Chapitre 7 : Principe de récurrence
Premières applications aux suites

1 Le principe de récurrence

1.1 Axiome de récurrence

Le principe de récurrence est ce que l'on appelle un *axiome* en mathématique. Il est basé sur la construction « rigoureuse » de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. Il est équivalent à la propriété de $\mathbb{N}$:« Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ». Ceci signifie que *si l'on admet cette propriété, on peut démontrer le principe de récurrence* ou que si l'on admet le principe de récurrence, on peut démontrer la propriété du plus petit élément.

Théorème 1 (Principe de récurrence).

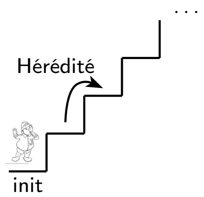
Si une propriété $\mathscr{P}$, définie *en fonction d'un nombre entier naturel* n (on notera alors $\mathscr{P}_n$) est vraie pour un certain entier n_0 et est *héréditaire* (si elle est vraie à un certain rang arbitraire, alors elle l'est au rang suivant)
alors on peut affirmer qu'elle est vraie **pour tout $n \geqslant n_0$**.

En particulier, on utilisera (ou on essaiera) d'employer un raisonnement par récurrence lorsqu'on doit prouver une propriété donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1
L'idée est celle de l'escalier :

- Si l'on pose un pied quelque part sur l'escalier
- Si on a la **capacité** de passer d'une marche à l'autre

Alors on pourra mettre le pied sur toutes les marches en amont de la marche initiale.



Les *propriétés* peuvent être

des égalités : <u>Pour tout entier naturel n non nul</u>, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

des inégalités : Pour une certaine suite (u_n), <u>pour tout $n \in \mathbb{N}$</u>, démontrer que $u_n \leqslant 10000$

des assertions : <u>Pour tout $n \in \mathbb{N}$</u>, démontrer que 10^n-1 est divisible par 9.

Chacune de ces propriétés ont en commun d'être indexées sur l'ensemble des entiers naturels.
⚠On ne démontrera pas par récurrence une propriété de la forme :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \sin x \leqslant |x|$$

1.2 Rédaction d'un raisonnement par récurrence

On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On pose, pour n un entier naturel quelconque, $\mathscr{P}_n$: « $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

On veut prouver que $\mathscr{P}_n$ est **VRAIE** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration se fera en 3 étapes :

⋆ **Initialisation :** Si $n = 1$, $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$, donc la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 1, on peut aussi écrire *la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.*

⋆ **Hérédité : Soit n un entier tel que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie.**

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, c'est ce que l'on appelle l'**hypothèse de récurrence (HR)**.

On veut prouver la propriété au rang suivant, soit $\mathscr{P}_{n+1}$ (écriture ?)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{HR}} + (n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)}{6}\right) \\
&= (n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6}
\end{aligned}$$

Si on étudie le trinôme $2n^2+7n+6$, on remarque que $\Delta = 1$ et que ses racines sont $n_{1,2} = \frac{-7 \pm 1}{4} = -2$ ou $-\frac{3}{2}$.

On peut donc factoriser le trinôme : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est démontrée.

⋆ **Conclusion :** La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 1 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

▶ Exercice 1 — Application

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$. Démontrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

▶ Exercice 2 — Inégalité de Bernoulli

Démontrer que pour tout $a \in]0; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

2 Premières applications aux suites

2.1 Suites bornées

Définition 1 (Majorée, minorée, bornée).

- On dit qu'une suite (u_n) est *majorée* s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$
- On dit qu'une suite (u_n) est *minorée* s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$
- On dit qu'une suite est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété 1 (Suite bornée (2)).

La suite (u_n) est bornée si et seulement si il existe un nombre réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

▶ Exercice 3 Suite majorée, méthode directe

On considère la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.

▶ Exercice 4 Suite bornée

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.

2.2 Sens de variation

Définition 2 (Suites croissantes, décroissantes, constante).

Soit une suite (u_n). On dit que

- (u_n) est *croissante* [resp. strictement croissante] si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ [resp. $> u_n$].
- (u_n) est *décroissante* [resp. strictement décroissante] si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ [resp. $< u_n$].
- (u_n) est *constante* ou *stationnaire* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

On va pouvoir parfois utiliser le principe de récurrence pour prouver qu'une suite est croissante ou décroissante.

▶ Exercice 5

Montrer, par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ est strictement décroissante.

▶ Exercice 6 Un cas défavorable...

Soit v_n définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n + 1}{v_n + 1}$. Montrer que (v_n) est croissante.

Propriété 2.

Si f est une fonction croissante sur un intervalle I à valeurs dans I. Si (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Alors la suite (u_n) est **monotone**.

▶ Exercice 7 Application

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f qui est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
3. Interpréter le résultat obtenu.