$
6. $-\infty$

$\boxed{9}$

1. $+\infty$
2. F.I. du type $+\infty-\infty$.
   On a $x^2+x-1=x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=1$
   donc par produit de limites, on obtient $\underline{\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+x-1=+\infty}$.

3. F.I. du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   On a $\dfrac{x-4}{x^2+1} = \dfrac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$

   Ainsi, par produit de limites, $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{x^2+1} = 0}$.

4. F.I. du type $+\infty-\infty$.
   On lève l'indétermination par factorisation. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+2 = +\infty$

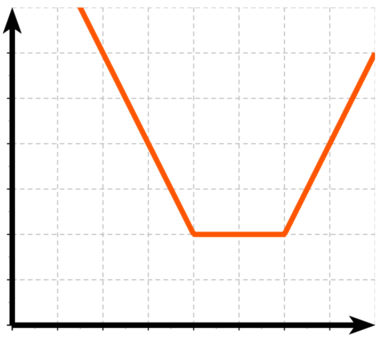
5. Même rédaction et méthode que le 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$

6. Même rédaction et méthode que le 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x-1}{6-x} = 3$

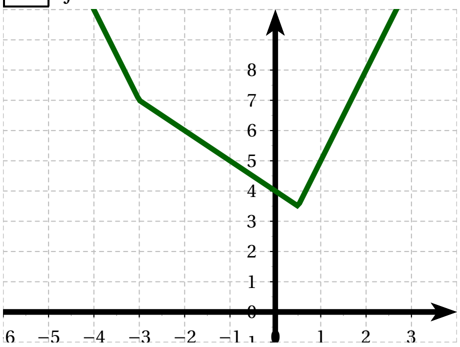
7. F.I. du type $+\infty-\infty$.
   $x-\sqrt{x} = x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} = +\infty$.

3 Fonctions de référence

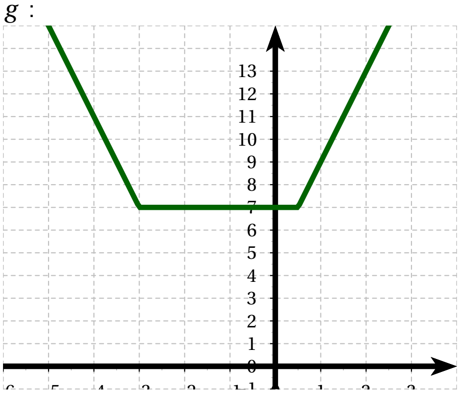
11



12 f :



g :



4 Dérivation

13

1. $f_1(x) = 6x\left(x^2+5\right)^2$

2. $f_2(x) = \dfrac{-6x}{\left(x^2+5\right)^4}$
3. $f_3(x) = \dfrac{-x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$
4. $f_4(x) = -\dfrac{12(3-x)}{(x+3)^3}$
5. $f_5'(x) = 12x^3 - 10x + 2$ sur $\mathbb{R}$
6. $f_6'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ déf sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
7. $f_7'(x) = 4x - \dfrac{2}{x^2}$ déf et dér sur $\mathbb{R}^*$.
8. $f_8'(x) = \dfrac{11}{(3-2x)^2}$ déf et dér sur $\left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$
9. $f_9'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3+\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{-\sqrt{x}-6}{2x^2}$ déf et dér sur $]0; +\infty[$.
10. $f_{10}'(x) = 20 \times 3 \times (3x-1)^{19}$. def et dér sur $\mathbb{R}$
11. $f_{11}'(x) = 5(6x-5)\left(3x^2-5x+1\right)^4$
12. $f_{12}'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$ déf sur $[-3; +\infty[$, dér sur $]-3; +\infty[$
13. $f_{13}'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$ déf sur $]0; 1]$, et dérivable sur $]0; 1[$.
14. $f_{14}'(x) = \dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}$ déf et dérivable sur $\mathbb{R}$ (il y a un peu de boulot pour prouver que $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$).

5 Continuité et TVI

$\boxed{14}$ $f'(x) = 4(x^3+1)$, $f'(x) \leqslant \iff x \leqslant -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha \in]-1{,}5; -1{,}49[$ et $\beta \in]-0{,}26; -0{,}25[$.

$\boxed{15}$

1. $f'(x) = -4x^3 + 6x^2 + 3$
2. (a) On calcule $f''(x) = -12x^2 + 12x = -12x(x-1)$ d'où le signe positif de f'' sur $[0; 1]$ et donc la croissance de f' sur $[0; 1]$.
   (b) $f'(1) = 5$ et $f'(2) = -5$ + TVI monotonie, il existe un unique α sur $\mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
3. f croissante sur $]-\infty; \alpha]$.

$\boxed{16}$

1. $g'(x) = 3(x^2-1)$ et $\alpha \in]2,103; 2,014[$, $g(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha; +\infty[$.
2.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$2x$			$-$		0			$+$			
$g(x)$						$-$			0	$+$	
$\left(x^2-1\right)^2$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	