Chapitre 8 : Nombres Complexes (I)

Table des matières

1 Ensemble des nombres complexes

Définition 1 (Nombres complexes).

On appelle ensemble des nombres complexes l'ensemble noté $\mathbb{C}$ des nombres z s'écrivant sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels et i est le nombre dit *imaginaire* vérifiant $i^2=-1$.

Remarque 1.

Il est clair que $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$: en effet, si $b=0$, alors $z=a+i\times 0\in\mathbb{R}$.

Définition 2 (Forme algébrique).

Un nombre complexe admet plusieurs écritures, la forme $z=a+ib$ s'appelle sa *forme algébrique*, cette écriture est unique.
Si $z=a+ib$, a est appelé *partie réelle* de z et se note $a=\mathrm{Re}(z)$.
b est appelé *partie imaginaire* de z et se note $b=\mathrm{Im}(z)$.
⚠ $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont des nombres **réels** !

<u>Démonstration</u>

⚠ **Par l'absurde**

□

Définition 3 (Imaginaire pur).

Un nombre complexe $z = a + ib$ tel que $a = 0$ est appelé *imaginaire pur*, on note alors $z \in i\mathbb{R}$.

■ **Exemple 1:**
Parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$2+\mathrm{i},\ \sqrt{5},\ -2\mathrm{i}, 4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right),\ \frac{1-4\mathrm{i}}{2}$$

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Addition, multiplication

Les opérations d'addition et multiplication sur $\mathbb{C}$ sont semblables à celles de $\mathbb{R}$, en tenant compte du fait que $\boxed{i^2 = -1}$.

▶ Exercice 1

Voir exos 1 et 2 du TD.

2.2 Conjugué

Avant de définir l'inverse et l'opération de division, on va introduire une nouvelle opération, propre aux nombres complexes, l'opération de **conjugaison**.

Définition 4 (Conjugué).

Si $z = a + ib$, on appelle *nombre complexe conjugué* le complexe noté $\overline{z} = a - ib$.

▶ Exercice 2 Conjugué

Donner les conjugués des nombres complexes suivants : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 3i + 1$ et $z_3 = i$.

Propriété 1 (Compatibilité de la conjugaison avec opérations).

Pour tous $z,\ z' \in \mathbb{C}$,

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ conjugué de la somme = somme des conjugués
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ conjugué du produit = produit des conjugués
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ conjugué de l'inverse = inverse du conjugué
- $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ conjugué du quotient = quotient des conjugués

⋆ Pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration

Dans toute la démonstration, on posera $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes en écriture algébrique.

- Somme :

$$\overline{z+z'} = \overline{a+a'+i(b+b')} = a+a'-i(b+b') = \underbrace{a-ib}_{\overline{z}} + \underbrace{a'-ib'}_{\overline{z'}}$$

- Produit :
  - $\overline{zz'} = \overline{aa'-bb'+i(ab'+a'b} = aa'-bb'-i(ab'+a'b)$
  - $\overline{z} \times \overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa'-ibb'-i(ab'+a'b)$

  Donc on a bien $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- Inverse :
  - $\overline{\dfrac{1}{z}} = \overline{\dfrac{1}{a+ib}} = \overline{\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$
  - $\dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{a-ib} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$

  Donc on a bien $\overline{\dfrac{1}{z}} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
- Quotient :
  En appliquant les deux points précédents, on a :

$$\overline{\frac{z}{z'}} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

⋆ Démontrons cette propriété par récurrence : Posons $\mathscr{P}_n$: $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

- Initialisation :
  $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $\overline{z}^0 = 1$, ainsi la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.
- Hérédité :
  Supposons la propriété vraie au rang n : i.e. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
  alors $\overline{z^{n+1}} = \overline{z \times z^n} = \overline{z} \times \overline{z^n}$ par produit
  Ainsi, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z} \times \overline{z}^n = \overline{z}^{n+1}$ et donc la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc vraie au rang 0, et héréditaire, on peut donc conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

□

Remarque 2 ($z\overline{z}$).

On remarque que $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ (*le produit d'un nombre et de son conjugué est positif*) en effet, $(a+ib)\times(a-ib) = a^2+b^2 \geqslant 0$

Propriété 2 (identités avec le conjugué).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

Démonstration

En exercice (exercice 3 du TD)

□

Propriété 3 (réel ou pas).

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

Démonstration

En exercice (Exercice 4 du TD)

□

2.3 Inverse et Division

Propriété 4 (Inverse).

Tout nombre complexe non nul $z = a+ib$ admet un inverse noté $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

▶ Exercice 3

Calculer la forme algébrique des nombres suivants :

- $a = \dfrac{1}{2-\mathrm{i}}$
- $b = \dfrac{1}{\mathrm{i}}$
- $c = \dfrac{1}{2\mathrm{i}-5}$
- $d = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$

Remarque 3.

Diviser revient à multiplier par l'inverse (comme avant)

▶ Exercice 4 Inverser, diviser

Donner la forme algébrique des nombres suivants : $\dfrac{1}{1+2i}$ et $\dfrac{2-3i}{1+2i}$.

3 Résolution des équations de degré 2

L'ensemble des nombres complexes est dit algébriquement clos : tous les polynômes y admettent une écriture complètement factorisée (autrement dit, ils ont tous une racine dans $\mathbb{C}$)

Théorème 1 (Équations de degré 2).

Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels, admet deux racines complexes **conjuguées** (éventuellement confondues si $\Delta = 0$) :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}(= \overline{x_1}$.
Ainsi, tout polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ admet une écriture sous la forme $a(x - x_1)(x - \overline{x_1})$ (factorisée).

Démonstration

Évidente

□

▶ Exercice 5 Équations à résoudre

Donner la forme algébrique des solutions des équations suivantes :

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x^2 + x + 1 = 0 \qquad x^2 = -5 \qquad x^2 + 3x + 2 = 0$$

En déduire la forme factorisée des polynômes suivants :

$$x^2 - x - 1 \qquad x^2 + x + 1 \qquad x^2 + 5 \qquad x^2 + 3x + 2$$