Chapitre 5 : Éléments de géométrie plane

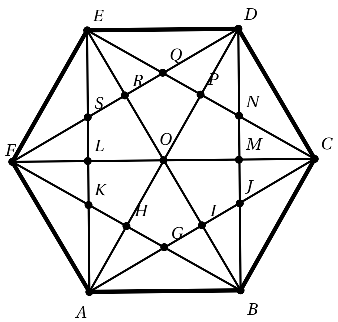
1 Vecteurs et Coordonnées

1.1 Colinéarité

Définition 1.

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* $(\vec{u} \neq \vec{0})$ revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

■ Exemple 1:



- $\overrightarrow{LO}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ car $\overrightarrow{AB} = 2 \times \overrightarrow{LO}$.
- $\overrightarrow{FD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GI}$ car $\overrightarrow{GI} = \dfrac{1}{6} \times \overrightarrow{FD}$.
- $\overrightarrow{HI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{FC}$ car $\overrightarrow{FC} = 4 \times \overrightarrow{HI}$.

Remarque 1 (Cas du vecteur nul)**.**

$\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ puisque $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$.

1.2 Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

Définition 2 (Base de vecteurs)**.**

Lorsque deux vecteurs du plan ne sont pas colinéaires, on dit qu'ils forment une *base vectorielle* du plan.

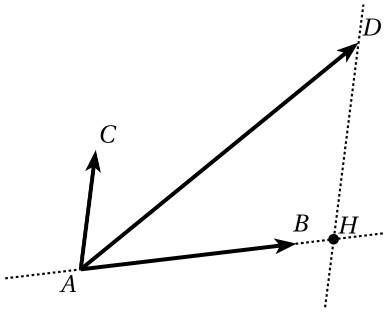
Propriété 1 (admise)**.**

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, **il existe un couple unique** de réels $(a;b)$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Démonstration

Existence :
Soit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine. On considère de même un point D tel que $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. On trace la parallèle à (AC) passant par D et on appelle H l'intersection avec la droite (AB).

- $\overrightarrow{HD}$ est colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AC}$ donc il existe un réel b tel que $\overrightarrow{HD} = b\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc il existe un réel a tel que $\overrightarrow{AH} = b\overrightarrow{AB}$



Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} \iff \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Unicité :
On suppose qu'il existe deux couples de réels $(a;b)$ et $(a';b')$ tels que $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v} = a'\vec{u}+b'\vec{v}$
On a alors $(a-a')\vec{u} = (b'-b)\vec{v}$
Si $a \neq a'$ alors $\vec{u} = \dfrac{b'-b}{a-a'}\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce qui est contradictoire.
Ainsi, $\underline{a = a'}$. Puis par conséquent $\underline{b = b'}$.
Ainsi, les deux couples de réels $(a;b)$ et $(a';b')$ sont égaux.

Synthèse :
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors pour tout vecteur $\vec{w}$ il existe un unique couple de réels $(a;b)$ tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

□

1.3 Coordonnées d'un vecteur et d'un point

Définition 3 (Coordonnées d'un vecteur).

Si $(\vec{u};\vec{v})$ est une base du plan, et $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, alors on dit que le couple $(a;b)$ est le couple de *coordonnées du vecteur* $\vec{w}$ dans la *base* $(\vec{u};\vec{v})$.

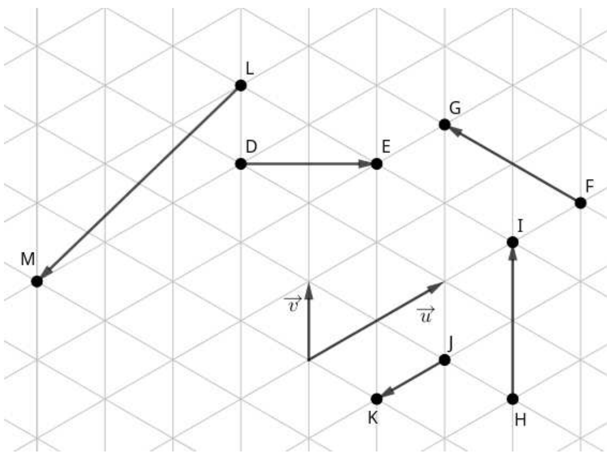
Conséquence 1 (Coordonnées d'un point dans un repère du plan).

Si l'on se donne en plus un point A, alors quel que soit le point M du plan, on peut trouver un couple $(a;b)$ tel que $\overrightarrow{AM} = a*\vec{u} + b*\vec{v}$. On dit alors que le couple $(a;b)$ est le couple de *coordonnées* du point M dans le *repère* $(A;\vec{u};\vec{v})$.

■ **Exemple 2:**

Dans la figure ci-contre, décomposer chaque vecteur proposé en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et en déduire ses coordonnées dans la base $(\vec{u};\vec{v})$.

- $\overrightarrow{DE} = \vec{u} - \vec{v}$ donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{FG}$
- $\overrightarrow{HI}$
- $\overrightarrow{JK}$
- $\overrightarrow{LM}$



Propriété 2.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Définition 4 (Déterminant de deux vecteurs)**.**

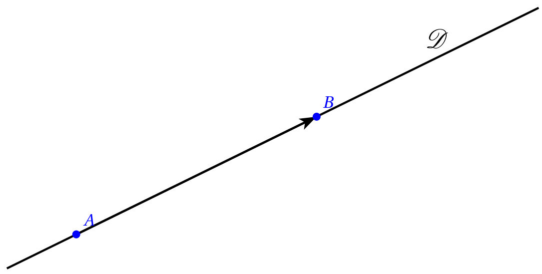
Le nombre $xy' - yx'$ est appelé *déterminant* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et se note $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$

2 Vecteur directeur et équation de droite

2.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 5 (Vecteur directeur d'une droite)**.**

On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$ où $A \neq B$ et $A, B \in \mathscr{D}$



2.2 Équations cartésiennes d'une droite

Définition 6.

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$,

1. L'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ dont les coordonnées vérifient une équation $ax+by=c$, où a, b et c sont trois nombres réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$, est une droite.
2. L'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ d'une droite vérifient une relation $ax+by=c$, où a, b et c sont des nombres réels.

On dit que l'équation $ax+by=c$ est une *équation cartésienne* de la droite (d).

On remarque que l'équation cartésienne propose une forme unique pour tous les types de droites, dans tous les types de repères.
On peut également utiliser les formes « *réduites* » $y = mx + p$ ou $x = c$ pour les parallèles aux ordonnées.
On utilisera plutôt les cartésiennes dans un contexte géométrique et plutôt les réduites dans un contexte de fonctions (tangentes, etc...).

Démonstration

1. Soient a, b, et c trois nombres réels avec $(a,b) \neq (0,0)$. Soient trois points distincts $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$, $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ et $C\left(x_C\,;\,y_C\right)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $ax+by=c$. On a donc $ax_A+by_A=c$, $ax_B+by_B=c$ et $ax_C+by_C=c$.
   On a donc, par exemple,
   $$ax_A+by_A=ax_B+by_B \iff a(x_A-x_B)=-b(y_A-y_B)$$
   Sans perdre de généralité, on peut supposer que $b\neq 0$. On a alors, en divisant de chaque côté :
   $$-\frac{a}{b}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$
   De même, on peut montrer que $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$
   Ainsi, on a :
   $$-\frac{a}{b}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} \iff (x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)=0$$
   $$\iff \begin{vmatrix} x_B-x_A & x_C-x_A \\ y_B-y_A & y_C-y_A \end{vmatrix}=0 \iff \det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=0$$
   Donc les points A, B et C sont alignés.
2. Réciproquement, soient $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ deux points du plan.
   $M\left(x\,;\,y\right)\in(AB) \iff \det\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AM}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} x_B-x_A & x-x_A \\ y_B-y_A & y-y_A \end{vmatrix}=0$
   $\iff (x_B-x_A)(y-y_A)-(x-x_A)(y_B-y_A)=0$
   $\iff \underbrace{-(y_B-y_A)}_{a}\boldsymbol{x}+\underbrace{(x_B-x_A)}_{b}\boldsymbol{y}=\underbrace{y_A(x_B-x_A)-x_A(y_B-y_A)}_{c}$

□

■ Exemple 3:

$\boxed{\textbf{Méthode 1}}$ Soients $A(-2;3)$ et $B(3;1)$. Trouver une équation cartésienne de la droite (AB).

En regardant la dernière partie de la démonstration précédente, on a :

Propriété 3 (Vecteur directeur et équation cartésienne)**.**

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax+by=c$

■ Exemple 4:

- La droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $2x-3y+1=0$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$.
- La droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y=4x-7$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\end{pmatrix}$

■ Exemple 5:

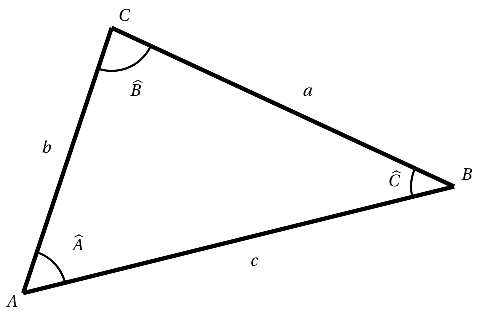
$\boxed{\textbf{Méthode 2}}$ Soients $A(-2;3)$ et $B(3;1)$. Trouver une équation cartésienne de la droite (AB).

Remarque 2.

Une équation cartésienne de droite n'est pas unique.
Par exemple $2x+5y=22$ et $4x+10y=44$ sont deux équations de la même droite.

3 Définitions du produit scalaire

3.1 Défaut d'orthogonalité



Définition 7 (Produit scalaire par les normes).

On appelle *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ le **nombre** noté

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Remarque 3 (Commutativité du produit scalaire).

On remarque tout de suite que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Propriété 4 (Nullité du produit scalaire).

Étant donnés trois points du plan A, B, et C. on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux}$$

Démonstration

En effet, d'après le théorème de pythagore, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

□

3.2 Expression analytique dans un repère orthonormal

Théorème 1 (Expression analytique du ps dans un repère).

Dans un repère **orthonormé** $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan, si on se donne deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors l'expression du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$.

Démonstration

Démonstration à connaître

□

Remarque 4 (Calcul de longueur dans un repère).

on retrouve bien la relation de la longueur connue dès la seconde : $\underline{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Définition 8 (Norme d'un vecteur).

On appelle *norme* du vecteur $\vec{u}$ la racine carrée du produit $\vec{u} \cdot \vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. On a donc, dans un repère orthonormal : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

■ **Exemple 6:**

$A(2;3)$, $B(-1;1)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{\ldots^2 + \ldots^2} = \ldots$

Propriété 5 (Linéarité du produit scalaire).

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan, et tout nombre réel λ,

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Remarque 5.

On peut comprendre la linéarité comme une forme de distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs.

Propriété 6 (Identités remarquables).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

1. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

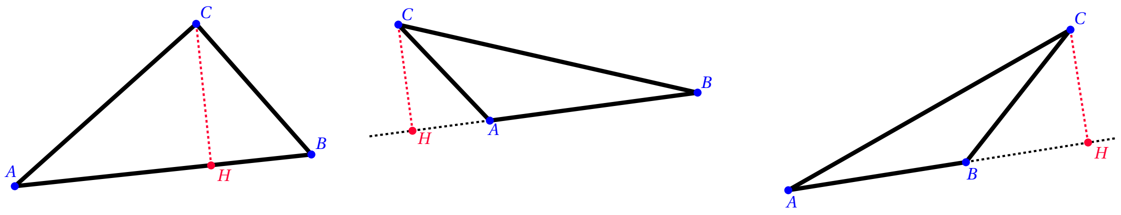
Démonstration

Démonstration à connaître

□

3.3 Définition avec les projections

Nous allons projeter orthogonalement le point C sur la droite (AB).



Théorème 2 (Expression par les projections).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le produit des *mesures algébriques* (distances orientées) $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$:

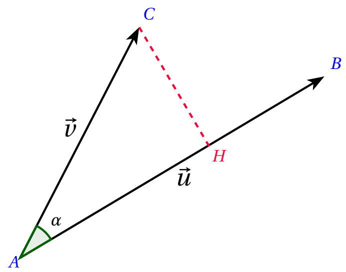
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AH}$$

3.4 Définition avec le cosinus

En calculant la valeur de AH, on constate que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ ....

Théorème 3 (Expression par le cosinus de l'angle).

Étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}}$.



Théorème 4 (Pythagore généralisé ou « Al-Kashi »).

Soit un triangle ABC, de côtés a, b, c et d'angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, et $\widehat{C}$. Alors

- $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})}$
- $\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})}$
- $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})}$

<u>**Démonstration**</u>

Démonstration à connaître.

□

4 Applications du produit scalaire

4.1 Calcul d'angle dans un repère

■ Exemple 7:

Dans un repère orthonormé, on donne : $A(-2;-1)$, $B(-3;2)$ et $C(5;4)$. Déterminer la mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Indication : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})$ *et* $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

4.2 Résolution de triangles

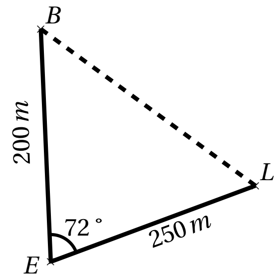
La résolution d'un triangle consiste à déterminer toutes les grandeurs inconnues d'un triangle.

■ Exemple 8:

L'histoire de Bellotte et Édouardo.

Bellotte est une jeune fille qui est arrivée cette année dans le Lycée de Fangs. Elle tombe rapidement sous le charme du bel Édouardo qui, manque de chance, s'avère être un vampire végétarien, âgé de 19 ans pour l'éternité... Son incapacité à vieillir lui permet de redoubler sans cesse la classe de CPES et donc de plutôt bien maîtriser son programme de mathématiques.

Édouardo (E) se tient à une distance de 200 m de la belle Bellotte (B) qui cueille des champignons dans les bois. Il doit veiller sur sa belle amie, mais un terrible danger (un Loup-garou (L)) la guette. La situation est représentée sur le schéma ci-dessous.



Grâce à ses pouvoirs surnaturels (et à l'odeur) le bel Édouardo sait évaluer la distance qui le sépare de Bellotte et du Loup-garou. Il sait également mesurer l'angle $\widehat{BEL} = 72°$.

Des mesure en soufflerie ont permis d'établir qu'un vampire peut courir à une vitesse de $68\,km/h$ et qu'un loup-garou galope à $20\,m/s$ de moyenne.

Édouardo est-il placé suffisamment près de sa dulcinée pour pouvoir la protéger si le Loup-garou lui fonce dessus en vue de la croquer ?

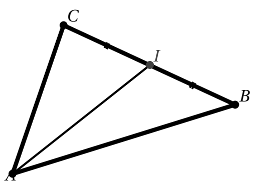
Indication : Al-Kashi

4.3 Théorème de la médiane

Théorème 5 (De la médiane)**.**

Si ABC est un triangle et I le milieu de [BC], alors

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$



4.4 Vecteur normal à une droite

Définition 9 (Vecteur normal à une droite).

On appelle *vecteur normal* à une droite un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite

Propriété 7 (Expression d'un vecteur normal à une droite).

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}\ :\ ax+by+c=0$

Remarque 1
Tout vecteur normal est colinéaire à $\vec{n}$

■ **Exemple 9:**

Trouver une équation de la droite d passant par $A(-1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

L'exercice consiste à trouver le c de l'équation en utilisant le produit scalaire.
$-x+3y-4=0$

5 Équation de cercle

5.1 Défini par centre et rayon

Définition 10 (Équation de cercle).

Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, étant donné un point $\Omega\left(x_\Omega\,;y_\Omega\right)$ et un nombre r positif, l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ du plan vérifiant la relation $(x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=r^2$ est le cercle de centre Ω de rayon r.

■ **Exemple 10:**
Donner l'équation du cercle de centre $A(3;4)$ et de rayon 5. Donner l'expression développée et réduite.

▶ Exercice 1

Discuter des ensembles de points suivants :

- Soit l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2+6x-2y+8=0$
- Soit l'ensemble des points $M\left(x;y\right)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+y+1=0$.

$\mathscr{C}((-3;1),\sqrt{2}),\ \varnothing$

5.2 Défini par son diamètre

Propriété 8.

$M\in\mathscr{C}([AB])\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

■ **Exemple 11:**

Soient $A(2;0)$ et $B(0;3)$. Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].

À quoi voit-on dans l'équation que l'origine du repère est sur le cercle ?