Feuille de TD n°9
TD — Limites de suites

$\boxed{1}$ Recherche de seuils

Soit (w_n) une suite définie pour tout entier non nul n par $w_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

1. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $w_n \in]1,99\,;2,01[$.
2. Déterminer le plus petit entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $|w_n - 2| < 10^{-4}$.
3. Soit ε un nombre réel strictement positif. Déterminer le plus petit entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, on a $|w_n - 2| < \varepsilon$.

$\boxed{2}$ Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les conditions suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 3$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 3$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 3$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$

$\boxed{3}$ Donner, dans chaque cas, la limite de la suite si elle existe.

1. $u_n = \sqrt{n} + n^2$
2. $u_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{n^2}$
3. $u_n = ((n + \pi^n)$
4. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n^4}$
5. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - n^3$
6. $u_n = -4 + \left(\dfrac{7}{10}\right)^n + n^5$
7. $u_n = n^2 - n$
8. $u_n = -n + \sqrt{n}$
9. $u_n = -\left(-\sqrt{n} + n^7\right)$
10. $u_n = -(n^6 - n^3)$
11. $u_n = n^6 - n^4 + n^2 - n$
12. $u_n = (n^5 - 4)(3 - n)$
13. $u_n = 5 \times \left(\dfrac{185}{192}\right)^n$
14. $u_n = \left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\dfrac{1}{n^2} - 4\right)$
15. $u_n = -2 \times \left(\dfrac{18}{17}\right)^n$
16. $u_n = \dfrac{1}{n^2}(n-2)$
17. $u_n = \dfrac{1}{n}(n-2)$
18. $u_n = \dfrac{1}{n}(n^3-2)$
19. $u_n = \dfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$
20. $u_n = \dfrac{3n^2+4}{2n+5}$
21. $u_n = \dfrac{2n-1}{5-3n}$
22. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n^3}$
23. $u_n = \dfrac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}$

$\boxed{4}$ Théorèmes de comparaison :

1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2 + 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant -3n - 4$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. Soit (w_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $2n - 1 \leqslant w_n \leqslant 2n + 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
4. Soit (t_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2n+1} \leqslant t_n \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$

$\boxed{5}$ algorithme de seuil On considère la suite (u_n) définie $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 1,2 \times u_n$, $u_0 = 1$.

1. Quelle est la limite de (u_n) ?
2. Écrire une fonction en Python permettant de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle u_n aura dépassé deux fois la valeur initiale.
3. Adapter l'algorithme pour qu'il renvoie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1000$.
4. Généraliser à un seuil quelconque.

$\boxed{6}$ Théorème de convergence monotone

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement (variations, limites) de la suite (u_n).
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n$.
3. Justifier que la suite (u_n) converge.
4. Soit ℓ la limite de la suite. On admet que $\ell = \dfrac{1}{3}\ell + 2$. Déterminer la valeur de ℓ.

$\boxed{7}$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente vers un réel ℓ.
4. En utilisant le théorème du point fixe, déterminer la valeur de ℓ.

$\boxed{8}$ Même énoncé pour la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$. On montrera que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 3$.

$\boxed{9}$ Démontrer le théorème des suites adjacentes.

$\boxed{10}$ Suites adjacentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n\,!}$$

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   On appelle ℓ leur limite commune.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit pour tout réel $x \in [0\,;1]$ la fonction f par :
   $$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!}\right)\mathrm{e}^{-x}$$
   (a) Que vaut $f(0)$?
   (b) Montrer que $f(1) = \dfrac{u_n}{\mathrm{e}}$
   (c) Montrer que pour tout réel $x \in [0\,;1]$,
   $$f'(x) = -\frac{x^n}{n\,!}\mathrm{e}^{-x}$$

(d) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

(e) En déduire que $u_n \leqslant \mathrm{e}$

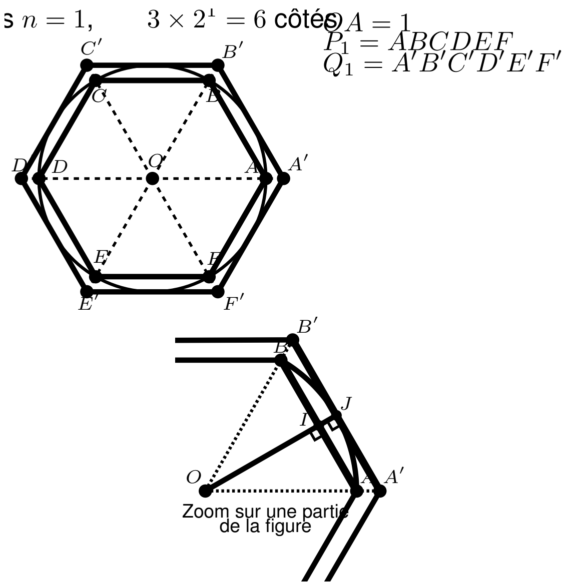
3. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = f(x) + \dfrac{x}{n!}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

   (a) Dresser le tableau de variations de g

   (b) En déduire que $u_n \geqslant \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$

4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Méthode d'Archimède : approximation de π Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1, on construit, pour $n \geqslant 1$, deux polygones réguliers P_n et Q_n ayant 3×2^n côtés. P_n étant inscrit dans le cercle et Q_n exinscrit (côtés tangents au cercle).



On admet que le périmètre du cercle est 2π et qu'il est encadré par les périmètres des deux polygones. On note p_n et q_n les **demi-périmètres** des polygones P_n et Q_n. De cette façon, on a :

$$p_n \leqslant \pi \leqslant q_n$$

1. **Cas $n = 1$**
   Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$

2. **Expression de p_n et q_n**

   (a) Justifier que l'angle au centre qui intercepte l'un des côtés de P_n et de Q_n est de $\dfrac{2\pi}{3\times 2^n}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

   $$p_n = 3\times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \text{ et } q_n = 3\times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$$

3. **Relations de récurrence ****

   (a) On pose $\alpha = \dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n en fonction de n et α

   (b) Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1+\cos(2\alpha)$ en fonction de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right) \text{ et } p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$$

   (d) Utiliser les relations précédentes pour déterminer p_2 et q_2.

4. **Étude des suites (p_n) et (q_n)**

   (a) Soit a et b deux réels positifs tels que $a < b$. Démontrer que

   $$a < \sqrt{ab} < b \qquad \text{et} \qquad a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b$$

   (b) En utilisant une récurrence, démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $p_n < q_n$.

   (c) En déduire que la suite (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante.

   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

   $$q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(q_n - p_n)$$

   (e) En déduire que $q_n - p_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

5. Démontrer que les suites (p_n) et (q_n) sont convergentes vers la même limite.

$\boxed{\mathbf{12}}$ V/F (u_n) et (v_n) sont deux suites numériques

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
2. Si la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0, alors l'une des suites (u_n) ou (v_n) converge vers 0.
3. Si (u_n) converge, alors (u_n^2) converge
4. Si (u_n^2) converge, alors (u_n) converge
5. Si (u_n) est croissante, alors (u_n) admet une limite
6. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.
7. On définit les suites (s_n) et (t_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$.
   Si (s_n) et (t_n) convergent alors (u_n) et (v_n) convergent.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Suite arithmético-géométrique et application (*)

1. a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10}u_n \end{cases}$.

   (a) (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 13u_n - 4$
   Démontrer que (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n et a.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Un professeur oublie souvent ses clés de salle.
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{E_n}$ l'événement contraire.
   p_n est la probabilité de E_n. On note $p_1 = a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.
   On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le jour n il a oublié ses clés, alors la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est de $\dfrac{1}{10}$
- S'il ne les oublie pas le jour n, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est $\dfrac{4}{10}$.

(a) Démontrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{10}p_n + \dfrac{4}{10}(1 - p_n)$.

(b) En déduire une expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

(c) À l'aide des résultats de la question **1.**, donner l'expression de p_n en fonction de n et de a.

(d) La limite de (p_n) dépend-t-elle de la condition initiale a ?

$\boxed{14}$ Raisonnement par analyse-synthèse

La suite numérique u admet pour premier terme u_0 et est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$

1. Étudier le cas où $u_0 = 4$.
2. Si $u_0 \neq 4$, montrer qu'il existe une suite géométrique v telle que $u - v$ soit indépendante de n.
   Exprimer u_n en fonction de n et u_0.
   En déduire que (u_n) admet une limite finie et déterminer cette limite.

$\boxed{15}$ **Suite d'entiers et suite stationnaire ****

On considère une suite (q_n) d'entiers naturels **croissante**, dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2. On construit la suite (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{q_0} \\ u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} \\ &\cdots\cdots \\ u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \ldots + \frac{1}{q_0 q_1 \cdots q_n} \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et peut-être majorée par une suite convergente. En déduire que la suite (u_n) admet une limite qui appartient à l'intervalle $]0\,;\,1]$.
2. Montrer que si la suite (q_n) est stationnaire à partir d'un certain rang (*i.e.* s'il existe un k tel que pour tout $n \geqslant k$, $q_n = q_k$) alors la suite (u_n) converge vers un nombre rationnel.

$\boxed{16}$ Étude de suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Étudier la suite (u_n) (variations, limite, ...)
2. En utilisant la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$, et en prouvant qu'elle est géométrique, en déduire une expression de (u_n) en fonction de n.

$\boxed{17}$ On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$, où $p \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0, 1, 2\}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$; montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de n, p et a.
   (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$; montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
   (c) Exprimer u_n en fonction de w_n et t_n, en déduire une expression en fonction de n, p et a.
2. On définit une suite (v_n) par :
   $$v_0 = 1, \qquad v_1 = \mathrm{e}^a$$
   et
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}$$
   (a) Justifier la définition de la suite (v_n) en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_n) = u_n$
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, p et a.
   (d) En déduire la limite de (v_n) en fonction de p et a quand n tend vers $+\infty$.

$\boxed{18}$ analyse-synthèse

On se propose de trouver une suite réelle u vérifiant $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$.

1. On suppose que u existe.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \neq -2$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ est une suite arithmétique. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On note $u_n = f(n)$.
   (a) Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions imposées à u.
   (b) Conclure et trouver la limite de u.
3. Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que u_n soit un nombre entier relatif.

$\boxed{19}$ **moyennes et suites adjacentes**

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
   (b) Déterminer la limite de la suite w.
2. (a) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

3. Montrer que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera ℓ.
4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$

   (a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

   (b) Déterminer la valeur de ℓ.

20 **somme et suite géométrique**
Trouver un nombre rationnel dont le développement décimal illimité est $3,1414141414\ldots$

21 Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$a_1 = \frac{3}{2} \text{ et } a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}.$$

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 1$.
2. Montrer que la suite a n'est pas majorée.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a_{k+1} \leqslant a_n$ alors $a_{k+2} \geqslant a_{k+1}$.
4. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n} + 1$$

5. Trouver un entier k tel que $2024 \leqslant a_k \leqslant 2025$

22 Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{3^k}\right) = (1{+}1)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 sous forme fractionnaire simplifiée.
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, tel que $\ell \in \left[2\,;\, \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right]$.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \ell - u_n$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.
   On se propose dans cette question de démontrer que la suite (s_n) converge.

   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right) = \ln(\ell)$$

   (b) Montrer que, pour tout p dans $\mathbb{N}$ fixé, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_p}\right) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{3^k}\right)$

   (c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question **3a.)**, que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_p}\right) \leqslant \frac{1}{2 \times 3^p}$$

   (d) Déduire de la question précédente que $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2\times 3^p}}\right)$

   (e) Justifier que, pour tout réel x. on a $l - e^{-x} \leqslant x$ et en déduire que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{\ell}{2} \times \frac{1}{3^p}$$

   (f) En déduire la convergence de la suite (s_n).

23 Variations et limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

24

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$
2. En déduire la limite de la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

25 Soit (u_n) la suite $u_n = \sqrt[n]{n}$.

1. Étudier la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer le plus grand terme de la suite (u_n).

26

1. Démontrer que :

$$\forall x \in [1\,;+\infty[,\quad \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \geqslant -\frac{1}{x}$$

On pourra utiliser les variations d'une fonction.

2. Soit φ définie sur $I = [\mathrm{e}\,;+\infty[$ par

$$\varphi(x) = (x+1)^2 \ln x - x^2 \ln(x+1).$$

   (a) Vérifier que la fonction φ est dérivable sur I et démontrer que $\forall x \in I$:

$$\varphi'(x) = 2x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2\ln x + \frac{(x+1)^3 - x^3}{x(x+1)}$$

   (b) En déduire que φ est croissante sur I.

3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, a-t-on :

$$n^{(n+1)^2} \geqslant (n+1)^{n^2}$$

Feuille de TD n°9
Réponses ou Solutions

$\boxed{1}$ 10^4, 10^8, $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

$\boxed{4}$ $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, 0

$\boxed{5}$

```
def seuil(S):
    u=1
    n=0
    while u<=S:
        u=u*1.2
        n=n+1
    return n
```

```
>>> seuil(2)
4

>>> seuil(1000)
38
```

$\boxed{6}$ Récurrence facile, soit en utilisant la croissance de la fonction affine $x \mapsto \dfrac{1}{3}x + 2$, soit en fabriquant les termes suivants par des opérations élémentaires. Limite $\ell = 3$.

$\boxed{8}$ $f'(x) = \dfrac{10}{(4+x)^2} > 0$, donc f est croissante sur $[0\,;\,3]$

Si $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$ alors $f(0) = \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 2 \leqslant 3$

$\ell = f(\ell) \iff \ell$ vérifie $x^2 + x - 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$, or $\ell < \dfrac{11}{7} < 2$, donc $\underline{\ell = 1}$.

$\boxed{10}$

1. (u_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)\,!} > 0$. Et (v_n) décroissante car $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{n(n+1)(n+1)\,!}$.
   De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Donc les suites sont adjacentes, et donc convergentes par théorème.
2. (a) $f(0) = 1$
   (b) $f(1) = u_n \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{e}}$
   (c) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(0 + \dfrac{1}{1\,!} + \dfrac{2x}{2\,!} + \dfrac{3x^2}{3\,!} + \ldots + \dfrac{nx^{n-1}}{n\,!}\right) - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \dfrac{x}{1\,!} + \dfrac{x^2}{2\,!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n\,!}\right) = -\dfrac{x^n}{n\,!}\mathrm{e}^{-x} < 0$ sur $[0\,;\,1]$
   (d) Donc

x	0		1
f	1	$\searrow$	$\dfrac{u_n}{\mathrm{e}}$

   (e) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n}{\mathrm{e}} \leqslant 1 \iff \underline{u_n \leqslant \mathrm{e}}$.
3. (a) $g'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{n\,!} = -\dfrac{x^n}{n\,!}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{n\,!} = \dfrac{1}{n\,!}\left(1 - x^n\mathrm{e}^{-x}\right)$
   Or, $\forall x \in [0\,;\,1]$, $x^n \in [0\,;\,1]$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, donc $\forall x \in [0\,;\,1]$, $\left(1 - x^n\mathrm{e}^{-x}\right) \geqslant 0$ ainsi,

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
g	1	$\nearrow$	$\dfrac{u_n}{e} + \dfrac{1}{n\,!}$

(b) Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{n\,!} \geqslant 1 \iff u_n \geqslant \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{n\,!}$

4. Ainsi, d'après les questions précédentes, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{n\,!} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = \mathrm{e}$