Feuille de TD n°7
Récurrence

Exercice 1 *Somme des cubes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3$. Montrer, par récurrence que $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2 Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, que 4 divise $5^n - 1$.

Exercice 3 *Initialisation pas à 0 :*

1. Dresser le tableau de signes de $2x^2 - (x+1)^2$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$

Exercice 4 *Hérédité ne suffit pas :*

On considère la propriété $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».

1. Montrer que $P(n)$ est héréditaire
2. $P(n)$ est-elle vraie pour tout n ?

Exercice 5 *Démontrer une formule :*

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 6 *En géométrie*

Montrer que la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés est égale à $(n-2)\pi$ radians

Exercice 7 *Suite arithmético-géométrique :*

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 8$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 5^n - 2$.

Exercice 8 *Suite homographique — Problème 1*

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
   (b) Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
   (c) Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.
   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   (a) Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 *Histoires de moyennes — Problème 2*

1. On considère le programme Python suivant :

```
from math import sqrt

a=float(input("Saisir un nombre positif non nul"))
b=float(input("Saisir un nombre positif non nul"))
N=int(input("Saisir un nombre entier non nul"))

u,v=a,b

for k in range(N):
    u=(a+b)/2
    v=sqrt((a**2+b**2)/2)
    a=u
    b=v
print(u,v)
```

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

k	a	b	u	v
	4	9		
0				
1				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Feuille de TD n°7
Indications, réponses ou Solutions

Exercice 1
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathscr{P}_n$: $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Initialisation : $S_0 = 0^3 = 0$ et $\dfrac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, autrement dit, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

$S_{n+1} = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}_{S_n} + (n+1)^3$

Par hypothèse, on peut dire que $S_{n+1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$. Ici, il faut absolument factoriser.

$S_{n+1} = (n+1)^2\left(\dfrac{n^2}{4} + n + 1\right) = \dfrac{(n+1)^2\overbrace{(n^2+4n+4)}^{(n+2)^2}}{4}$

Ainsi, $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : La propriété P_n est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^2 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 2
Soit $\mathscr{P}_n$: 4 divise $5^n - 1$.

Init facile.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

$5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1 = 5 \times (5^n - 1 + 1) - 1 = 5 \times (\underbrace{5^n - 1}_{\text{div. par 4}}) + \underbrace{5-1}_{\text{div. par 4}}$

Donc $5^{n+1} - 1$ est divisible par 4. Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Exercice 3

1. $2x^2 - (x+1)^2 = x^2 - 2x - 1$, de racines $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2} \approx 2,414$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc, pour tout $n \geqslant 1+\sqrt{2}$, $2^n \geqslant (n+1)^2$.

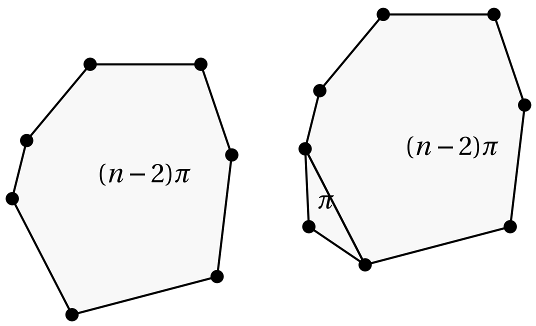
2. **Init :** On pose $\mathscr{P}_n$: $2^n \geqslant n^2$
   Si $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Donc $\mathscr{P}_4$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
   $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, or, par hypothèse de récurrence, $2^n \geqslant n^2$ et comme $n \geqslant 4$, $n^2 \geqslant (n+1)^2$.
   Ainsi, $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

   Conclusion : gnagnagna

Exercice 5
Vrai en 0. Hérédité : Si $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, alors $v_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$ et donc la propriété est héréditaire.

Exercice 6
Raisonnement sur une figure :



Un polygone à $n+1$ côtés peut être découpé en un polygone n côtés et un triangle. La somme des angles est donc égale à $\pi+(n-2)\pi=((n+1)-2)\pi$.

Exercice 7

On pose $\mathscr{P}_n$: $u_n=3\times 5^n-2$

Init : Si $n=0$, $u_0=1$ et $3\times 5^0-2=3-2=1$

Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
$u_{n+1}=5u_n+8=5\times\left(3\times 5^n-2\right)+8=3\times 5\times 5^n-10+8=3\times 5^{n+1}-2$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.