# Feuille de TD n°5
# Géométrie plane

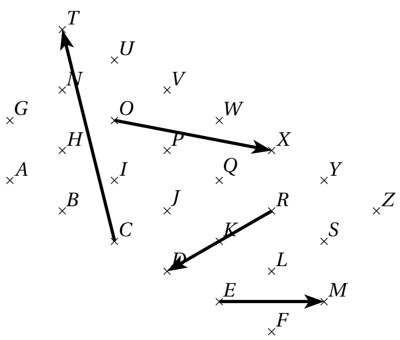
## 1 Condition de colinéarité de deux vecteurs

$\boxed{1}$ Des bases

1. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs sont colinéaires.
   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}7,5\\-1\end{pmatrix}$
   (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$
2. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$. Préciser si les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés ou pas :
   (a) $A(3;4)$, $B(0;2)$ et $C(-2;1)$.
   (b) $A\left(\frac{5}{4};3\right)$, $B\left(\frac{1}{2};4\right)$ et $C\left(\frac{1}{4};\frac{13}{3}\right)$.
3. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$. Déterminer les valeurs possibles du réel $x$ de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2x+1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}$
   (b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6-2x\\x-1\end{pmatrix}$
   (c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{x}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-2x\\-1\end{pmatrix}$

## 2 Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

$\boxed{2}$




Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{CT}$, $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{RD}$ et $\overrightarrow{EM}$ dans les bases suivantes :

**a.** $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH})$ | **b.** $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG})$ | **c.** $(\overrightarrow{HO};\overrightarrow{HN})$

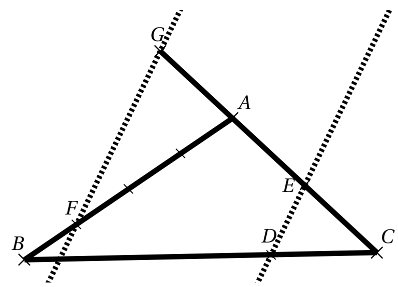
$\boxed{3}$ On considère un triangle $ABC$ non aplati. Dans chacun des cas suivants, exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis indiquer s'ils sont colinéaires.

1. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$
2. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\left(5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}BC$

### 2.1 Coordonnées d'un vecteur et d'un point

$\boxed{4}$ Dans un triangle $ABC$ non aplati, on considère les points $D$, $E$, $F$ et $G$ définis respectivement par :

1. $3\overrightarrow{DB}+7\overrightarrow{DC}=\vec{0}$
2. $E$ est le milieu de $[AC]$
3. $3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$
4. $G$ est le symétrique de $E$ par rapport à $A$.

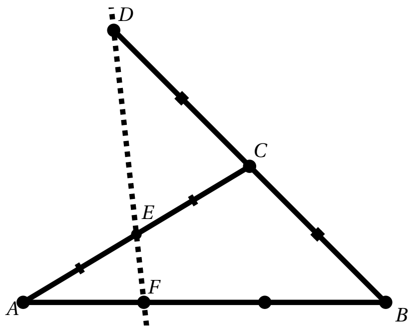



On souhaite démontrer que les droites $(ED)$ et $(FG)$ sont parallèles.

1. **En utilisant l'outil vectoriel**
   (a) Justifier que $\overrightarrow{CD}=\frac{3}{10}\overrightarrow{CB}$ puis que $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
   (b) Exprimer, en utilisant la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{FG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Montrer , de la même façon, que $\overrightarrow{ED}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$
   (d) Conclure.
2. **En utilisant un repère**
   (a) Déterminer les coordonnées des points $A$, $B$, $C$, $E$ et $G$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
   (b) En exploitant les données de l'énoncé, calculer les coordonnées des points $D$ et $F$.
   (c) Conclure.

$\boxed{5}$ **Recherche et exploitation d'un repère**

Dans un triangle non aplati $ABC$, on concisère le point $D$ symétrique de $B$ par rapport à $C$, $E$ le milieu du segment $[AC]$ et $F$ est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.




En considérant un repère, démontrer que les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés.

# 3 Vecteur directeur et équation de droite

## 3.1 Vecteur directeur d'une droite

$\boxed{6}$ Soit $d$ la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite $d$. Tracer la droite dans un repère.
2. Le point $B(7;5)$ appartient-il à la droite $d$ ? Justifier.

## 3.2 Équation de droite

$\boxed{7}$ Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,

1. On considère la droite $d$ d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels non nuls. Déterminer les intersections de la droite avec les axes $(Ox)$ et $(Oy)$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(4;0)$ et $B(0;3)$.

$\boxed{8}$ **Médiatrices et concours**

**Rappel :** *La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les points $A(1;6)$, $B(-3;2)$ et $C(6;1)$.

1. **Équation de la médiatrice $d_1$ du segment $[AB]$**
   (a) Exprimer $MA^2$ et $MB^2$ en fonction de $x$ et $y$.
   (b) En déduire qu'une équation de la médiatrice de $[AB]$ est $x + y - 3 = 0$
2. **Concours des médiatrices**
   (a) Déterminer de la même façon les équations des deux autres médiatrices .
   (b) Montrer que les trois droites sont concourantes (sécantes au même point d'intersection).
   (c) Comment s'appelle le point de concours des trois médiatrices ?

## 3.3 Déterminer une équation de droite

$\boxed{9}$ Application : Concours des médianes d'un triangle

Soit $ABC$ un triangle, $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA]. On se place dans le repère $\mathscr{R} = \left(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $\mathscr{R}$.
2. Déterminer les équations des médianes du triangle issues des sommets $A$ et $C$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection $G$ des deux médianes
4. Prouver que le point $G$ appartient à la médiane issue de $B$.

$\boxed{10}$ **Avec un paramètre**

Soit $m$ un réel. On considère la famille de droites $\mathscr{D}_m$ d'équation :

$$x + (m-1)y - m = 0.$$

1. Tracer dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_{-1}$.
2. Démontrer que pour tout réel $m$, la droite $\mathscr{D}_m$ passe par un point $A$ dont on donnera les coordonnées.
3. (a) Peut-on trouver $m$ tel que la droite $\mathscr{D}_m$ passe par le point $B(3\ ;\ 0)$ ?
   (b) Peut-on trouver $m$ tel que la droite $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
   (c) Peut-on trouver $m$ tel que la droite $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses ?

# 4 Définitions du produit scalaire

## 4.1 Défaut d'orthogonalité

## 4.2 Expression analytique dans un repère orthonormal

$\boxed{11}$ **Démontrer qu'un triangle est rectangle**

Démontrer que le triangle $ABC$ est rectangle, avec $A(-1;-1)$, $B(-2;1)$ et $C(3;1)$.

### 4.3 Définition avec les projections

**12** **Dans un carré**
Soit $ABCD$ un carré de côté $a$. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$

### 4.4 Définition avec le cosinus

**13** **Inégalité de Cauchy-Schwarz ****
Démontrer que quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

**14** **Application :**
Démontrer que pour tous $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ réels, on a :

$$\sum_{i=1}^{2} u_i v_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{2} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2} v_i^2\right)$$

## 5 Applications du produit scalaire

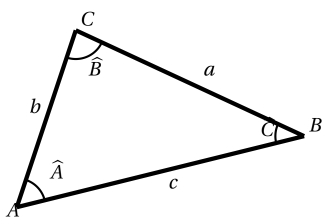
### 5.1 Calcul d'angle dans un repère

**15** **Calcul d'angle dans un repère**
Dans un repère orthonormé, on donne : $A(-2;-1)$, $B(-3;2)$ et $C(5;4)$. Déterminer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{BAC}$.

### 5.2 Résolution de triangles

**16** **Loi des sinus**

1. On se donne un triangle ABC :



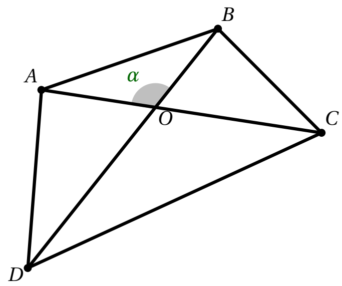

   Démontrer que l'aire du triangle $ABC$ est égale à $S = \dfrac{1}{2}cb\sin\left(\widehat{A}\right)$

2. En déduire la « Loi des sinus » :

$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$

**17** **Application**
On donne $ABC$ tel que $AB = 5\,\text{cm}$, $\widehat{A} = 30^\circ$ et $\widehat{B} = 50^\circ$.
Faire un dessin.
Calculer $BC$ et $AC$.

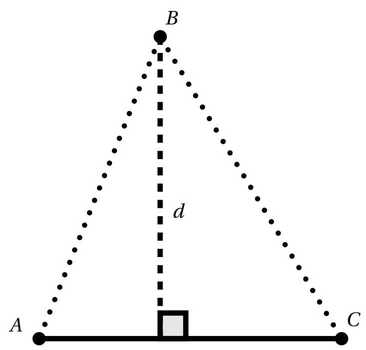
**18** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en $O$, et soit $\alpha$ la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$




Démontrer que l'aire de ce quadrilatère est égale à

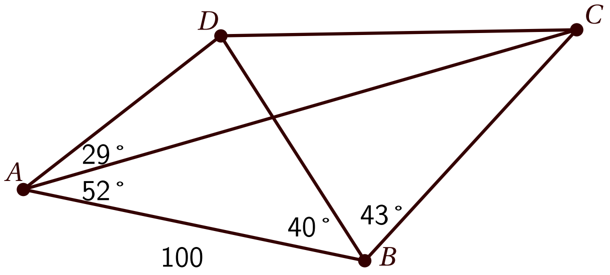
$$\mathscr{S} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\alpha$$

**19** **Triangulation**




Un observateur situé en $A$ cherche à mesurer la distance qui sépare un bateau situé au large (dont l'emplacement est figuré par le point $B$), du bord du large. La droite (AC) représente le front de mer. Il ne lui est pas possible de mesurer directement cette distance $d$ représentée en trait discontinu sur la figure.
Un assistant se place en $C$ de telle manière que la distance $AC$ soit égale à 200 m. L'observateur en $A$ fait une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ et trouve 73°, son assistant trouve un angle $\widehat{ACB}$ de 69°.
Grâce à ces données, déterminer la distance $AB$, puis la distance $d$ cherchée.

**20** **Triangulation (bis)**




Un observateur (placé en $A$) cherche à mesurer la distance entre deux arbres situés en $C$ et $D$. Les arbres sont situés de l'autre côté d'une rivière infranchissable (genre avec des crocodiles, ou des lapins dégoûtants, ou des chats...).
Son assistant se place au point $B$, situé à $100\,\mathrm{m}$ de $A$. L'observateur et son assistant mesurent les angles : $\widehat{BAC} = 52\,°$, $\widehat{DAC} = 29\,°$, $\widehat{ABD} = 40\,°$ et $\widehat{DBC} = 43\,°$.
Grâce à ces données, déterminer la distance $CD$.

### 5.3 Théorème de la médiane

**21** On considère un segment $[AB]$ de longueur 4. Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$ ?

**22** $ABCD$ est un rectangle de centre $O$. Un point $M$ est placé à l'intérieur du rectangle tel que $MA = 30\,\mathrm{cm}$, $MB = 18\,\mathrm{cm}$ et $MC = 6\,\mathrm{cm}$.

1. Faire une figure à main levée.
2. Démontrer que $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.
3. En déduire la longueur $MD$.

## 6 Équation de cercle

**23** Donner l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3;4)$ et de rayon 5. Donner l'expression développée et réduite.

**24** Discuter des ensembles de points suivants :

- Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$
- Soit l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + y + 1 = 0$.

**25** On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

1. Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}$.
2. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe-t-il les axes de coordonnées ? Si oui, préciser en quels points.

**26** On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$ et la droite $(d)$ d'équation cartésienne $x - 2y + 3 = 0$.
Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $(d)$.

**27** On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(3;1)$, passant par l'origine du repère, et la droite $(d)$ d'équation $x + y - 2 = 0$.
Déterminer les éventuels points d'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $(d)$.

# Feuille de TD n°5
# Réponses ou Solutions

## 1 Condition de colinéarité de deux vecteurs

$\boxed{1}$

1. **a.** oui **b.** non **c.** oui
2. **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})=-1\neq 0$, donc $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

   **b.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3/4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4/3\end{pmatrix}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$, donc $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
3. **a.** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix}2x+1 & x\\ 3 & -1\end{vmatrix}=0 \iff -2x-1-3x=0 \iff x=-\frac{1}{5}$.

   **b.** $\begin{vmatrix}4 & 6-2x\\ x & x-1\end{vmatrix}=0 \iff 4x-4-6x+2x^2=0$ $\Delta=36>0$, donc deux solutions : $\begin{cases}x_1 &= 2\\ x_2 &= -1\end{cases}$.

   **c.** $\begin{vmatrix}1/x & 1-2x\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0 \iff -\frac{1}{x}-1+2x=0$ et si $x\neq 0$, $\iff -1-x+2x^2$ $\Delta=9$, donc deux solutions : $\begin{cases}x_1 &= 1\\ x_2 &= -1/2\end{cases}$

## 2 Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

$\boxed{2}$

**a.** Base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH})$ :
- $\overrightarrow{CT}=-4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{OX}=2\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{RD}=0\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{EM}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AH}$

**b.** Base $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG})$ :
- $\overrightarrow{CT}=-1/2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{OX}=3/2\overrightarrow{AC}+1\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{RD}=-1\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{EM}=1\overrightarrow{AC}+1\overrightarrow{AG}$

**c.** Base $(\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HN})$ :
- $\overrightarrow{CT}=-1\overrightarrow{HO}+4\overrightarrow{HN}$
- $\overrightarrow{OX}=3\overrightarrow{HO}-2\overrightarrow{HN}$
- $\overrightarrow{RD}=-2\overrightarrow{HO}+0\overrightarrow{HN}$
- $\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{HO}-1\overrightarrow{HN}$

$\boxed{3}$

1. $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}=1\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}$. On a $\vec{v}=3\vec{u}$ et donc les vecteurs sont colinéaires.

### 2.1 Coordonnées d'un vecteur et d'un point

$\boxed{4}$ Préliminaire : placement des points.

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{DB}+7\overrightarrow{DC} &= \vec{0}\\ 3\overrightarrow{DB}+7\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\right) &= \vec{0}\\ 10\overrightarrow{DB}+7\overrightarrow{BC} &= \vec{0}\\ \overrightarrow{BD} &= \frac{7}{10}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA} &= \vec{0}\\ 3\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA} &= \vec{0}\\ 4\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA} &= \vec{0}\\ \overrightarrow{BF} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

**Partie I** Résolution vectorielle

1.

$\underline{\overrightarrow{CD}:}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB}-\frac{7}{10}\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{CD} &= \frac{3}{10}\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

$\underline{\overrightarrow{AF}:}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\\ \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AF} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

2. Expression des vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   Cela est possible car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (sinon les points $A$, $B$ et $C$ seraient alignés et le triangle $ABC$ aplati).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AG}\\ \overrightarrow{FG} &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{ED} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{10}\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{ED} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{10}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\\ \overrightarrow{ED} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{5}\right) &= \frac{1}{5}\\ -\frac{3}{4}\times\left(-\frac{2}{5}\right) &= \frac{3}{10}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \overrightarrow{ED}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{FG}$$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et par conséquent, <u>les droites $(ED)$ et $(FG)$ sont parallèles</u>.

**Partie II** **Résolution en utilisant un repère**

Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, on a rapidement :

$$A(0;0)\quad B(1;0)\quad C(0;1)\quad E\left(0;\frac{1}{2}\right)\quad G\left(0;-\frac{1}{2}\right)$$

Pour le point $F$, on a prouvé plus haut que $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, ainsi, $\underline{F\left(\frac{3}{4};0\right)}$.

Pour le point $D$, il faut bricoler un peu :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{10}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{7}{10}\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\underline{D\left(\frac{3}{10};\frac{7}{10}\right)}$.

Dans ce repère, $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}\frac{3}{10}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, on calcule ainsi le déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{GF}\right)=\begin{vmatrix}\frac{3}{10} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{3}{20}-\frac{3}{20}=0$$

Donc $\overrightarrow{ED}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GF}$ et donc <u>les droites $(ED)$ et $(GF)$ sont parallèles.</u>

$\boxed{5}$ Dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, les coordonnées des points de la figure sont les suivants :

$$A(0;0)\qquad B(1;0)\qquad C(0;1)\qquad E\left(0;\frac{1}{2}\right)\qquad F\left(\frac{1}{3};0\right)\qquad D(-1;2)$$

Pour les coordonnées de $D$, on exprime $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{-1}\overrightarrow{AB}+\mathbf{2}\overrightarrow{AC}$$

On a donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-3/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}4/3\\-2\end{pmatrix}$. On a

$$\begin{vmatrix}1 & 4/3\\ -3/2 & -2\end{vmatrix}=-2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=0$$

Donc les points $D$, $E$ et $F$ sont alignés.

# 3 Vecteur directeur et équation de droite

## 3.1 Vecteur directeur d'une droite

$\boxed{6}$

1. Le point $A(1;1)$ appartient à la droite $(d)$ car $2\times1-3\times1+1=0$. Un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.
2. Le point $B(7;5)$ appartient à la droite $d$ car $2\times7-3\times5+1=0$.

## 3.2 Équation de droite

$\boxed{7}$

1. $A(a;0)$ et $B(0;b)$ sont les intersections avec les axes de coordonnées.
2. Une équation de la droite passant par $A(4;0)$ et $B(0;3)$ est donc $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1 \iff 3x+4y=12$.

$\boxed{8}$

1. Équation de la médiatrice $(d_1)$

   **a.** $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ donc $AM^2=(x-1)^2+(y-6)^2$ et $BM^2=(x+3)^2+(y-2)^2$.

   **b.**
$$\begin{aligned} MA^2 &= MB^2\\ (x-1)^2+(y-6)^2 &= (x+3)^2+(y-2)^2\\ -8x-8y+24 &= 0\\ x+y-3 &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $M(x;y)\in d_1=\text{Méd}([\text{AB}]) \iff \text{x}+\text{y}-3=0$

2. Cercle circonscrit

   **a.** $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-6\\y-1\end{pmatrix}$ donc $CM^2=(x-6)^2+(y-1)^2$ et

$$\begin{aligned} MA^2 &= MC^2\\ (x-1)^2+(y-6)^2 &= (x-6)^2+(y-1)^2\\ 10x-10y &= 0\\ x-y &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $M(x;y)\in d_2=\text{Méd}([\text{AC}]) \iff \text{x}-\text{y}=0$

   **b.** Le centre $\Omega$ du cercle circonscrit appartient aux deux médiatrices, ainsi, ses coordonnées sont solution du système :

$$\begin{cases} x+y=3\\ x-y=0\end{cases} \iff \begin{cases} 2x=3 & (L_1+L_2)\\ x=y\end{cases} \iff \underline{\Omega\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)}$$

## 3.3 Déterminer une équation de droite

$\boxed{9}$

1. Coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ :

$$A(0;0)\quad B(1;0)\quad C(0;1)\quad I\left(\frac{1}{2};0\right)\quad J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\quad K\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

Équation de $(AJ)$ : $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $M(x;y)\in(AJ) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix}x & 1\\ y & 1\end{vmatrix}=0 \iff x-y=0$$

Équation de $(CI)$ : $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur et $M(x;y) \in (AJ) \iff \overrightarrow{CM}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \begin{vmatrix} x & 1 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -2x - y + 1 = 0$$

L'intersection des médianes est donc le point de coordonnées $(x,y)$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 2x + x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

2. La médiane issue de $B$ a pour équation $x + 2y - 1 = 0$ et les coordonnées de $G$ vérifient bien l'équation de la droite, ainsi, $G$ appartient bien à la troisième médiane.

   Cela prouve que les médianes d'un triangle sont concourantes.

**10**

1. On trace les droites d'équations $x = 1$, $x + y - 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$
2. Résolvons le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 2 \\ 3y = 3 \end{cases} \iff \underline{\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}}$$

   Il est clair que le point $A(1;1)$ appartient aux trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_{-1}$.
   Soit $m \in \mathbb{R}$, $1 + (m-1) \times 1 - m = 1 + m - 1 - m = 0$, donc les coordonnées de $A$ vérifient l'équation de la droite $\mathscr{D}_m$ quel que soit $m \in \mathbb{R}$.
   On en conclut que toutes les droites $\mathscr{D}_m$ sont concourantes en $A$.
3. (a) $3 + (m-1) \times 0 - m = 0 \iff m = 3$, donc $\mathscr{D}_3$ passe par $B(3;0)$.

   (b) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_m$ est $\overrightarrow{u_m}\begin{pmatrix}1-m\\1\end{pmatrix}$, il sera colinéaire avec l'axe des ordonnées si et seulement si $m = 1$.

   (c) Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_m$ est $\overrightarrow{u_m}\begin{pmatrix}1-m\\1\end{pmatrix}$ qui ne peut pas être colinéaire avec $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

# 4 Définitions du produit scalaire

## 4.1 Défaut d'orthogonalité

## 4.2 Expression analytique dans un repère orthonormal

**11** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et donc le triangle $ABC$ rectangle en $A$.

## 4.3 Définition avec les projections

**12**

1. $a^2$
2. $0$
3. $0$
4. $-a^2$

## 4.4 Définition avec le cosinus

**13** $0 \leqslant |\cos(\theta)| \leqslant 1$ donc

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

**14** Cauchy-Schwarz appliqué aux vecteurs $\overrightarrow{U}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

# 5 Applications du produit scalaire

## 5.1 Calcul d'angle dans un repère

**15** On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$, puis, en utilisant la formule d'Al-Kashi, on trouve :

$$\cos\widehat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{8}{\sqrt{10}\times\sqrt{74}}=\frac{4}{\sqrt{185}}$$

## 5.2 Résolution de triangles

**16**

1. D'après la formule classique de l'aire d'un triangle, $S=\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}=\dfrac{1}{2}c\underbrace{b\sin\widehat{A}}_{\text{hauteur issue C}}$
2. Par permutation circulaire, on obtient les formules équivalentes :

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ca\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Puis on divise toutes les fractions par $\dfrac{abc}{2}$ et on obtient la loi des sinus.

$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{A}\right)}=\frac{b}{\sin\left(\widehat{B}\right)}=\frac{c}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$

**17** $\dfrac{a}{\sin 30}=\dfrac{b}{\sin 50}=\dfrac{5}{\sin 100}$

**18** $\mathscr{S}=\mathscr{A}_{AOB}+\mathscr{A}_{BOC}+\mathscr{A}_{COD}+\mathscr{A}_{DOA}$ Puis on utilise $S=\dfrac{1}{2}cb\sin\left(\widehat{A}\right)$ sachant que $\widehat{BOC}=\pi-\alpha$ et que $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,(OA\times OB+OB\times OC+OC\times OD+OD\times OA)\\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\big(OB\times(OA+OC)+OD\times(OC+OA)\big)\\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\big(AC\times(OB+OD)\big)\\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,AC\times BD\end{aligned}$$

**19** D'après la loi des sinus :

$$\frac{AB}{\sin 69}=\frac{200}{\sin 38}=\frac{BC}{\sin 73}$$

Ainsi, $\underline{BC=\dfrac{200\sin 69}{\sin 38}}$ et donc $\boxed{d=\dfrac{200\sin 69\sin 73}{\sin 38}}\approx 290\,\text{m}$

**20** D'après la loi des sinus, $BD=\dfrac{100\sin 81}{\sin 59}$ et $BC=\dfrac{100\sin 52}{\sin 45}$.
D'après la formule d'Al-Kashi,

$$CD=\sqrt{\frac{100^2\sin^2 81}{\sin^2 59}+\frac{100^2\sin^2 52}{\sin^2 45}-2\times 100^2\times\frac{\sin 81\sin 52}{\sin 59\sin 45}\sin 43}=100\sqrt{\frac{\sin^2 81}{\sin^2 59}+\frac{\sin^2 52}{\sin^2 45}-2\times\frac{\sin 81\sin 52}{\sin 59\sin 45}\sin 43}$$

### 5.3 Théorème de la médiane

$\boxed{21}$ On sait, d'après le théorème de la médiane, que pour tout point $M$ , on a $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$, où $I$ est le milieu de $[AB]$.
Ainsi, on a $2MI^2=20-\frac{1}{2}\times 4^2=12 \iff MI=\sqrt{6}$. L'ensemble des points recherchés est donc le cercle de centre $I$ et de rayon $\sqrt{6}$.

$\boxed{22}$

1. Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et ont même milieu. Donc $AC=BD$ et $O$ est le milieu commun.
   Par ailleurs, d'après le théorème de la médiane, $MA^2+MC^2=2MO^2+\frac{1}{2}AC^2$ t par ailleurs, $MB^2+MD^2=2MO^2+\frac{1}{2}BD^2$. D'où la relation, $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.
2. $MD^2=30^2+6^2-18^2=612$, donc $MD=6\sqrt{17}$

## 6 Équation de cercle

$\boxed{23}$ $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2 \iff x^2-6x+9+y^2-8x+16=25 \iff x^2+y^2-6x-8y=0$

$\boxed{24}$

1. $x^2+y^2+6x-2y+8=0 \iff (x+3)^2-9+(y-1)^2-1+8=0 \iff (x+3)^2+(y-1)^2=2$
   L'ensemble est le cercle de centre $\Omega(-3;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
2. $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+y+1=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=0 \iff \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{11}{16}$
   Il n'y a donc aucun point du plan qui vérifie l'équation initiale. On dit que l'ensemble des points est l'ensemble vide : $\emptyset$.

$\boxed{25}$ Centre $\Omega(3;4)$, rayon 5.
Axe des abscisses : $y=0$, pour trouver les intersections, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-8y &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2-6x &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.$$

les deux solutions sont $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& 0\\ x_2 &=& 6\end{array}\right.$
Axe des ordonnées : $x=0$, pour trouver les intersections, on résout le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-8y &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y^2-8y &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right.$$

les deux solutions sont $\left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& 0\\ y_2 &=& 8\end{array}\right.$

$\boxed{26}$ Système non linéaire, résolution par **substitution** :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+4x+4y-17 &=& 0\\ x-2y+3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4y^2-12y+9+y^2+8y-12+4y-17 &=& 0\\ x &=& 2y-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5y^2-20 &=& 0\\ x &=& 2y-3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \pm 2\\ x &=& 2y-3\end{array}\right.$$

Ainsi, les deux intersections sont : $I(-7;-2)$ et $J(1;2)$.

$\boxed{27}$ L'équation du cercle est : $x^2+y^2-6x-2y=0$. Le système est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-2y &=& 0\\ x+y-2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-6x-2y &=& 0\\ x &=& 2-y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4-4y+y^2+y^2-12+6y-2y &=& 0\\ x &=& 2-y\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y^2-8 &=& 0\\ x &=& 2-y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& \pm 2\\ x &=& 2-y\end{array}\right. \iff I(0;2) \text{ et } J(4;-2) \text{ sont les intersections}$$