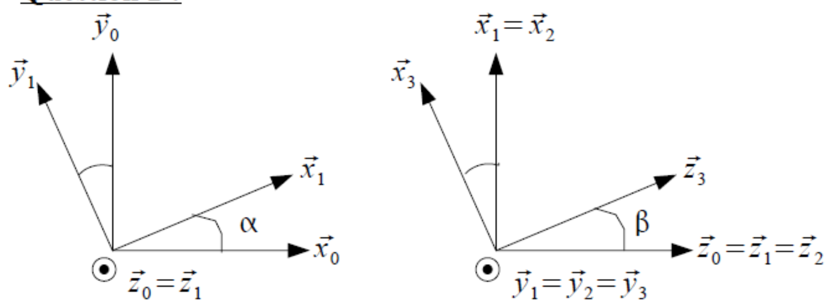
TD 18 – Manège Chenille
CORRIGE

Question 1 : S2 est en mouvement de translation par rapport à S1. Donc R2 = R1. Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{OB}=\lambda\,\vec{z}_0+(a+b)\,\vec{x}_1}$$

Question 2 :



Question 3 :

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}=\lambda\,\vec{z}_0+(a+b)\,\vec{x}_1+l\,\vec{x}_3$$

$$\vec{V}(G\in 3/0)=\left.\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}\right|_0=\dot{\lambda}\,\vec{z}_0+(a+b)\left.\frac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right|_0+l\left.\frac{d\,\vec{x}_3}{dt}\right|_0$$

Calculons $\left.\frac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right|_0=\left.\frac{d\,\vec{x}_1}{dt}\right|_1+\vec{\Omega}(1/0)\wedge\vec{x}_1=\vec{0}+\dot{\alpha}\,\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1=\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$ (dérivation vectorielle)

$$\left.\frac{d\,\vec{x}_3}{dt}\right|_0=\left.\frac{d\,\vec{x}_3}{dt}\right|_3+\vec{\Omega}(3/0)\wedge\vec{x}_3=\vec{0}+(\dot{\alpha}\,\vec{z}_0+\dot{\beta}\,\vec{y}_1)\wedge\vec{x}_3=\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{y}_1-\dot{\beta}\,\vec{z}_3$$

car $\vec{\Omega}(3/0)=\vec{\Omega}(3/2)+\vec{\Omega}(2/1)+\vec{\Omega}(1/0)$ (composition des vecteurs taux de rotation)

$\vec{\Omega}(3/0)=\dot{\beta}\,\vec{y}_1+\vec{0}+\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

Ainsi $\boxed{\vec{V}(G\in 3/0)=\dot{\lambda}\,\vec{z}_0+(a+b+l\cos\beta)\dot{\alpha}\,\vec{y}_1-l\dot{\beta}\,\vec{z}_3}$

Question 4 :

$$\vec{F}(passager\rightarrow siège).\vec{x}_3=-\,mg\,\vec{z}_0.\vec{x}_3-m\,\vec{\Gamma}(G\in 3/0).\vec{x}_3$$

Calculons chacun des termes

$$\boxed{-\,mg\,\vec{z}_0.\vec{x}_3=mg\sin\beta}$$

pour l'accélération, on peut calculer :

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{\Gamma}(G\in 3/0)=\left.\frac{d\,\vec{V}(G\in 3/0)}{dt}\right|_0=\\ \ddot{\lambda}.\vec{z}_1+(a+b+l\cos\beta)\ddot{\alpha}.\vec{y}_1-l\ddot{\beta}.\vec{z}_3-\dot{\alpha}^2(a+b+l\cos\beta).\vec{x}_1-l\dot{\beta}^2\vec{x}_3-l\dot{\beta}\sin\beta\,\dot{\alpha}.\vec{y}_1-l\dot{\beta}\sin\beta\,\dot{\alpha}.\vec{y}_3\end{array}}$$

ou on peut utiliser la formule suivante :

$$\vec{\Gamma}(G\in 3/0).\vec{x}_3=\left.\frac{d\,\vec{V}(G\in 3/0)}{dt}\right|_0.\vec{x}_3=\left.\frac{d(\vec{V}(G\in 3/0).\vec{x}_3)}{dt}\right|_0-\vec{V}(G\in 3/0).\left.\frac{d\,\vec{x}_3}{dt}\right|_0$$

Or $\vec{V}(G\in 3/0).\vec{x}_3=-\,\dot{\lambda}\sin\beta$ d'où $\left.\frac{d(\vec{V}(G\in 3/0).\vec{x}_3)}{dt}\right|_0=-\,\ddot{\lambda}\sin\beta-\dot{\lambda}\dot{\beta}\cos\beta$

Et $\left.\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right|_3 + \vec{\Omega}(3/0)\wedge\vec{x}_3 = \vec{0} + (\dot\alpha\vec{z}_0 + \dot\beta\,\vec{y}_1)\wedge\vec{x}_3 = \dot\alpha\cos\beta\,\vec{y}_1 - \dot\beta\,\vec{z}_3$

Ainsi $\vec V(G\in 3/0)\cdot\left.\frac{d\vec x_3}{dt}\right|_0 = \left(\dot\lambda\,\vec z_0 + (a+b+l\cos\beta)\,\dot\alpha\,\vec y_1 - l\,\dot\beta\,\vec z_3\right)\cdot\left(\dot\alpha\cos\beta\,\vec y_1 - \dot\beta\,\vec z_3\right)=$

$-\dot\lambda\dot\beta\cos\beta + \dot\alpha^2\cos\beta\,(a+b+l\cos\beta) + l\dot\beta^2$

On a donc en réunissant les différents termes :

$$\boxed{\vec\Gamma(G\in 3/0)\cdot\vec x_3 = -\ddot\lambda\sin\beta - \dot\lambda\dot\beta\cos\beta + \dot\lambda\dot\beta\cos\beta - \dot\alpha^2\cos\beta(a+b+l\cos\beta) - l\dot\beta^2 = -\ddot\lambda\sin\beta - \dot\alpha^2\cos\beta(a+b+l\cos\beta) - l\dot\beta^2}$$

La force recherchée vaut donc :

$$\boxed{\vec F(passager\rightarrow siège)\cdot\vec x_3 = mg\sin\beta + m\left(\ddot\lambda\sin\beta + \dot\alpha^2\cos\beta\,(a+b+l\cos\beta) + l\,\dot\beta^2\right)}$$

Question 5 : *Application numérique :*

Dans ces conditions, la force est égale à $\vec F(passager\rightarrow siège)\cdot\vec x_3 = m(g+\ddot\lambda)$

L'accélération équivalente ressentie par le passager est donc $g+\ddot\lambda$ soit $\boxed{9{,}8+1{,}6=11{,}4\ m\cdot s^{-2}}$ inférieur au 2g (20 m/s²) **Donc le CdC est respecté.**

On peut remarqué que ce n'est pas beaucoup pour un manège de fête foraine. Certains manèges peuvent aller jusqu'à 3g.

Question 6 : Accélaration relative

$$\vec\Gamma(G\in 3/1) = \left.\frac{d\vec V(G\in 3/1)}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d^2(\lambda\vec z_1 + (a+b)\vec x_1 + l\vec x_3)}{dt^2}\right|_1 = \ddot\lambda\,\vec z_1 + l\left.\frac{d^2\vec x_3}{dt^2}\right|_1$$

$$\left.\frac{d\vec x_3}{dt}\right|_1 = \left.\frac{d\vec x_3}{dt}\right|_3 + \vec\Omega(3/1)\wedge\vec x_3 = \dot\beta\,\vec y_1\wedge\vec x_3 = -\dot\beta\,\vec z_3 \quad \text{et}$$

$$\left.\frac{d(-\dot\beta\,\vec z_3)}{dt}\right|_1 = -\ddot\beta\,\vec z_3 - \dot\beta\,\vec\Omega(3/1)\wedge\vec z_3 = -\ddot\beta\,\vec z_3 - \dot\beta^2\,\vec y_1\wedge\vec z_3 = -\ddot\beta\,\vec z_3 - \dot\beta^2\,\vec x_3$$

donc

$$\boxed{\vec\Gamma(G\in 3/1) = \ddot\lambda\,\vec z_1 - l(\ddot\beta\,\vec z_3 + \dot\beta^2\,\vec x_3)}$$

Question 7 :

on utilise la composition des vitesses pour le mouvement de rotation de 1/0

$$\vec\Gamma(G\in 1/0) = \left.\frac{d\vec V(G\in 1/0)}{dt}\right|_0 \quad \text{avec}$$

$$\vec V(G\in 1/0) = \vec{GO}\wedge\vec\Omega(1/0) = -(\lambda\vec z_1 + (a+b)\vec x_1 + l\vec x_3)\wedge\dot\alpha\,\vec z_1 = (a+b)\dot\alpha\,\vec y_1 + l\,\dot\alpha\cos\beta\,\vec y_3$$

donc

$$\boxed{\vec\Gamma(G\in 1/0) = \left.\frac{d((a+b)\dot\alpha\,\vec y_1 + l\,\dot\alpha\cos\beta\,\vec y_3)}{dt}\right|_0 = (a+b)\ddot\alpha\,\vec y_1 - (a+b)\dot\alpha^2\,\vec x_1 + l\,\ddot\alpha\cos\beta\,\vec y_3 - l\,\dot\alpha^2\cos\beta\,\vec x_1}$$

Attention à ne pas dériver $\cos\beta$ car $\beta = cste$

Question 8 :

$$\boxed{\vec\Gamma(coriolis) = 2\,\vec\Omega(1/0)\wedge\vec V_{G,3/1} = 2\dot\alpha\,\vec z_1\wedge(\dot\lambda\,\vec z_1 - l\,\dot\beta\,\vec z_3) = -2l\,\dot\alpha\dot\beta\sin\beta\,\vec y_3}$$

Or

$$\vec\Gamma(G\in 3/0) = \ddot\lambda\,\vec z_1 + (a+b+l\cos\beta)\ddot\alpha\,\vec y_1 - l\ddot\beta\,\vec z_3 - \dot\alpha^2(a+b+l\cos\beta)\,\vec x_1 - l\dot\beta^2\,\vec x_3 - l\dot\beta\sin\beta\,\dot\alpha\,\vec y_1 - l\dot\beta\sin\beta\,\dot\alpha\,\vec y_1$$

Question 9 :

Question 10 :

Question 11 :

Question 12 :

Sur l'intervalle $[0,t_0]$, $\dot\alpha=\dfrac{\omega_0}{t_0}t$ *dont* $\ddot\alpha=\dfrac{\omega_0}{t_0}$ *et* $\boxed{\alpha=\dfrac{\omega_0}{2t_0}t^2+0}$ *(parabole)*

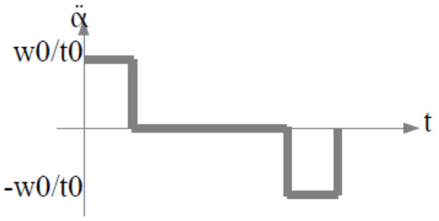
Pour $t=t_0$ *on a alors* $\alpha(t_0)=t_0\dfrac{\omega_0}{2}$

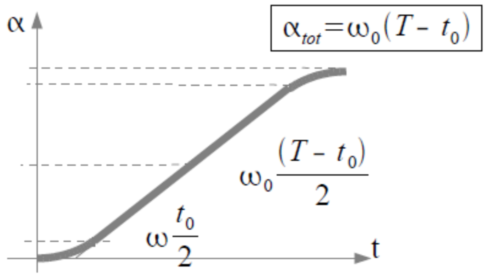
Sur l'intervalle $[t_0,T-t_0]$, $\dot\alpha=\omega_0$ *, donc* $\ddot\alpha=0$ *et* $\boxed{\alpha=\omega_0(t-t_0)+\dfrac{t_0\omega_0}{2}}$ *(continuité en* t_0*)*

Ainsi pour t=T/2, on obtient : $\alpha(T/2)=\omega_0\dfrac{(T-t_0)}{2}$

Il n'est pas nécessaire de déterminer la courbe au delà de T/2, car compte tenu de la symétrie de la courbe de vitesse, la courbe de position angulaire est symétrique par rapport au point de coordonnées $(T/2;\alpha(T/2))$ *. Compte tenu de la continuité de la dérivée, la courbe de position possède une inflexion au point* t_0

Les courbes obtenues sont les suivantes :





Question 13 :

L'aire sous la courbe de vitesse angulaire représente l'angle total parcouru pendant le temps T. Donc

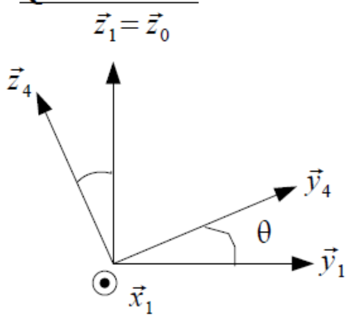
$\alpha_{TOT}=2\cdot\omega_0\dfrac{t_0}{2}+(T-2t_0)\omega_0=(T-t_0)\omega_0$

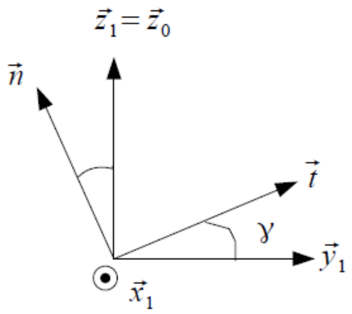
Avec $t_0=1\ minute$ et $T=5\ minutes$, on obtient $\boxed{\alpha_{TOT}=14*(5-1)=56\,trs}$

Question 14 :

$V(1/0)=\begin{Bmatrix}\dot\alpha\vec z_0\\ \vec 0\end{Bmatrix}_O$ $V(2/1)=\begin{Bmatrix}\vec 0\\ \dot\lambda\vec z_0\end{Bmatrix}_A$ $V(4/2)=\begin{Bmatrix}\dot\theta\vec x_1\\ \vec 0\end{Bmatrix}_A$

Question 15 :





$\boxed{\vec V(I\in 4/2)=\vec V(A\in 4/2)+\vec{IA}\wedge\dot\theta\vec x_1=\vec 0+R\vec n\wedge\dot\theta\vec x_1=R\dot\theta\vec t}$

Question 16 :

$\vec V(I\in 2/0)=\vec V(I\in 2/1)+\vec V(I\in 1/0)$

$\vec V(I\in 2/1)=\vec V(A\in 2/1)=\dot\lambda\vec z_0$

$\vec V(I\in 1/0)=\vec V(O\in 1/0)+\vec{IO}\wedge\dot\alpha\vec z_0=\vec 0+(\vec{IA}+\vec{AO})\wedge\dot\alpha\vec z_0$

$\vec V(I\in 1/0)=(R\vec n-L\vec x_1-\lambda\vec z_0)\wedge\dot\alpha\vec z_0=-R\sin\gamma\dot\alpha\vec x_1+L\dot\alpha\vec y_1$

d'où $\boxed{\vec V(I\in 2/0)=\dot\lambda\vec z_0-R\sin\gamma\dot\alpha\vec x_1+L\dot\alpha\vec y_1}$

Question 17 :

La vitesse de glissement est $\vec{V}(I \in 4/0) = \vec{V}(I \in 4/2) + \vec{V}(I \in 2/0)$

$\boxed{\vec{V}(I \in 4/0) = R\dot{\theta}\vec{t} + \dot{\lambda}\vec{z}_0 - R\sin\gamma\dot{\alpha}\vec{x}_1 + L\dot{\alpha}\vec{y}_1}$

Question 18 :

On sait que $\boxed{\vec{V}(I \in 4/0).\vec{n} = 0}$ car il n'y a ni pénétration ni décollement.

Question 19 :

Ainsi $\vec{V}(I \in 4/0).\vec{n} = \dot{\lambda}\cos\gamma - L\dot{\alpha}\sin\gamma = 0$ d'où $\boxed{\dot{\lambda} = L\dot{\alpha}\tan(\gamma)}$

Question 20 :

$$\boxed{\vec{V}(I \in 4/0) = \vec{0} \rightarrow R\dot{\theta}\vec{t} + \dot{\lambda}\vec{z}_0 - R\sin\gamma\dot{\alpha}\vec{x}_1 + L\dot{\alpha}\vec{y}_1 = \vec{0} \rightarrow \begin{array}{c} R\sin\gamma\dot{\alpha} = 0 \\ L\dot{\alpha} + R\dot{\theta}\cos\gamma = 0 \\ \dot{\lambda} + R\dot{\theta}\sin\gamma = 0 \end{array}}$$

On ne peut pas avoir roulement sans glissement au point I car il y a une composante selon $\vec{x}_1$ qui ne peut pas s'annuler si $\gamma \neq 0$.

Un cas particulier serait une piste plate telle que $\boxed{\gamma = 0}$. La condition de roulement sans glissement se traduirait par une équation reliant $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$ mais il n'y aurait pas de mouvement vertical. On retrouve un mouvement typique de centrifugeuse humaine.

Question 21 :

grace aux deux autres équations en utilisant $\boxed{L.\dot{\alpha} = -R\dot{\theta}(\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2)}$

d'où $\boxed{L.\dot{\alpha} = -R\dot{\theta}}$

Question 22 :

La trajectoire décrite par le point A est le profil sinusoïdal car le point A « suit » la piste. Sa vitesse est donc tangente à la trajectoire et vaut selon l'axe $\vec{z}_0$ $\vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(I \in 2/0)$

$\boxed{\vec{V}(A \in 2/0).\vec{z}_0 = -z_0\dot{\alpha}\sin\alpha}$