

Chapitre 8 : Limites de Suites

Table des matières

1	Limite d'une suite	1
1.1	Limite finie	1
1.2	Limite infinie	2
1.3	Suites sans limites	3
2	Opérations sur les limites	3
2.1	Somme	3
2.2	Produit	3
2.3	Inverse	4
3	Limites et comparaisons	4
3.1	Bornitude	4
3.2	Théorème des gendarmes	5
3.3	Théorème dit « de comparaison »	5
3.4	Suites géométriques	6
4	Limites et monotonie	7
4.1	Théorème de convergence monotone	7
4.2	Suites adjacentes	9

1 Limite d'une suite

1.1 Limite finie

Définition 1 (Suite convergente).

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ si, pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inclus dans I .

On formalise cette phrase de la façon suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geq K, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Les intervalles sont donc vus comme les $] \ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [$

On dit alors que (u_n) converge vers ℓ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

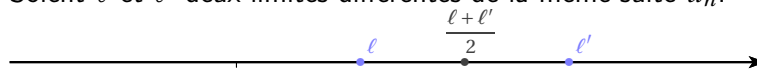
Théorème 1 (Unicité de la limite).

Si (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.

Démonstration

Raisonnement par l'absurde :

Soient ℓ et ℓ' deux limites différentes de la même suite u_n .



Considérons un intervalle $I = \left] \ell - 1; \frac{\ell + \ell'}{2} \right[$, il contient ℓ , donc il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in I$.

Par ailleurs, si $J = \left] \frac{\ell + \ell'}{2}; \ell' + 1 \right[$, alors il existe un autre rang N' à partir duquel tous les u_n seront dans J .

Si l'on choisit un n supérieur à la fois à N et N' , u_n appartient à I et à J .

Or $I \cap J = \emptyset$, ce qui contredit la phrase précédente.

□

Propriété 1 (passage à la limite dans les inégalités).

Si (u_n) est majorée par M (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < M$) et u_n convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq M$.

Exemple 1:

$u_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$, la suite (u_n) est majorée par 1, mais $\lim u_n = 1 \leq 1$.

Remarque 1.

Quand on passe à la limite, une inégalité stricte devient une inégalité large.

1.2 Limite infinie**Définition 2** (Suite ayant pour limite $+\infty$).

On dit que la suite (u_n) *tend vers* $+\infty$ si pour toute valeur réelle A il existe un rang à partir duquel $u_n \geq A$.

On dit que (u_n) *diverge vers plus l'infini*, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On formalise cette phrase de la façon suivante :

$$\forall A > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geq K, u_n > A$$

C'est donc encore une histoire d'intervalles qui contiennent la limite qui contiennent tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : $]A; +\infty[$

Remarque 2.

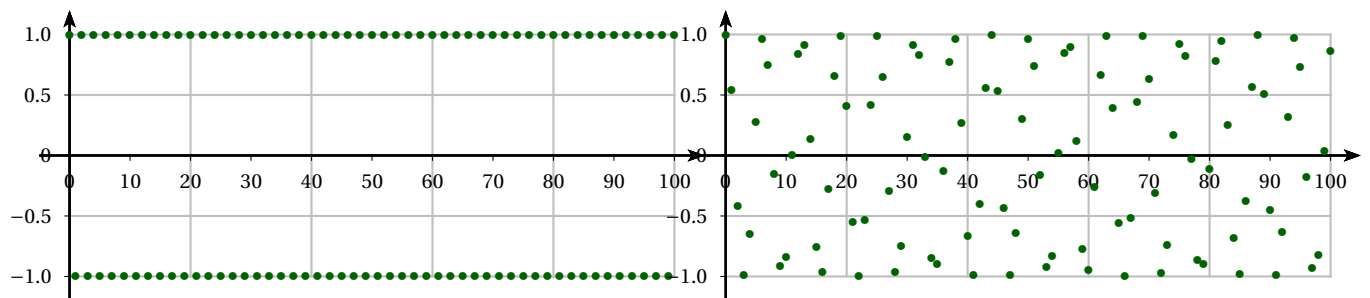
On définirait de même une limite infinie vers $-\infty$.

1.3 Suites sans limites

Quelques exemples illustrés de suites divergentes, sans limites

■ Exemple 2:

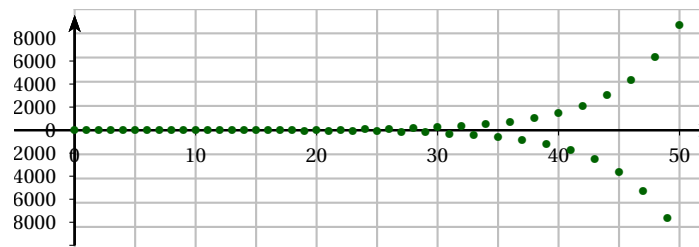
La suite $(-1)^n$ admet deux valeurs d'accumulation : $+1$ et -1 , qui vont concentrer les valeurs de la suite.
 La suite définie par $u_n = \cos n$ admet une infinité de valeurs d'accumulation entre -1 et $+1$.



Remarque 3.

Les deux exemples précédents montrent qu'une suite bornée n'est pas forcément convergente.

Autre type de divergence : non bornée.
 La suite $(-1.2)^n$ diverge.



2 Opérations sur les limites

Les théorèmes vus ici sont tous admis. Ce sont les mêmes résultats que pour les fonctions.

2.1 Somme

$\lim u_n$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$					F.I.

2.2 Produit

$\lim u_n$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim u_n \times v_n$				

2.3 Inverse

$\lim u_n$	ℓ	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \frac{1}{u_n}$				

Remarque 4.

Pour les quotients, on utilise les deux derniers tableaux : produits et inverse.

► Exercice 1 Déterminer une limite par opérations

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \frac{3}{n} + 2^n$

► Exercice 2 \triangle Lever une indétermination

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 2n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4}{n^2 + 100n + 3,5}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 1}$.

3 Limites et comparaisons

3.1 Bornitude

Théorème 2 (Convergence et bornitude).

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite convergente vers un nombre ℓ . Il existe un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont compris dans l'intervalle $I = [\ell - 1; \ell + 1]$ (borné).

On peut voir que les premiers termes de la suite (jusqu'au rang p) sont

compris dans l'intervalle $\left[\underbrace{\min_{0 \leq k \leq p} u_k}_{\alpha}; \underbrace{\max_{0 \leq k \leq p} u_k}_{\beta} \right]$ (borné également).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\min(\ell - 1, \alpha) \leq u_n \leq \max(\ell + 1, \beta)$

□

Remarque 5 (Réciproque fausse).

La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'admet pas de limite.

3.2 Théorème des gendarmes

Théorème 3.

Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' .
Si à partir d'un certain rang p , $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$

Démonstration

Par l'absurde

□

Théorème 4 (dit « Des gendarmes » ou « d'encadrement »).

Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite ℓ , et qu'une suite (v_n) est telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors (v_n) converge vers ℓ .

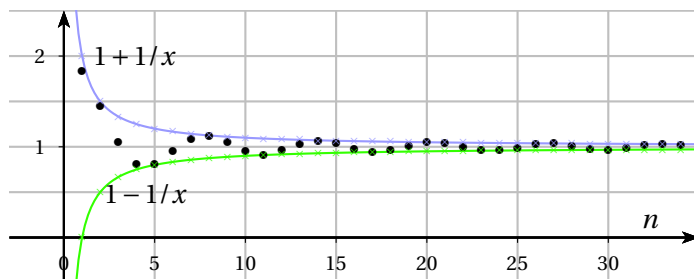
Démonstration

On peut faire entrer les termes de la suite (v_n) dans le même intervalle contenant ℓ choisi les deux autres suites (u_n) et (w_n) à partir d'un certain rang.

□

■ Exemple 3:

On va déterminer la limite de (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$.



3.3 Théorème dit « de comparaison »

Théorème 5 (De comparaison).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang p . Alors

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Supposons que si $n \geq p$, alors $u_n \leq v_n$. Supposons également que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Soit A un nombre réel.

Il existe un rang q à partir duquel $u_n \geq A$.

Soit $r = \max(p, q)$. Si $n \geq r$ alors $v_n \geq u_n \geq A$, donc $v_n \geq A$.

Cela prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

□

► Exercice 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n+1)^2 + 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n + \sin(n)$$

3.4 Suites géométriques

Propriété 2 (limite de q^n , $q > 1$).

Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration

On rappelle l'inégalité de Bernoulli :

$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$ On pose $q = 1+a$, $a > 0$.

Montrons maintenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$.

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+na = +\infty$ car $a > 0$.

En appliquant la propriété sur les comparaisons de limites infinies à $q^n \geq 1+na$, on peut conclure.

□

Conséquence 1 (Synthèse : limites de (q^n)).

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$, alors (q^n) n'a pas de limite.

► Exercice 4

Déterminer la limite de (u_n) dans les trois cas suivants :

- Si (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1,02$.
- Si (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 1,02$.
- Si (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 0,98$.

4 Limites et monotonie

4.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 6 (Suite croissante non majorée).

Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle admet une limite infinie.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Soit $A \in \mathbb{R}$, comme (u_n) n'est pas majorée : $\exists p \in \mathbb{N}, u_p \geq A$.

Croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Par conséquent, $\forall n \geq p, u_n \geq u_p \geq A$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□

Remarque 6 (Hypothèses !).

- Une suite non bornée n'admet pas forcément de limite infinie.
Ex : La suite définie par $u_n = (-2)^n$ n'a pas de limite et n'est pas bornée.
- Une suite qui a pour limite $+\infty$ n'est pas forcément monotone.
Ex : La suite définie par $u_n = n + 2 \times (-1)^n$

Théorème 7 (Convergence monotone (TCM) (admis)).

Si une suite est croissante et majorée, alors elle converge.

Remarque 7.

La version décroissante minorée existe également.

Remarque 8.

Le théorème **n'est pas constructif** : on sait que la suite est convergente mais on ne peut pas connaître directement la valeur de la limite.

Remarque 1

⚠ Une suite bornée n'est pas forcément convergente !

► Exercice 5 Application du théorème

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ et en déduire que (u_n) est convergente.

Propriété 3.

Si une suite (u_n) est croissante et converge vers ℓ , alors elle est majorée par ℓ .

Remarque 9.

Une propriété similaire existe pour les suites décroissantes, formulez-la.

Théorème 8 (du point fixe).

Si une suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente vers ℓ et f continue en ℓ , alors ℓ est un point fixe de la fonction f . Autrement dit si une suite converge alors la limite de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

Si (u_n) converge vers ℓ , alors (u_{n+1}) converge vers la même limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ de chaque côté de l'égalité, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et comme f est continue en ℓ , par composition de limites, comme $\lim_{X \rightarrow \ell} f(X) = f(\ell)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, on a donc

$$\ell = f(\ell)$$

□

4.2 Suites adjacentes**Définition 3.**

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème 9 (des suites adjacentes).

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.