Feuille de TD n°6
Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

1 Relation fonctionnelle :
Simplifier les écritures suivantes :

1. $e^6 \times e^{-4}$
2. $\dfrac{e^3}{e}$
3. $(e^{-4})^3$
4. $\dfrac{3e^5}{e \times e^2}$
5. $\dfrac{e^{-4}}{e^{-1}}$
6. $(e^{-5})^6$
7. $\dfrac{5e^{-7}}{e^2}$
8. $e^{-3x} \times e^{2x}$
9. $e^{2x-1} \times e^{-3x+2}$
10. $\dfrac{e^{5x}}{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-3x^2+x+1}}{e^{x+1}}$
12. $e^{-5x} \times e^{5x+1}$
13. $e^{-3x} \times e^{-3x-1}$
14. $\dfrac{e^{-2x}}{e^{4x+2}}$
15. $\dfrac{e^{x^2-2x+1}}{e^{x^2+1}}$

2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{-x}$.

1. Calculer $f(0)$
2. Montrer que f est paire.
3. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f.
4. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$.

3

1. Développer l'expression $(e^x + e^{-x}) \times (e^x - e^{-x})$
2. Simplifier l'expression $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

4 Équations avec $\exp$.
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{-4x+2} = 1$
2. $e^{-x+3} = e^{x+5}$
3. $\dfrac{e^{2x-2}}{e^{-x+1}} = 0$

5 Équations avec changement d'inconnue :
Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} + e^x + 3 = 0$
2. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
3. $-3e^{2x} - 9e^x + 12 = 0$

6 Inéquations :
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $e^{x+1} > 1$
2. $e^{-2x+1} \leqslant e^x$
3. $e^{x^2+1} \geqslant e^{x-2}$
4. $\dfrac{x^2+x-2}{e^{2x}-1} > 0$

7 Calculs de dérivées :
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$.
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$
3. $f(x) = e^{x^2+x}$
4. $f(x) = xe^{x+1}$
5. $f(x) = e^{x^2+1}$
6. $f(x) = (x^2+1)e^{3x+1}$
7. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$
8. $f(x) = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$
9. $f(x) = e^{4x+1}$
10. $f(x) = e^x + x^2 + 1$
11. $f(x) = 5e^x + 5xe^x$
12. $f(x) = e^x \sin x$
13. $f(x) = \dfrac{3x+1-e^x}{e^x}$
14. $f(x) = e^{-x} + x^{-1}$

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x} + 3x - 2$

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$ (parité, variations, limites).
2. En déduire qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $]0;1[$.
3. Donner une approximation de cette solution à 10^{-3} près.

9

Partie 1.

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudier la fonction sur $\mathbb{R}$. Dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$, donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$

Partie 2.

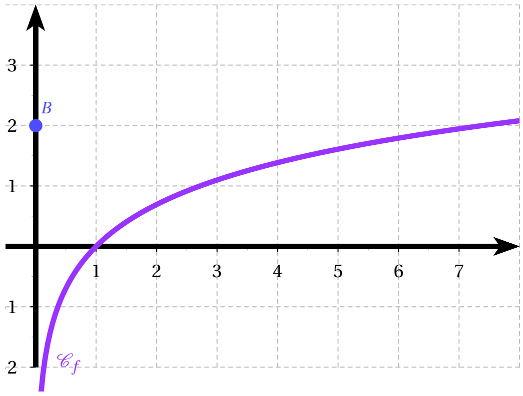
On considère la fonction f définie sur $[-3;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 3$, $f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}$ En déduire le sens de variation de f sur $[-3;+\infty[$.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.
3. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Dresser son tableau de variation sur $[-3;+\infty[$.

2 Fonction logarithme népérien

10 Dans le repère orthonormé suivant, on a le point $B(0;2)$ et $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction ln.



Existe-t-il une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point B ?

11 Résoudre les équations et inéquations.

1. $\ln x = -1$
2. $e^{2x} = -1$
3. $\ln(4-2x) > 1$
4. $e^{x+1} \geqslant 2$
5. $\ln(5x-1) = 2$
6. $e^{-x} = 5$
7. $\ln(3x-1) < 0$
8. $e^{5-x} \leqslant 2$

12 Même consigne, attention aux ensembles de définition

1. $\ln(x+1) = \ln(-x)$
2. $\ln(x^2-1) \leqslant \ln 5$
3. $\ln(x^2-x+1) = \ln 2$
4. $\ln(2x) > \ln(x^2-2x+1)$

13 Résoudre les équations/inéquations suivantes, attention au domaine de définition

1. $\ln(3x-6) = \ln(4-x)$
2. $\ln(2x) - \ln(x+1) = \ln(x-5)$
3. $\ln(2x-1) = 2\ln x$
4. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(4-2x)$
5. $\ln(4x-2) + \ln(5) < 1 - \ln 2$
6. $\ln(5-x) \geqslant \ln(x-1)$
7. $\ln(x^2-4x+4) - \ln(x-2) < \ln(8-x)$
8. $\ln(2x+4) + \ln(1-x) - \ln 2 \geqslant \ln(-x)$

14 Résoudre les équations/inéquations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

1. $\ln((x-3)(2x+1)) = \ln 4$
2. $\ln(x-3) + \ln(2x+1) = \ln 4$
3. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln 3 + \ln 2$
4. $2\ln(x+2) = \ln(-x)$
5. $(\ln(x))^2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{4}$
6. $\ln(-2x+3) - \ln(x+1) = 1$

15 **calculs de dérivées** Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2^x$ et de la fonction $g : x \mapsto x^x$.

16 ** Soit la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$.
Montrer que f admet un maximum de $\dfrac{1}{2}$ sur l'intervalle de définition.

17 Donner la réponse exacte parmi les trois propositions.

1. Soit un nombre $x > 0$.
   On a $\ln(1+x) - \ln(x) = \ldots$
   (a) $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$;
   (b) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$;
   (c) 0.
2. Pour tout nombre réel x, $\ln\left(\dfrac{e^x}{2}\right) - \ln\left(e^{x-3}\right) = \ldots$
   (a) $-3-\ln 2$;
   (b) $3-\ln 2$;
   (c) $-3+\ln 2$.
3. La suite définie par $u_n = \ln(5\times 3^n)$ est une suite
   (a) géométrique de raison $\ln 3$ et de premier terme $\ln 5$;
   (b) arithmétique de raison $\ln 3$ et de premier terme $\ln 5$;
   (c) arithmétique de raison $\ln 3$ et de premier terme 0.

18 **Déterminer un seuil :**

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{N}$:

1. $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$
2. $3^{2n} > 10^8$

19 **Application :** Iwao souhaite placer son argent sur un compte épargne rémunéré à 3% par an.

1. Écrire un algorithme permettant de déterminer au bout de combien d'années de placement son capital initial aura doublé.
2. Retrouver le résultat de l'algorithme par le calcul.

20 **Série harmonique : un exemple de série divergente.**
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. (a) Écrire un algorithme permettant de calculer la valeur u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

(b) Utiliser cet algorithme programmé sur calculatrice ou ordinateur pour déterminer u_{20}, u_{100} et u_{500}.
La suite semble-t-elle converger ?

2. (a) Démontrer que pour tout nombre $x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln(n+1)$
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

$\boxed{21}$ **Autour de la notion d'équivalent + taux intérêts**

1. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$g(x) = \ln(1+x) - x$$
   (a) Étudier le sens de variation de la fonction g.
   En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) \leqslant 0$.
   (b) Démontrer que pour tout nombre réel $x \in [0; +\infty[$, $\left|g(x)\right| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel $x \in]0; 0,14[$, on a
$$\ln(1+x) \approx x$$
   avec une erreur inférieure ou égale à 0,01.
2. Un banquier explique la « règle des 70 » à un client : « *Si vous placez un capital sur un compte épargne dont le taux d'intérêt est t% , alors votre capital aura doublé en $\dfrac{70}{t}$ ans. Par exemple, si vous placez votre argent à 7%, vous doublez le capital en 10 ans.* » .
Justifier la règle de 70.
3. Énoncer la règle des 110 et des 231.

3 Fonctions trigonométriques

$\boxed{22}$ Étudier parité et périodicité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$
2. $f_2(x) = \sin x \cos x$
3. $f_3(x) = 1 + 5\cos^2 x$
4. $f_4(x) = 7\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\boxed{23}$ Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3\sin x + x^2 \cos x$
2. $f_2(x) = 2\cos x + x$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
5. $f_5(x) = 5x \sin x$
6. $f_6(x) = \cos^4 x$
7. $f_7(x) = -3\cos(3x)$
8. $f_8(x) = \cos\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
9. $f_9(x) = -\sin\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $f_{10}(x) = \sin(2x) - \cos(3x)$
11. $f_{11}(x) = \cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
12. $f_{12}(x) = e^{\sin x}$
13. $f_{13}(x) = 3\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $f_{14}(x) = \tan(2x)$
15. $f_{15}(x) = x\tan(x)$

Feuille de TD n°6
Réponses ou Solutions

1 Fonction exponentielle

2

1. $f(0)=1+1=2$
2. pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}=f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
4. En factorisant par e^{-x}.

3 $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$, 1

4 $\dfrac{1}{2}$, -1, $\varnothing$.

5 $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0\}$

6 $]-1\,;+\infty[$, $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right]$, $\mathbb{R}$, $]-2\,;0[\cup]1\,;+\infty[$

8 dérivée : $-3(\mathrm{e}^{-3x}-1)$, s'annule en 0. TVI.

2 Fonction logarithme népérien

10 en e^3

11 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\varnothing$, $x<\dfrac{4-\mathrm{e}}{2}$, $x\geqslant \ln 2-1$, $\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{5}$, $\left]\dfrac{1}{3}\,;1\right[$, $x\geqslant 5-\ln 2$

12 $-\dfrac{1}{2}$, $\left[-\sqrt{6}\,;-1\right[\cup\left]1\,;\sqrt{6}\right]$, $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\left]2-\sqrt{3}\,;1\right[\cup\left]1\,;2+\sqrt{3}\right[$

15 $\ln 2\, 2^x$, $(1+\ln x)x^x$

17 a, b, b

18 8, 9

19

```
c=1
n=0
while c<2 :
   c=c×1.03
   n=n+1
print n
```

$1{,}03^n>2 \iff n>\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03}\geqslant 24$

20 Croissance très lente de la suite, mais semble non bornée.

2. (a) Étude de fonction $f(x)=\ln(1+x)-x$
   $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}<0$ sur $]0\,;+\infty[$.
   Donc f décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $f(0)=0$, donc $f<0$ sur $]0\,;+\infty[$. D'où la conclusion.

   (b) En remplaçant x par $\dfrac{1}{n}$, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$, on conclut grâce à la question précédente.

(c) En sommant entre 1 et N, on a :

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln n \geqslant \ln(N+1) - \ln 1$$

3. $u_n \geqslant ln(n+1)$ donc (u_n) diverge.

3 Fonctions trigonométriques

22

1. paire, $2\pi-$périodique
2. impaire, $\pi-$périodique
3. paire, $\pi-$périodique
4. impaire, $4\pi-$périodique

23

1. $3\cos x + 2x\cos x - x^2 \sin x$
2. $-2\sin x + 1$
3. $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
4. $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
5. $5\sin x + 5x\cos x$
6. $-4\sin x \cos^3 x$
7. $9\sin(3x)$
8. $\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$
9. $3\cos\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $2\cos(2x) + 3\sin(3x)$
11. $-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\sqrt{1+x^2}$
12. $\cos x e^{\sin x}$
13. $-15\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $2(1+\tan^2(2x))$
15. $x(1+\tan^2 x) + \tan x$