

Chapitre 6 : Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

1.1 Définition de « La fonction exponentielle »

Définition 1 (Fonction exponentielle).

La fonction *exponentielle*, notée \exp est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} égale à sa dérivée et telle que $\exp(0) = 1$.

Remarque 1 (Unicité de la fonction).

On doit admettre d'existence d'une telle fonction (une justification est sa constructibilité grâce à la méthode d'Euler), mais on peut démontrer qu'elle est unique, en utilisant le fait que la fonction \exp ne s'annule pas sur \mathbb{R} .



Unicité de la fonction



\exp ne s'annule pas sur \mathbb{R}

Théorème 1 (Propriétés de la fonction).

- **Relation fonctionnelle** : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- **Positivité** : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$.
- **Monotonie** : la fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- **Notation d'Euler** : On pose $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1) \approx 2,71828\dots$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : e^{a+b} = e^a \times e^b ; e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} ; e^{na} = (e^a)^n, n \in \mathbb{Z}$$

Démonstration

Relation fonctionnelle : Soit y un réel quelconque. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (bien définie et dérivable sur \mathbb{R} car pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$)
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\exp(x) \times 1 \exp(x+y) - \exp(x) \exp(x+y)}{\exp(x)^2} = 0$. Ainsi, f est constante sur \mathbb{R} et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) = \exp(y)$.
Ainsi, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

□

Remarque 2 (valeur de e).

Il peut être défini comme la limite de la suite (u_n) telle que $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, c'est la définition historique.

Mais la convergence de la suite est très lente (il faut calculer plusieurs milliers de termes de la suite pour obtenir quelques décimales exactes).

On a une valeur approchée plus rapidement en étudiant la suite (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$, qui converge également vers le nombre e .

a . la factorielle de n est le nombre défini ainsi : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Exemple 1:

- $e^2 \times e = e^{2+1} = e^3$
- $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$
- $(e^x)^2 = e^{2x}$
- $\frac{e^{3x+1}}{e^{1-x}} = e^{3x+1-(1-x)} = e^{4x}$

Théorème 2 (Équations et inéquations).

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $e^a = e^b \iff a = b$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on a $e^a > e^b \iff a > b$.

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$e^{2x^2+3} = e^{7x} \quad e^{3x} \leq e^{x+6}$$

1.2 Limites**Propriété 1** (Limites de la fonction exponentielle).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots\dots$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots\dots$

Démonstration

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = e^x - (x+1)$.
2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
3. Quelle est la limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$?

□

► Exercice 2 Modèle de Verhulst

Une population de bactéries se modélise au cours du temps par la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(t) = \frac{150}{1 + 90e^{-0,6t}}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Propriété 2 (Limite et nombre dérivé).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

On interprète cela par l'approximation affine de \exp : quand x est proche de 0, $e^x \approx 1 + x$.

Démonstration

Nombre dérivé en 0

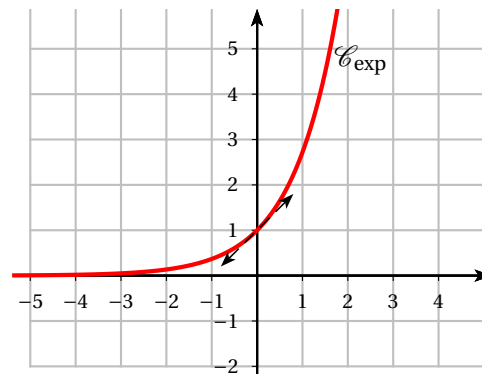
□

1.3 Représentation graphique

La fonction exponentielle croît très vite.
 $e^1 \approx 2,72$, $e^2 \approx 7,39$ et $e^4 \approx 54$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$		0	1	$+\infty$

Diagramme illustrant la croissance de la fonction exponentielle. Des points sont marqués à $x=0$ (y=1) et $x=1$ (y=e). Des flèches indiquent la direction de la courbe vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$ et vers 0 pour $x \rightarrow -\infty$.



1.4 Théorème de croissances comparées

« L'exponentielle domine les fonctions puissance »

Théorème 3 (Croissances comparées).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \text{ et par conséquent, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp(x) = 0$$

Démonstration

On étudie la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

□

Remarque 3.

Les formules précédentes restent vraies si on remplace $\frac{\exp x}{x}$ par $\frac{\exp x}{x^n}$ et en 0 par $x^n \exp(x)$.

► **Exercice 3**

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-3x} + 3x - 5$.

2 Fonction logarithme népérien

2.1 Définition

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout nombre strictement positif, il existe un unique antécédent réel par la fonction exponentielle : pour tout $y \in]0; +\infty[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = y$.

On remarque d'ailleurs que $y > 1 \iff x > 0$.

Par exemple, $2 > 0$ admet un antécédent τ_2 qui sera positif et tel que $\exp(\tau_2) = 2$.

x	$-\infty$	0	τ_2	\dots	$+\infty$
\exp	0	1	2	e	$+\infty$

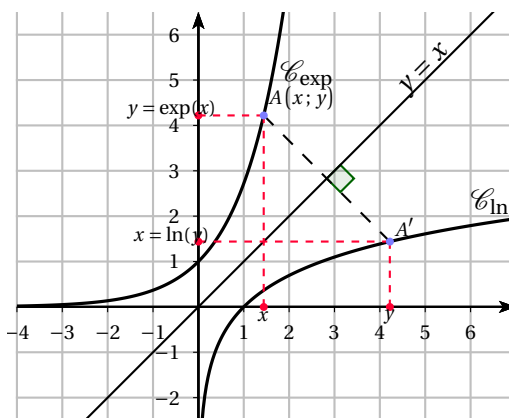
Définition 2 (Logarithme népérien).

Si y est un nombre strictement positif, on appelle *logarithme népérien* de y le nombre réel noté $\ln(y)$ qui est l'antécédent de y par la fonction exponentielle :

$$\ln : y \in \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \ln(y) \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } \exp(\ln(y)) = y$$

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0, \boxed{e^a = b \iff a = \ln(b)}$$



Comme $y = \exp(x)$, alors $x = \ln(y)$, les courbes sont symétriques par rapport à l'axe d'équation $y = x$ (qui permet d'invertir les rôles des axes des abscisses et des ordonnées).

On a les propriétés suivantes :

Propriété 3 (fonction réciproque de exp).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$, ou $\ln(e^x) = x$
- Pour tout $x \in]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln(x)) = x$, ou $e^{\ln(x)} = x$

En particulier,

$$\ln(1) = \ln(e^0) = 0 \text{ et } \ln(e) = \ln(e^1) = 1.$$

Théorème 4 (Propriétés de ln).

$\forall a, b \in]0; +\infty[$

- Relation fonctionnelle : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- Conséquences :

$$1. \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$3. \text{ Pour tout entier relatif } n, \ln(a^n) = n\ln(a)$$

$$4. \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \text{ et plus généralement, pour tout réel } b, \ln(a^b) = b\ln(a).$$

On retiendra du dernier point que toute puissance s'exprime à l'aide de l'exponentielle de base e et du logarithme népérien :

$$x^y = (e^{\ln x})^y = e^{y\ln(x)}$$

Exemple 2:

- $\ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$
- $\ln(100) = \ln(10) + \ln(10) = 2\ln(10)$
- $\ln(1000) = \dots = 3\ln(10)$

► Exercice 4 **Prise d'initiatives**

1. Comparer les nombres $a = 2^{2015}$ et $b = 3^{1271}$
2. Donner une valeur approchée du nombre $A = \frac{2^{2015}}{5^{867}}$

2.2 Dérivée et variations**Propriété 4** (Dérivée de la fonction ln).

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction ln est dérivable et sa dérivée est la fonction inverse : pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque 4.

La fonction \ln est par conséquent continue sur $]0; +\infty[$.

Conséquence 1.

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Propriété 5 (Équations et inéquations).

- Pour tous $a, b > 0$, $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- Pour tous $a, b > 0$, $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

► Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes après avoir trouvé leur ensemble de définition.

1. $\ln(2x - 4) < 0$
2. $\ln(3x) \leq 1$
3. $\ln(-x + 1) \geq \ln(x)$
4. $\ln(3 - 2x) < \ln(x - 3)$

2.3 Limites, Croissances comparées, équivalent**Propriété 6 (Limites).**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Propriété 7 (Croissances comparées).

- Forme $\frac{+\infty}{+\infty}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- Forme $0 \times -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

► Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{2x + 1}$$

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

Propriété 8 (Une limite particulière).

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Démonstration

Le nombre dérivé de \ln en 1 donne la limite attendue.

□

Remarque 5 (Équivalent).

On dit que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est équivalente à x en 0.

Cela signifie que, pour un x « proche de 0, $\ln(1+x) \approx x$ ».

Par exemple, $\ln(1,01) \approx 0,00950331 \approx 0,01$

2.4 Étude des fonctions composées $\ln \circ u$ **Propriété 9** (Dérivée de $\ln \circ u$).

Si u est une fonction définie sur un intervalle I , dérivable sur I et est strictement positive sur I , alors la fonction $f = \ln \circ u$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Conséquence 2.

- u et $\ln(u)$ ont le même sens de variation sur I .
- (avec une fonction affine) $f : x \mapsto \ln(ax+b)$ est dérivable sur $I = \{x \in \mathbb{R} \mid ax+b > 0\}$ et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{a}{ax+b}$.

Cette dernière remarque sera utilisée notamment pour la recherche de primitives de fractions rationnelles.

3 Fonctions trigonométriques**3.1 Fonction sinus****Définition 3** (Sinus d'un réel).

Soit x un nombre réel, $\sin x$ est l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé au nombre x .

Définition 4 (Fonction sinus).

La fonction *sinus* est définie sur \mathbb{R} , par

$$\sin: x \mapsto \sin x$$

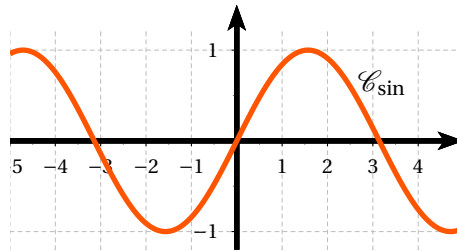
Elle est 2π -périodique, impaire, continue et dérivable sur \mathbb{R} .

Sa dérivée est $\boxed{\sin' = \cos}$.

Propriété 10 (Variations).

x	0	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	1	0

Imparité et périodicité font le reste :

**3.2 Fonction cosinus****Définition 5** (Cosinus d'un réel).

Soit x un nombre réel, $\cos x$ est l'abscisse du point du cercle trigonométrique associé au nombre x .

Définition 6 (Fonction sinus).

La fonction *cosinus* est définie sur \mathbb{R} , par

$$\cos: x \mapsto \cos x$$

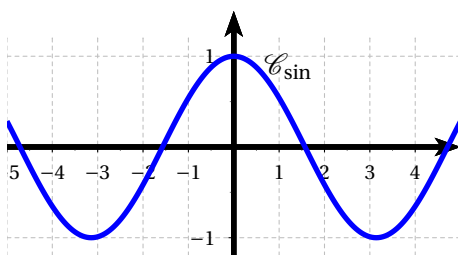
Elle est 2π -périodique, paire, continue et dérivable sur \mathbb{R} .

Sa dérivée est $\boxed{\cos' = -\sin}$.

Propriété 11 (Variations).

x	0	$\pi/2$	π
$\cos(x)$	1	0	-1

Parité et périodicité font le reste :



3.3 Fonction Tangente

Définition 7 (tangente d'un réel).

Soit x un nombre réel différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π , $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Définition 8 (Fonction tangente).

La fonction *tangente* est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, par

$$\cos : x \mapsto \cos x$$

Elle est π -périodique, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Sa dérivée est $\tan' : x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Propriété 12 (Variations sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$).

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$+\infty$

Imparité et périodicité font le reste :

