Feuille de TD n°6
Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

1 **Relation fonctionnelle :**
Simplifier les écritures suivantes :

1. $e^6 \times e^{-4}$
2. $\dfrac{e^3}{e}$
3. $\left(e^{-4}\right)^3$
4. $\dfrac{3e^5}{e \times e^2}$
5. $\dfrac{e^{-4}}{e^{-1}}$
6. $\left(e^{-5}\right)^6$
7. $\dfrac{5e^{-7}}{e^2}$
8. $e^{-3x} \times e^{2x}$
9. $e^{2x-1} \times e^{-3x+2}$
10. $\dfrac{e^{5x}}{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-3x^2+x+1}}{e^{x+1}}$
12. $e^{-5x} \times e^{5x+1}$
13. $e^{-3x} \times e^{-3x-1}$
14. $\dfrac{e^{-2x}}{e^{4x+2}}$
15. $\dfrac{e^{x^2-2x+1}}{e^{x^2+1}}$

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{-x}$.

1. Calculer $f(0)$
2. Montrer que f est paire.
3. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f.
4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$.

3

1. Développer l'expression $\left(e^x + e^{-x}\right) \times \left(e^x - e^{-x}\right)$
2. Simplifier l'expression $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

4 **Équations avec** $\exp$.
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-4x+2} = 1$
2. $e^{-x+3} = e^{x+5}$
3. $\dfrac{e^{2x-2}}{e^{-x+1}} = 0$

5 **Équations avec changement d'inconnue :**
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} + e^x + 3 = 0$
2. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
3. $-3e^{2x} - 9e^x + 12 = 0$

6 **Inéquations :**
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x+1} > 1$
2. $e^{-2x+1} \leqslant e^x$
3. $e^{x^2+1} \geqslant e^{x-2}$
4. $\dfrac{x^2+x-2}{e^{2x}-1} > 0$

7 Calculs de dérivées :
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$
3. $f(x) = e^{x^2+x}$
4. $f(x) = xe^{x+1}$
5. $f(x) = e^{x^2+1}$
6. $f(x) = \left(x^2+1\right)e^{3x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$
8. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$
9. $f(x) = e^{4x+1}$
10. $f(x) = e^x + x^2 + 1$
11. $f(x) = 5e^x + 5xe^x$
12. $f(x) = e^x \sin x$
13. $f(x) = \dfrac{3x+1-e^x}{e^x}$
14. $f(x) = e^{-x} + x^{-1}$

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x} + 3x - 2$

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$ (parité, variations, limites).
2. En déduire qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0;1[$.
3. Donner une approximation de cette solution à 10^{-3} près.

9 **Partie 1.**
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$

Partie 2.
On considère la fonction f définie sur $[-3;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 3$, $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$ En déduire le sens de variation de f sur $[-3;+\infty[$.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser son tableau de variation sur $[-3;+\infty[$.

2 Fonction logarithme népérien

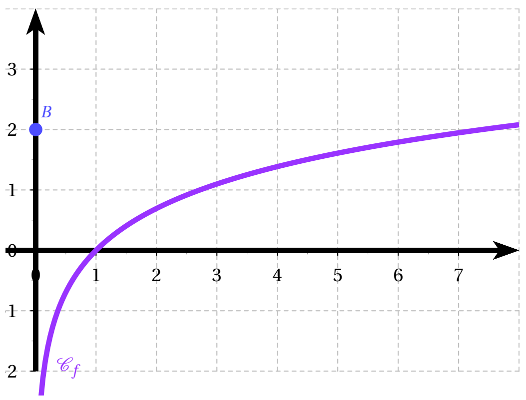
10 Calculer

1. $A = \frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) - 4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$
2. $B = \ln\left(7+5\sqrt{2}\right) + 8\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 7\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$

11 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$
2. $\ln\left(x^2+5x+6\right) = \ln(x+11)$
3. $\ln(-x-2) = \ln\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$
4. $\ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$
5. $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x+1| = 0$
6. $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$
7. $(x^x)^x = x^{(x^x)}$
8. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

12 Dans le repère orthonormé suivant, on a le point $B(0;2)$ et $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction ln.



Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point B ?

13 Résoudre les équations et inéquations.

1. $\ln x = -1$
2. $e^{2x} = -1$
3. $\ln(4-2x) > 1$
4. $e^{x+1} \geqslant 2$
5. $\ln(5x-1) = 2$
6. $e^{-x} = 5$
7. $\ln(3x-1) < 0$
8. $e^{5-x} \leqslant 2$

14 Même consigne, attention aux ensembles de définition

1. $\ln(x+1) = \ln(-x)$
2. $\ln(x^2-1) \leqslant \ln 5$
3. $\ln(x^2-x+1) = \ln 2$
4. $\ln(2x) > \ln(x^2-2x+1)$

15 Résoudre les équations/inéquations suivantes, attention au domaine de définition

1. $\ln(3x-6) = \ln(4-x)$
2. $\ln(2x) - \ln(x+1) = \ln(x-5)$
3. $\ln(2x-1) = 2\ln x$
4. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(4-2x)$
5. $\ln(4x-2) + \ln(5) < 1 - \ln 2$
6. $\ln(5-x) \geqslant \ln(x-1)$
7. $\ln(x^2-4x+4) - \ln(x-2) < \ln(8-x)$
8. $\ln(2x+4) + \ln(1-x) - \ln 2 \geqslant \ln(-x)$

16 Résoudre les équations/inéquations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

1. $\ln((x-3)(2x+1)) = \ln 4$
2. $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = \ln 4$
3. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln 3 + \ln 2$
4. $2\ln(x+2) = \ln(-x)$
5. $(\ln(x))^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{4}$
6. $\ln(-2x+3) - \ln(x+1) = 1$

17 **calculs de dérivées** Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2^x$ et de la fonction $g : x \mapsto x^x$.

18 ** Soit la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$.
Montrer que f admet un maximum de $\frac{1}{2}$ sur l'intervalle de définition.

19 Donner la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Soit un nombre $x > 0$.
   On a $\ln(1+x) - \ln(x) = \ldots$
   (a) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$;
   (b) $\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$;
   (c) 0.
2. Pour tout nombre réel x, $\ln\left(\frac{e^x}{2}\right) - \ln\left(e^{x-3}\right) = \ldots$
   (a) $-3-\ln 2$;
   (b) $3-\ln 2$;
   (c) $-3+\ln 2$.
3. La suite définie par $u_n = \ln(5\times 3^n)$ est une suite
   (a) géométrique de raison $\ln 3$ et de premier terme $\ln 5$;
   (b) arithmétique de raison $\ln 3$ et de premier terme $\ln 5$;
   (c) arithmétique de raison $\ln 3$ et de premier terme 0.

20 **Déterminer un seuil :**

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{N}$:

1. $\left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$

2. $3^{2n} > 10^8$

21 **Application :** Iwao souhaite placer son argent sur un compte épargne rémunéré à 3% par an.

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer au bout de combien d'années de placement son capital initial aura doublé.
2. Retrouver le résultat de l'algorithme par le calcul.

22 **Série harmonique : un exemple de série divergente.**
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. (a) Écrire un algorithme permettant de calculer la valeur u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.
   (b) Utiliser cet algorithme programmé sur calculatrice ou ordinateur pour déterminer u_{20}, u_{100} et u_{500}.
   La suite semble-t-elle converger ?
2. (a) Démontrer que pour tout nombre $x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

23 **Autour de la notion d'équivalent + taux intérêts**

1. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(1+x) - x$$
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g.
   En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) \leqslant 0$.
   (b) Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0; +\infty[$, $|g(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in]0; 0,14[$, on a
$$\ln(1+x) \approx x$$
   avec une erreur inférieure ou égale à 0,01.
2. Un banquier explique la « règle des 70 » à un client : « *Si vous placez un capital sur un compte épargne dont le taux d'intérêt est t% , alors votre capital aura doublé en* $\dfrac{70}{t}$ *ans. Par exemple, si vous placez votre argent à 7%, vous doublez le capital en 10 ans.* » .
   Justifier la règle de 70.
3. Énoncer la règle des 110 et des 231.

24 Résoudre l'inéquation suivante :
$$1 + \ln(x+3) > \ln\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

25 Résoudre dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ le système :
$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 50 \\ \ln x + \ln y & = & \ln 7 \end{array}\right.$$

26 Base a
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\log_2(2x) > 1 + \log_8(3x+2)$

27 Résoudre dans $\left(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\right)^2$ le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} 4(\log_x(y) + \log_y(x)) & = & 17 \\ xy & = & 243 \end{array}\right.$$

28 Comparer 2024^{2025} et 2025^2024.

3 Fonctions trigonométriques

29 Étudier parité et périodicité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$
2. $f_2(x) = \sin x \cos x$
3. $f_3(x) = 1 + 5\cos^2 x$
4. $f_4(x) = 7\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

30 Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3\sin x + x^2 \cos x$
2. $f_2(x) = 2\cos x + x$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
5. $f_5(x) = 5x \sin x$
6. $f_6(x) = \cos^4 x$
7. $f_7(x) = -3\cos(3x)$
8. $f_8(x) = \cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
9. $f_9(x) = -\sin\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $f_{10}(x) = \sin(2x) - \cos(3x)$
11. $f_{11}(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
12. $f_{12}(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$
13. $f_{13}(x) = 3\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $f_{14}(x) = \tan(2x)$
15. $f_{15}(x) = x\tan(x)$

4 Études de fonctions

31 Étudier la convexité de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)-1}$.

32 La fonction f est définie par

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+4}-x\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé du plan admet le point $I(0;\ln 2)$ comme centre de symétrie.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations complet.
4. Étudier la convexité de f.

33

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction $f: x\mapsto \ln|\ln x|$.
   On précisera l'ensemble de définition, l'étude des branches infinies, les coordonnées du point d'inflexion I et le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.
2. *Application* : l'équation $\ln|\ln x| = m$ admet-elle deux solutions x_1 et x_2, quel que soit m ? Quand elles existent, montrer que leur produit est une constante que l'on déterminera.

34 On définit une application f de l'intervalle $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x)=x\sqrt{-\ln x}$ pour $x>0$ et $f(0)=0$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Montrer que $\forall x\in]0;1]$, $-\ln x\geqslant 1-x$, étudier à partir de là la dérivabilité de f en 1.
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

35

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(t)=\frac{2t}{1+t}-\ln(1+t).$$

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que l'équation $g(t)=0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right).$$

1. Vérifier que $f'(x)$ possède le même signe que $g\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$. En déduire le sens de variations de f.
   Montrer que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

36 $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la famille des fonctions f_n définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x) & \text{si } x>0\\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la représentation graphique de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue en 0.
   (b) Discuter, selon les valeurs de n la dérivabilité de f_n en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
2. (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de l'expression $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ et préciser les valeurs de x pour lesquelles elle s'annule.
   (b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$ et montrer que toutes les courbes passent par trois points fixes dont on précisera les coordonnées.
3. (a) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation.
   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer, en fonction de n une équation de la tangente à $\mathscr{C}_n$ aux points d'abscisses 1 et e.
   (c) Construire sur le même graphique les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

37

1. Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(u)=u-(1+u)\ln(1+u)$.
   Montrer que pour tout $u>0$, $\varphi(u)<0$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} & \text{pour } x\neq 0\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

   Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le sens de variation de f.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

38 Étudier les variations de la fonction f telle que $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{-x}\right)$.
Montrer que la courbe représentative de f, Γ admet un axe de symétrie et deux asymptotes obliques que l'on déterminera.

39

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} & \text{si } x\neq 0 \text{ et } x\neq 1\\ f(0) = 1\\ f(1) = 0 \end{cases}$$

   (a) Étudier la continuité de f en 0 et en 1.
   (b) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}\ :\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}.$$

(c) Étudier les variations de f et dresser le tableau de ces variations.

(d) Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormal.

2. À l'aide de la question précédente, représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormal l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\ln|x|\times\ln|y|=1$

40 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction g_n définie sur $]0;+\infty[$ par $g_n(x)=x-n+\dfrac{n}{2}\ln x$.

1. Étudier les variations de g_n.
   Déterminer les limites de g_n en 0 et $+\infty$.
2. (a) En déduire l'existence d'un réel α_n unique tel que $g_n(\alpha_n)=0$.
   (b) Montrer que $1\leqslant\alpha_n\leqslant e^2$.
   (c) Démontrer que $\ln(\alpha_n)=2-\dfrac{2}{n}\alpha_n$. Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de α_n et de n. En déduire que $\alpha_{n+1}-\alpha_n$.
3. (a) Montrer que la suite (α_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   (b) En utilisant la question 2.c, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(\alpha_n)$ et en déduire ℓ.

41 Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

5 Avec des suites

42 Variations et limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

43

1. Montrer que pour tout réel $x\geqslant 0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x$
2. En déduire la limite de la suite (u_n) de terme général :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(1+\frac{n}{n^2}\right).$$

44 Soit (u_n) la suite $u_n=\sqrt[n]{n}$.

1. Étudier la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer le plus grand terme de la suite (u_n).

45

1. Démontrer que :

$$\forall x\in[1;+\infty[,\quad \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\geqslant-\frac{1}{x}$$

On pourra utiliser les variations d'une fonction.

2. Soit φ définie sur $I=[e;+\infty[$ par

$$\varphi(x)=(x+1)^2\ln x-x^2\ln(x+1).$$

   (a) Vérifier que la fonction φ est dérivable sur I et démontrer que $\forall x\in I$:

$$\varphi'(x)=2x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+2\ln x+\frac{(x+1)^3-x^3}{x(x+1)}$$

   (b) En déduire que φ est croissante sur I.
3. Pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$, a-t-on :

$$n^{(n+1)^2}\geqslant(n+1)^{n^2}$$

Feuille de TD n°6
Réponses ou Solutions

1 Fonction exponentielle

$\boxed{\mathbf{2}}$

1. $f(0) = 1 + 1 = 2$
2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
4. En factorisant par e^{-x}.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $e^{2x} - e^{-2x}$, 1

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\frac{1}{2}$, -1, $\varnothing$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0\}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $]-1;+\infty[$, $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$, $\mathbb{R}$, $]-2;0[\cup]1;+\infty[$

$\boxed{\mathbf{8}}$ dérivée : $-3(e^{-3x} - 1)$, s'annule en 0. TVI.

2 Fonction logarithme népérien

$\boxed{\mathbf{12}}$ en e^3

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\frac{1}{e}$, $\varnothing$, $x < \frac{4-e}{2}$, $x \geqslant \ln 2 - 1$, $\frac{e^2+1}{5}$, $\left]\frac{1}{3};1\right[$, $x \geqslant 5 - \ln 2$

$\boxed{\mathbf{14}}$ $-\frac{1}{2}$, $\left[-\sqrt{6};-1\right[\cup\left]1;\sqrt{6}\right]$, $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\left]2-\sqrt{3};1\right[\cup\left]1;2+\sqrt{3}\right[$

$\boxed{\mathbf{17}}$ $\ln 2 2^x$, $(1+\ln x)x^x$

$\boxed{\mathbf{19}}$ a, b, b

$\boxed{\mathbf{20}}$ 8, 9

$\boxed{\mathbf{21}}$

```
c=1
n=0
while c<2 :
   c=c×1.03
   n=n+1
print n
```

$$1{,}03^n > 2 \iff n > \frac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \geqslant 24$$

$\boxed{\mathbf{22}}$ Croissance très lente de la suite, mais semble non bornée.

2. (a) Étude de fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$
   $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ sur $]0;+\infty[$.
   Donc f décroissante sur $]0;+\infty[$ et $f(0) = 0$, donc $f < 0$ sur $]0;+\infty[$. D'où la conclusion.

   (b) En remplaçant x par $\frac{1}{n}$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$, on conclut grâce à la question précédente.

(c) En sommant entre 1 et N, on a :

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln n \geqslant \ln(N+1) - \ln 1$$

3. $u_n \geqslant ln(n+1)$ donc (u_n) diverge.

3 Fonctions trigonométriques

29

1. paire, $2\pi-$périodique
2. impaire, $\pi-$périodique
3. paire, $\pi-$périodique
4. impaire, $4\pi-$périodique

30

1. $3\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x$
2. $-2\sin x + 1$
3. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
4. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
5. $5\sin x + 5x\cos x$
6. $-4\sin x \cos^3 x$
7. $9\sin(3x)$
8. $\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
9. $3\cos\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $2\cos(2x) + 3\sin(3x)$
11. $-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\sqrt{1+x^2}$
12. $\cos x e^{\sin x}$
13. $-15\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $2(1+\tan^2(2x))$
15. $x(1+\tan^2 x) + \tan x$

4 Études de fonctions

5 Avec des suites