Modélisation d'un Moteur à Courant Continu (MCC) - Corrigé

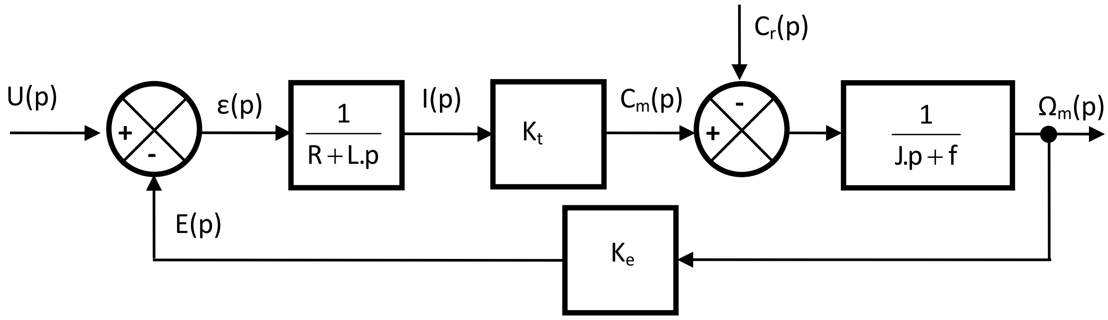
Q.1. $u(t) = e(t) + R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt}$ → $U(p) = E(p) + R.I(p) + L.p.I(p)$

$e(t) = K_e.\omega_m(t)$ → $E(p) = k_e.\Omega_m(p)$

$J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f.\omega_m(t)$ → $J.p\ \Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p) - f.\ \Omega_m(p)$

$C_m(t) = K_t.i(t)$ → $C_m(p) = k_t.I(p)$

Q.2.



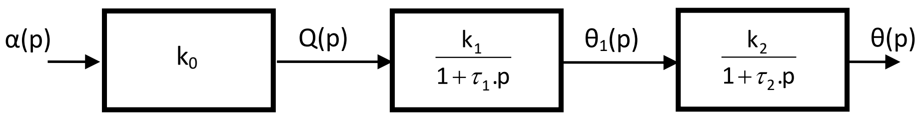
Modélisation d'une enceinte chauffante - Corrigé

Q.1. $q(t)=k_0.\alpha(t)$ → $Q(p)=k_0.\alpha(p)$

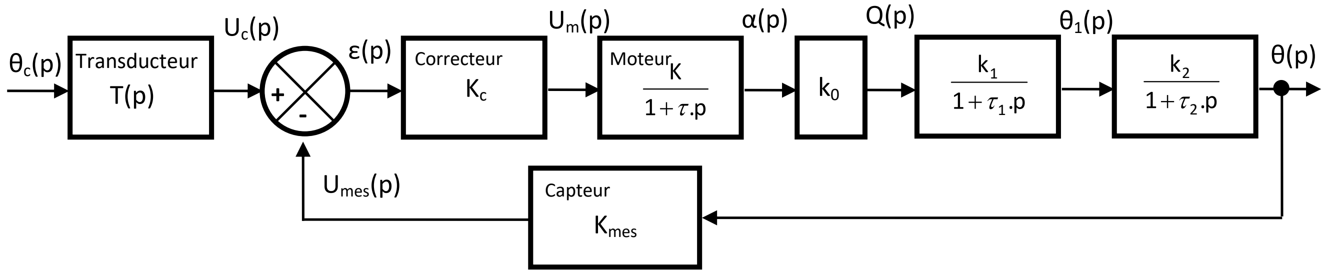
$\theta_1(t)+\tau_1.\frac{d\theta_1(t)}{dt}=k_1.q(t)$ → $\theta_1(p).(1+\tau_1.p)=k_1.Q(p)$

$\theta(t)+\tau_2.\frac{d\theta(t)}{dt}=k_2.\theta_1(t)$ → $\theta(p).(1+\tau_2.p)=k_2.\theta_1(p)$

Q.2. Représenter le système par un schéma-bloc faisant intervenir les 3 blocs précédemment définis.



Q.3.



Q.4. On a $U_{mes}(p)=K_{mes}.\theta(p)$ et $U_c(p) = T(p).\theta_c(p)$ d'où :

$\varepsilon(p)=U_c(p) - U_{mes}(p) = T(p).\theta_c(p) - K_{mes}.\theta(p) = 0$ → si $\theta_c(p) = \theta(p)$ alors $T(p) = K_{mes} = 0{,}02$.

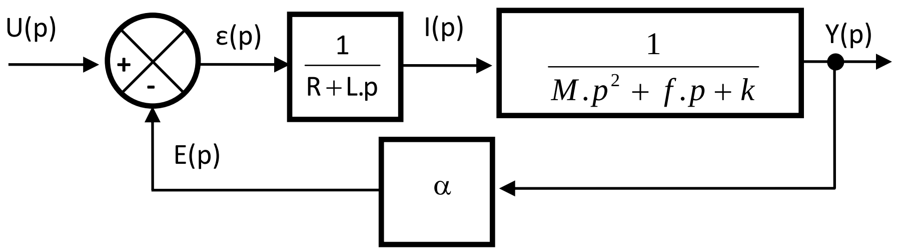
Modélisation d'une tête de lecture de disque dur - Corrigé

Q.1. $M\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+f\dfrac{d\,y(t)}{dt}+k.y(t)=\beta.i(t)$ → $M.p^2Y(p)+f.pY(p)+k.Y(p)=\beta.I(p)$

$e(t)=\alpha\dfrac{d\,y(t)}{dt}$ → $E(p)=\alpha.pY(p)$

$u(t)=R.i(t)+L\dfrac{d\,i(t)}{dt}+e(t)$ → $U(p)=R.I(p)+Lp.I(p)+E(p)$

Q.2. Représenter le système par un schéma-bloc faisant intervenir les 3 blocs précédemment définis.



Calcul de transformées de Laplace - Corrigé

Par définition : $\mathscr{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}.dt$

$e^{-at}.u(t)$: $\mathscr{L}(e^{-at}.u(t)) = \int_0^{\infty} e^{-at}.u(t).e^{-pt}.dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t}.u(t).dt = \left[-\dfrac{1}{p+a}.e^{-(p+a)t}\right]_0^{\infty} = \dfrac{1}{p+a}$

cos(ωt).u(t) : Rappel : On a $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j.\sin(\omega t)$ et $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j.\sin(\omega t)$

soit : $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$ et $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$ et en exploitant le résultat de $\mathscr{L}(e^{-at}.u(t))$

On a : $\mathscr{L}(\cos(\omega t).u(t))=\mathscr{L}\left(\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}.u(t)\right) = \dfrac{1}{2}\mathscr{L}(e^{j\omega t}.u(t)) + \dfrac{1}{2}\mathscr{L}(e^{-j\omega t}.u(t))$

$\mathscr{L}(\cos(\omega t).u(t)) = \dfrac{1}{2}.\left[\dfrac{1}{p-j\omega}+\dfrac{1}{p+j\omega}\right] = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

sin(ωt).u(t) : $\mathscr{L}(\sin(\omega t).u(t)) = \mathscr{L}\left(\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}.u(t)\right) = \dfrac{1}{2j}\mathscr{L}(e^{j\omega t}.u(t)) - \dfrac{1}{2j}\mathscr{L}(e^{-j\omega t}.u(t))$

$= \dfrac{1}{2j}.\left[\dfrac{1}{p-j\omega}-\dfrac{1}{p+j\omega}\right] = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Par la définition la tache est plus ardue :

On pose $x(t) = \sin(\omega t).u(t)$ → $X(p) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t).u(t).e^{-pt}.dt$

On calcule cette intégrale par parties (« uv' = uv – u'v » avec $u = e^{-pt}$ et $v = \sin(\omega t)$)

$$X(p) = \left[-\frac{1}{\omega}.\cos\omega t.e^{-pt}\right]_0^{\infty} + -\frac{p}{\omega}\int_0^{\infty} \cos(\omega t).u(t).e^{-pt}.dt$$

L'intégrale restante peut aussi se calculer par parties (« uv' = uv – u'v » avec u = e^{-pt} et v = cos(ωt))

$$X(p) = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}\left[\frac{1}{\omega}.\sin\omega t.e^{-pt}\right]_0^{\infty} - \frac{p}{\omega}.\frac{p}{\omega}\int_0^{\infty} \sin(\omega t).u(t).e^{-pt}.dt$$

$$X(p) = \frac{1}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2}.X(p) \rightarrow (1+\frac{p^2}{\omega^2}).X(p) = \frac{1}{\omega} \rightarrow \frac{p^2+\omega^2}{\omega^2}.X(p) = \frac{1}{\omega} \rightarrow X(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Bref, il vaut mieux apprendre par cœur son tableau de transformées ^^ …

e^{-at}.sin(ωt).u(t) :

$\mathcal{L}$ (e^{-at}.sin(ωt).u(t)) = $\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ →On utilise le Thm de l'amortissement : $\mathcal{L}\left(e^{-at}.f(t)\right) = F(p+a)$

e^{-at}.cos(ωt).u(t) :

$\mathcal{L}$ (e^{-at}.cos(ωt).u(t)) = $\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$ →On utilise le Thm de l'amortissement : $\mathcal{L}\left(e^{-at}.f(t)\right) = F(p+a)$

Calcul de transformées inverses - Corrigé

Calculer la transformée inverse des fonctions suivantes :

- $F_1(p) = \dfrac{K_1}{(p+a).(p+b)}$

  On décompose en éléments simples : $F_1(p) = \dfrac{K_1}{(p+a).(p+b)} = \dfrac{\alpha}{(p+a)} + \dfrac{\beta}{(p+b)}$

  Calcul de α : On multiplie par (p + a) et p→ −a : $\dfrac{K_1}{(-a+b)} = \alpha$

  Calcul de β : On multiplie par (p + b) et p→ −b : $\dfrac{K_1}{(-b+a)} = \beta$

  $F_1(p) = \dfrac{K_1}{(b-a)}.\dfrac{1}{(p+a)} + \dfrac{K_1}{(a-b)}.\dfrac{1}{(p+b)} \rightarrow f_1(t) = \dfrac{K_1}{(b-a)}.e^{-at} + \dfrac{K_1}{(a-b)}.e^{-bt}$

- $F_2(p) = \dfrac{K_2}{p.(1+\tau.p)}$

  On décompose en éléments simples : $F_2(p) = \dfrac{K_2}{p.(1+\tau.p)} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{(1+\tau.p)}$

  Calcul de α : On multiplie par (p) et p→ 0 : $K_2 = \alpha$

  Calcul de β : On multiplie par (1 + τ.p) et p→ $-\dfrac{1}{\tau}$: $F_2(p) = -K_2.\tau = \beta$

  $F_2(p) = \dfrac{K_2}{p} - \dfrac{K_2.\tau}{(1+\tau.p)} = \dfrac{K_2}{p} - \dfrac{K_2}{\left(\dfrac{1}{\tau}+p\right)} \rightarrow f_2(t) = K_2 - K_2.e^{-\frac{t}{\tau}}$

- $F_3(p) = \dfrac{K_3.p}{(p+a).(p+b)}$

  On décompose en éléments simples : $F_3(p) = \dfrac{K_3.p}{(p+a).(p+b)} = \dfrac{\alpha}{(p+a)} + \dfrac{\beta}{(p+b)}$

  Calcul de α : On multiplie par (p + a) et p→ −a : $\dfrac{-K_3.a}{(-a+b)} = \alpha$

  Calcul de β : On multiplie par (p + b) et p→ −b : $\dfrac{-K_3.b}{(-b+a)} = \beta$

  $F_3(p) = \dfrac{K_3.a}{(a-b)}.\dfrac{1}{(p+a)} + \dfrac{K_3.b}{(b-a)}.\dfrac{1}{(p+b)} \rightarrow f_3(t) = \dfrac{K_3.a}{(a-b)}.e^{-at} + \dfrac{K_3.b}{(b-a)}.e^{-bt}$

- $F_4(p) = \dfrac{K_4.p^2}{(p-1)^2.(p+1)}$

  On décompose en éléments simples : $F_4(p) = \dfrac{K_4.p^2}{(p-1)^2.(p+1)} = \dfrac{\alpha}{(p-1)^2} + \dfrac{\beta}{(p-1)} + \dfrac{\gamma}{(p+1)}$

  Calcul de α : On multiplie par $(p-1)^2$ et p→ 1 : $\dfrac{K_4.p^2}{(p+1)} = \alpha \rightarrow \dfrac{K_4}{2} = \alpha$

  Calcul de γ : On multiplie par (p + 1) et p→ −1 : $\dfrac{K_4.p^2}{(p-1)^2} = \gamma \rightarrow \dfrac{K_4}{4} = \gamma$

Calcul de β : On prend une valeur particulière pour p car on connait α et γ, on choisit ici par exemple p=0. → $0=\alpha-\beta+\gamma \rightarrow \beta=\alpha+\gamma \rightarrow \beta=\frac{3}{4}.K_4$

$$F_4(p)=\frac{K_4}{2}.\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{3.K_4}{4}.\frac{1}{(p-1)}+\frac{K_4}{4}.\frac{1}{(p+1)} \rightarrow f_4(t)=\frac{K_4}{2}.t.e^t+\frac{3.K_4}{4}.e^t+\frac{K_4}{4}.e^{-t}$$

- $F_5(p)=\dfrac{3p+1}{(p-1).(p^2+1)}$

On décompose en éléments simples : $F_5(p)=\dfrac{3p+1}{(p-1).(p^2+1)}=\dfrac{\alpha}{p-1}+\dfrac{\beta.p+\gamma}{p^2+1}$

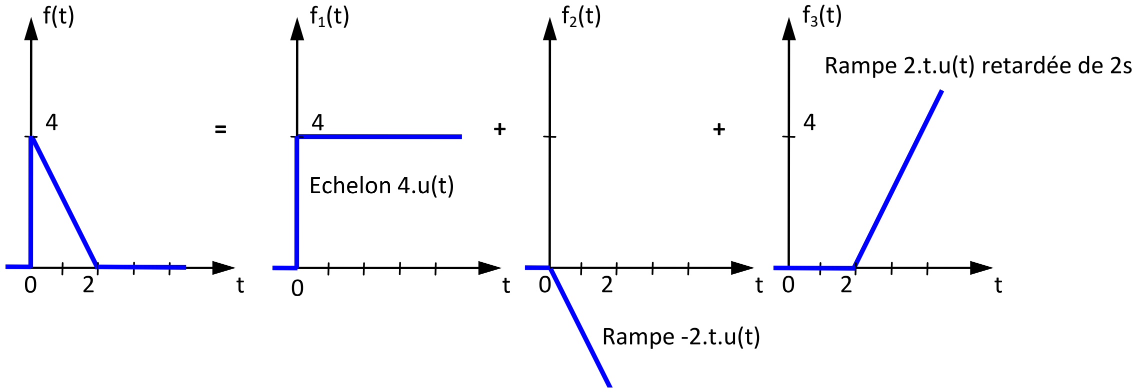
Calcul de α : On multiplie par (p – 1) et p→ 1 : $\dfrac{3p+1}{p^2+1}=\alpha \rightarrow 2=\alpha$

Calcul de β et γ: On identifie : $3p+1=\alpha.p^2+\alpha+\beta.p^2+\gamma.p-\beta.p-\gamma$

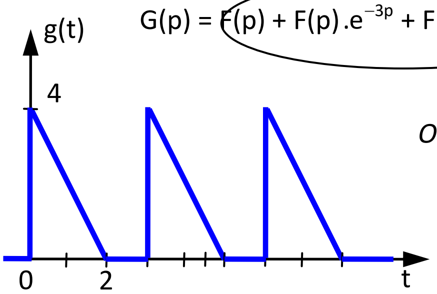
$\rightarrow \alpha+\beta=0$ soit $\beta=-2$ et $\gamma-\beta=3$ soit $\gamma=1$

$$F_5(p)=\frac{2}{p-1}+\frac{-2.p+1}{p^2+1}=\frac{2}{p-1}+\frac{-2.p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1} \rightarrow f_5(t)=2.e^t-2.\cos(t)+\sin(t)$$

Application du Thm du retard pour la modélisation de signaux - Corrigé



$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \rightarrow F(p) = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p) = \dfrac{4}{p}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{2}{p^2}.e^{-2p}$



$G(p) = F(p) + F(p).e^{-3p} + F(p).e^{-6p} + ...$ Soit $G(p) = F(p).\dfrac{1}{1-e^{-3p}}$ avec $F(p)=\dfrac{4}{p}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{2}{p^2}.e^{-2p}$

On fait une approximation linéaire en utilisant un développement limité d'ordre 1, ce qui permet d'écrire : $1 + e^{-3p} + e^{-6p} + ... = \dfrac{1}{1-e^{-3p}}$

$G(p) = F(p) + F(p).e^{-3p} + F(p).e^{-6p} + ...$ Soit $G(p) = F(p).\dfrac{1}{1-e^{-3p}}$ avec $F(p)=\dfrac{4}{p}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{2}{p^2}.e^{-2p}$

On peut résoudre le problème en remarquant que l'on a une suite géométrique de raison $r=e^{-3p}$:

$$S_n = F(p).\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ soit quand } n\rightarrow\infty : S_{n\rightarrow\infty}=F(p).\frac{1}{1-e^{-3p}}$$