Feuille de TD n°7
Nombres complexes

1 Ensemble des nombres complexes

Savoir déterminer partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Addition, multiplication

1 Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

a. $2(1-3\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})$
b. $-4\mathrm{i}^2+\mathrm{i}$
c. $\mathrm{i}(-2+7\mathrm{i})$
d. $\dfrac{1}{\mathrm{i}}$
e. i^3
f. i^4
g. i^5
h. i^6
i. $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$
j. $(1+\mathrm{i})^2$
k. $(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{3})(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3})$
l. $(2+3\mathrm{i})^2$

2 Même consigne

a. $\mathrm{i}-(2-5\mathrm{i})$
b. $3(1+2\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})$
c. $2\mathrm{i}^2+\mathrm{i}+2(1-2\mathrm{i})$
d. $\mathrm{i}^3-\mathrm{i}$
e. $(4-5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$
f. $(1+3\mathrm{i})(5-\mathrm{i})-2(5+3\mathrm{i})$
g. $(1-2\mathrm{i})^2$
h. $(\mathrm{i}+2)(\mathrm{i}-2)$
i. $(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$
j. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$
k. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
l. $(3-2\mathrm{i})^2-(2+3\mathrm{i})^2$

2.2 Conjugué

3 Démontrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,
- $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$

4 Démontrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,
- $z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=\overline{z}$
- $z\in i\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=-\overline{z}$

5 Conjugué et opérations.
Soit $z\in\mathbb{C}$ un nombre complexe, différent de i. Écrire le conjugué des nombres suivants :

1. $z^2-\mathrm{i}z+3\mathrm{i}-4$
2. $\overline{z}+(2+\mathrm{i})z$
3. $\dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$

6 Démontrer, sans calcul, que le nombre $Z=\dfrac{2-7\mathrm{i}}{-3+5\mathrm{i}}-\dfrac{2+7\mathrm{i}}{3+5\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

7 *Petit problème*
On considère l'équation (E) $z^4=-4$, où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E), alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).
2. On considère le nombre $z_0=1+i$.
   Montrer que z_0 est solution de (E).
3. Déduire des questions précédentes les trois autres solutions de l'équation (E).

8 On note $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer j^2 et j^3, puis $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$

2.3 Inverse et Division

9 On donne les nombres complexes $z_1 = 1 - 4\mathrm{i}$ et $z_2 = 1 + \mathrm{i}$
Calculer $z_1 z_2$, z_1^2, z_2^3, $\dfrac{z_2}{z_1}$ et $\dfrac{1}{z_1} - \dfrac{1}{z_2}$.

10 Équations du premier degré
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $\mathrm{i}z - 1 = 7\mathrm{i}$
2. $z = 3 + \mathrm{i}z$
3. $5\mathrm{i} - z = 3\mathrm{i}z + 1$
4. $2\mathrm{i} + 3z = (1+\mathrm{i})z + 1$
5. $(1+\mathrm{i})\overline{z} = 1 - 3\overline{z}$
6. $\overline{z} + \mathrm{i}z = 1$
7. $z - 1 = 2\mathrm{i} + 3\overline{z}$
8. $2\mathrm{i}z - 1 = \overline{z} + 4\mathrm{i}$

3 Résolution des équations de degré 2

11 **Équations du second degré (bases)**
Résoudre dans $\mathbb{C}$.

1. $z^2 + 1 = 0$
2. $2z^2 - z + 1 = 0$
3. $z^2 + 3z - 10 = 0$
4. $z^2 + 6z + 15 = 0$
5. $-z^2 + 8z - 25 = 0$
6. $3z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

12 **Factorisation et résolution d'équation**
On considère le polynôme $P(z) = z^3 + (-6+\mathrm{i})z^2 + (13-6\mathrm{i})z + 13\mathrm{i}$

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est une racine de P.
2. Déterminer trois nombres complexes a, b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z+\mathrm{i})(az^2 + bz + c)$
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(2z - 3\mathrm{i} + 5)(2z^2 - 2z + 1) = 0$
2. $(-2z + 1)(z - 1) = 1$
3. $3z^3 - 2z^2 + z = 0$
4. $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ *Méthode ?*

14 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = 2z^3 - 2z^2 + z - 10$.

1. Déterminer une solution évidente réelle x_0 à l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :
$$P(z) = (z - x_0)(az^2 + bz + c)$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

15 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 2z^3 + 12z^2 - 8z + 32$.

1. Montrer que $2\mathrm{i}$ est une racine de P.
2. Justifier que $-2\mathrm{i}$ est également une racine de P.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(z) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$. *On pourra procéder par identification ou bien par division des polynômes.*
4. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Feuille de TD n°7
Réponses ou Solutions

1 Ensemble des nombres complexes

Savoir déterminer partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Addition, multiplication

$\boxed{1}$

a. $1-5\mathrm{i}$
b. $4+\mathrm{i}$
c. $-7-2\mathrm{i}$
d. $-\mathrm{i}$
e. $-\mathrm{i}$
f. 1
g. i
h. -1
i. 2
j. $2\mathrm{i}$
k. 5
l. $-5+12\mathrm{i}$

$\boxed{2}$

a. $-2+6\mathrm{i}$
b. $-1+5\mathrm{i}$
c. $-3\mathrm{i}$
d. $-2\mathrm{i}$
e. $9-\mathrm{i}$
f. $-2+8\mathrm{i}$
g. $-3-4\mathrm{i}$
h. -5
i. 10
j. $-3+\mathrm{i}$
k. $-\mathrm{i}$
l. $10-24\mathrm{i}$

2.2 Conjugué

$\boxed{3}$ Soit $z=a+\mathrm{i}b$ son écriture algébrique.

- $z+\overline{z}=a+\mathrm{i}b+a-\mathrm{i}b=2a=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=a+\mathrm{i}b-(a-\mathrm{i}b)=2\mathrm{i}b=2i\mathrm{Im}(z)$

$\boxed{4}$ Soit $z=a+\mathrm{i}b$ son écriture algébrique

- $z=\overline{z} \iff a+\mathrm{i}b=a-\mathrm{i}b \iff b=-b \iff b=0 \iff z\in\mathbb{R}$
- $z=-\overline{z} \iff a+\mathrm{i}b=-a+\mathrm{i}b \iff a=-a \iff a=0 \iff z=\mathrm{i}b \iff z\in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

$\boxed{5}$

1. $\overline{z}^2+\mathrm{i}\overline{z}-3\mathrm{i}-4$

2. $z+(2-\mathrm{i})\overline{z}$

3. $\dfrac{\overline{z}-2}{\overline{z}+\mathrm{i}}$

$\boxed{6}$ Somme d'un nombre et de son conjugué.

$\boxed{7}$

1. Soit z une solution de l'équation (E).
   - $(-z)^4=z^4=-4$
     Donc $-z$ est aussi solution de (E).
   - $\overline{z}^4=\overline{z^4}=\overline{-4}=-4$
     Donc $\overline{z}$ est aussi solution de (E).
2. $(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}-1=2\mathrm{i}$, donc $(1+\mathrm{i})^4=(2\mathrm{i})^2=-4$
   Donc $z_0=1+\mathrm{i}$ est solution de (E).

3. D'après les questions précédentes, $-z_0 = -1 - \mathrm{i}$ est solution de (E), $\overline{z_0} = 1 - \mathrm{i}$ et $\overline{-z_0} = -1 + \mathrm{i}$.

$\boxed{8}$ $\mathrm{j}^2 = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\mathrm{j}}$, $\mathrm{j}^3 = 1$, $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$

2.3 Inverse et Division

$\boxed{9}$ Vérifier à la calculatrice.

$\boxed{10}$

1. $7 - \mathrm{i}$

2. $\dfrac{3}{2}(1 + \mathrm{i})$

3. $1{,}4 + 0{,}8\mathrm{i}$

4. $\dfrac{4 - 3\mathrm{i}}{5}$

5. $\dfrac{4 + \mathrm{i}}{17}$

6. pas de solution dans $\mathbb{C}$.

7. $\dfrac{-1 + \mathrm{i}}{2}$

8. $3 - 2\mathrm{i}$

3 Résolution des équations de degré 2

$\boxed{11}$

1. $\pm\mathrm{i}$

2. $\dfrac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$

3. -5 et 2

4. $-3 \pm \mathrm{i}\sqrt{6}$

5. $4 \pm 3\mathrm{i}$

6. $\dfrac{-\sqrt{3} \pm 3\mathrm{i}}{6}$

$\boxed{12}$

1. $P(-\mathrm{i}) = 0$.
2. $a = 1$, $b = -6$ et $c = 13$ par identification.
3. Les trois solutions sont $-\mathrm{i}$, $3 \pm 2\mathrm{i}$.

$\boxed{13}$

1. $\dfrac{1}{2}(-5 + 3\mathrm{i})$, $\dfrac{1 \pm \mathrm{i}}{2}$
2. $\dfrac{3 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$
3. 0 et $\dfrac{2 \pm 3\mathrm{i}}{6}$
4. $\pm 2\mathrm{i}$ et $\pm\sqrt{2}$.

$\boxed{14}$

1. $x_0 = 2$
2. $a = 2$, $b = 2$, $c = 5$.
3. Les solutions sont 2, $\dfrac{-1 \pm 3\mathrm{i}}{2}$.

$\boxed{15}$

1. $P(2\mathrm{i}) = 0$.
2. Comme les coefficients de P sont réels, les racines complexes de P sont conjuguées.

$$z_0 \text{ est une racine de } P \iff P(z_0) = 0 \iff \overline{P(z_0)} = \overline{0} \iff \overline{z_0^4 - 2z_0^3 + 12z_0^2 - 8z + 32} = 0$$

D'après les propriétés des opérations avec les conjugués,

$$\iff \overline{z_0}^4 - 2\overline{z_0}^3 + 12\overline{z_0}^2 - 8\overline{z_0} + 32 = 0 \iff P(\overline{z_0}) = 0$$

$\iff \overline{z_0}$ est une racine de P.

3. $a = 1$, $b = -2$ et $c = 8$.
4. Les solutions sont $\pm 2\mathrm{i}$ et $1 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}$.