Manège de fête foraine : « La chenille » améliorée

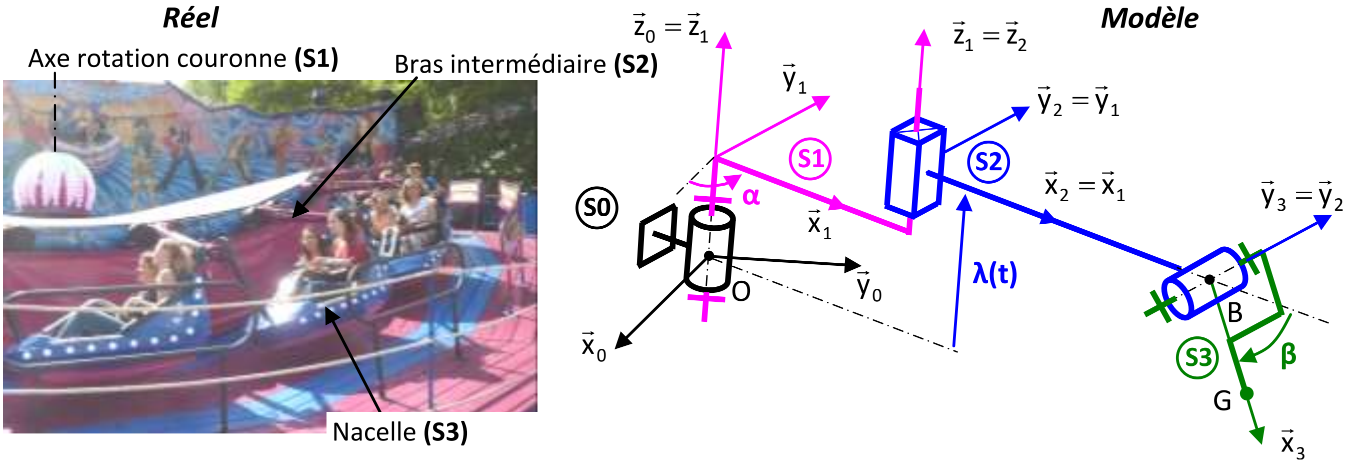
On s'intéresse dans ce problème à un manège rencontré dans les fêtes foraines, inspiré du manège communément appelé « la chenille » et qui est une version améliorée pour plus de sensations fortes.

Ce type d'attraction permet de procurer des sensations importantes aux passagers, à la fois en marche avant et en arrière par un mouvement de « brassage ». L'ensemble tourne à une vitesse maximale de 14 tours/min. Les voitures sont suspendues par le haut et peuvent basculer de gauche à droite à chaque dos d'âne. Au plus haut de ces bosses, les nacelles se retournent quasiment « à l'envers ».

Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit respecter les exigences techniques suivantes	… Valeur maximale l'accélération reçue par un passager d'une masse de 70 kg pour un angle $\beta = cte = \pi/2$ et une accélération radiale $\ddot{\lambda} = 1{,}6 m/s^2$. …	… 2g maximum

1. Mouvement des nacelles

Dans un premier temps, on s'intéresse au mouvement de la nacelle (S3) du manège dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modélisation cinématique.



On considère que le système est constitué de quatre sous ensembles nommés (S0), (S1), (S2) et (S3) pour lesquels on associe un repère Ri. Chaque repère Ri possède la base notée $b_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Le solide (S1) qui correspond à la couronne centrale du manège est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti (S0). On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Le bras intermédiaire (S2) est en liaison glissière de direction $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$ avec la couronne centrale (S1).

Enfin la nacelle (S3) est en liaison pivot d'axe $(B, \vec{y}_1)$ avec le bras (S2). On pose $\beta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$; $\overrightarrow{OB} = \lambda(t).\vec{z}_0 + a.\vec{x}_1 + b.\vec{x}_2$ et $\overrightarrow{BG} = l.\vec{x}_3$. G correspond au centre de gravité de la nacelle (S3).

Q1. Que peut-on dire de la base b_1 par rapport à la base b_2 compte tenu de la liaison entre (S2) et (S1). Donner alors l'expression simplifiée de $\overrightarrow{OB}$ dans la base b_1 uniquement.

Q2. Tracer les figures géométrales (ou figures de calcul planes) représentant les angles α et β.

Q3. Calculer, par la méthode de votre choix, le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{G,S3/S0}}$.

On s'intéresse désormais à un passager P installé dans une nacelle (S3). Le théorème de la résultante dynamique (issu de l'écriture du principe fondamental de la dynamique pour les solides) appliqué au passager seul conduit à écrire dans le référentiel galiléen lié au solide (S0) l'équation suivante :

$$m.\overrightarrow{\Gamma_{G,passager/S0}} = -m.g.\vec{z}_0 + \overrightarrow{F_{S3\rightarrow passager}}$$

Où :

- $\overrightarrow{\Gamma_{G,passager/S0}}$ est l'accélération du centre d'inertie G du passager dans son mouvement par rapport à S0. On considèrera ici pour simplifier que le centre d'inertie du passager est confondu avec le centre de gravité de la nacelle S3 par conséquent $\overrightarrow{\Gamma_{G,passager/S0}} = \overrightarrow{\Gamma_{G,S3/S0}}$.
- $\overrightarrow{F_{S3\rightarrow passager}}$ est l'action mécanique correspondant à la force de réaction exercée par la nacelle sur le passager.
- m est la masse du passager en kg.
- g l'accélération de la pesanteur (en m/s²).

Par conséquent la « force ressentie » par le passager sur son siège s'écrit : $\overrightarrow{F_{passager\rightarrow S3}} = -m.(\overrightarrow{\Gamma_{G,S3/S0}} + .g.\vec{z}_0)$
La composante de cette « force ressentie » selon l'axe de la colonne vertébrale du passager permet de caractériser l'accélération équivalente ressenti par celui-ci.

Q4. Calculer la projection de cette force selon l'axe $\vec{x}_3$, soit $\overrightarrow{F_{passager\rightarrow nacelle}}.\vec{x}_3$.

Pour faire l'application numérique de la projection $\overrightarrow{F_{passager\rightarrow nacelle}}.\vec{x}_3$ et connaître le nombre de « g » ressenti par le passager à tout instant, il est normalement nécessaire de connaître l'évolution des paramètres α, β et λ en fonction du temps.

Q5. Pour la configuration correspondant à celle définie dans l'exigence du cahier des charges, déterminer l'accélération équivalente « ressentie » par le passager et commenter la valeur obtenue.

Q6. Calculer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G,3/1}}$, vecteur accélération relative

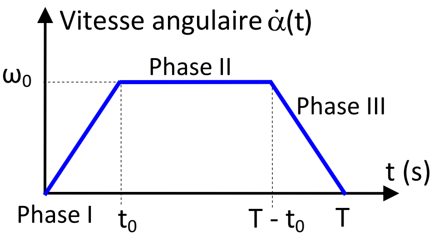
Q7. Calculer l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G,1/0}}$, vecteur accélération d'entrainement. ***Attention, ici l'angle β doit être considéré constant.***

Pour un solide S en mouvement par rapport au repère R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère R, on rappelle que pour tout point M ∈ S on a $\overrightarrow{\Gamma_{M,S/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{M,S/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{M,R_1/R}} + \overrightarrow{\Gamma_{Coriolis}}$ avec $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$, vecteur accélération absolue, $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_1}}$, vecteur accélération relative, $\overrightarrow{\Gamma_{M\in R_1/R}}$, vecteur accélération d'entrainement et $\overrightarrow{\Gamma_{Coriolis}} = 2.\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_1}}$, vecteur accélération de Coriolis.

Q8. A partir des termes calculés questions précédentes, redémontrer la formule donnant l'accélération absolue pour le point G appartenant au solide S3.

Calculer notamment l'accélération de Coriolis pour justifier votre raisonnement.

La vitesse angulaire du manège est pilotée à l'aide d'une loi en trapèze de vitesse suivante :



Q9. Pour la phase I du mouvement en trapèze de vitesse, déterminer l'expression de l'accélération $\ddot{\alpha}(t)$ et de la position $\alpha(t)$. Pour t = t_0, donner l'expression du déplacement obtenu, noté $\alpha(t = t_0)$, en fonction de ω_0 et t_0. Compléter pour la phase I les tracés en position et accélération du document réponse 1.

Q10. Pour la phase II du mouvement en trapèze de vitesse, déterminer l'expression de l'accélération $\ddot{\alpha}(t)$ et de la position $\alpha(t)$. Pour t = T - t_0, donner l'expression du déplacement obtenu, noté $\alpha(t = T - t_0)$, en fonction de ω_0 , T et t_0. Compléter pour la phase II les tracés en position et accélération sur document réponse 1.

Q11. Déduire des questions précédentes l'expression de la position $\alpha(t = T)$ en fonction de ω_0 , T et t_0.

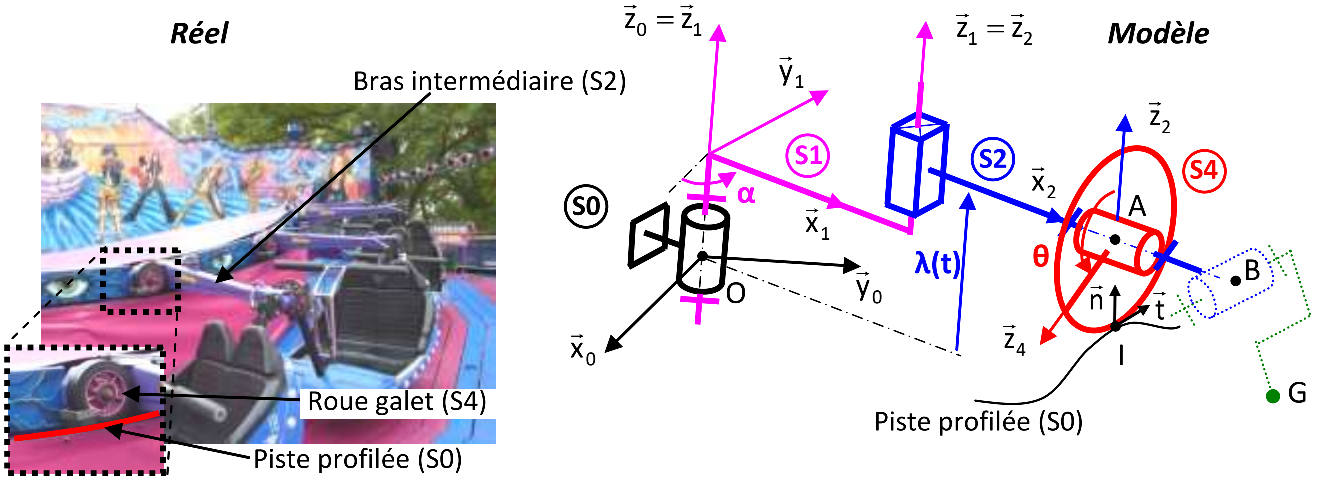
Q12. Compléter pour la phase III les tracés en position et accélération sur document réponse 1.

La durée de l'attraction est *T* = 5 minutes. Les phases d'accélération/décélération durent t_0 = 1 minute.

Q13. En supposant que le manège tourne à la vitesse ω_0 =14 tours/min, combien de tours les passagers effectueront ils sur les 5min ?

2. Commande d'élévation du manège.

On s'intéresse maintenant au lien entre la translation verticale λ(t) et la rotation du manège α. La translation verticale du bras intermédiaire (S2) est en fait obtenue par l'intermédiaire de roues qui roulent sur une piste profilée fixe et liée au solide (S0). On donne sur la figure suivante, le modèle cinématique correspondant :



La roue (S4) est en liaison pivot autour de l'axe $(A,\vec{x}_2)$ avec le bras (S2) et roule sur la piste au point de contact noté I. On note $\theta=(\vec{z}_2,\vec{z}_4)=(\vec{y}_2,\vec{y}_4)$ l'angle de rotation de la roue.

On pose $\vec{n}$ la normale à la surface de contact et $\vec{t}$ la tangente au contact. On note $\gamma=(\vec{z}_1,\vec{n})=(\vec{y}_1,\vec{t})$ l'angle entre la normale au contact et la verticale.

On pose également $\overrightarrow{OA}=\lambda(t).\vec{z}_0+L.\vec{x}_1$ et $\overrightarrow{IA}=R.\vec{n}$.

Q14. Déterminer les torseurs cinématiques $\{V_{S1/S0}\}$, $\{V_{S2/S1}\}$ et $\{V_{S4/S2}\}$ respectivement aux points 0, A et A.

Q15. Calculer la vitesse $\overrightarrow{V_{I,4/2}}$.

Q16. Déterminer l'expression de la vitesse $\overrightarrow{V_{I,2/0}}$ en fonction de $\dot{\lambda}(t)$, R, $\dot{\alpha}$, γ et L.

Q17. Définir et déterminer la vitesse de glissement au point de contact I entre la roue galet (S4) et la piste profilée liée au bâti (S0).

*Q18. Quelle relation a-t-on nécessairement sur cette vitesse de glissement si on considère qu'il n'y a **pas de décollement** entre la roue galet (S4) et la piste profilée (S0) ?*

Q19. En déduire de cette condition de non décollement que $\dot{\lambda}=L\dot{\alpha}.\tan\gamma$.

Q20. Peut-on avoir roulement sans glissement au point I ? Donner un cas particulier pour la forme de la piste qui permet d'utiliser cette hypothèse puis commenter le mouvement du manège dans ce cas particulier.

Q21. En utilisant les équations restantes, et dans ce cas particulier, trouver une relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\alpha}$.

Q22. La piste possède un profil sinusoïdal défini par $\overrightarrow{OI}=L.\vec{x}_1+z_0.\cos\alpha.\vec{z}_1+e.\vec{y}_1$. Quelle est dans ce cas la trajectoire du point A (point au centre de la roue) ? En déduire l'expression en fonction de z_0, $\dot{\alpha}$ et α de la projection sur la direction $\vec{z}_0$ de la vitesse $\overrightarrow{V_{A,2/0}}$.

Document réponse :