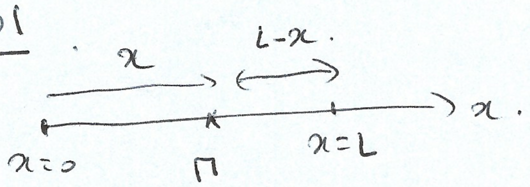
DS6 Correction.

10/03/23

Ex1



1°]

$p_i(x=0;t) = p_0 \cos \omega t + \varphi_i$

$p_i(M;t) = p_i(0;t-\tau) = p_0 \cos(\omega(t-\tau)+\varphi_i)$ $\qquad \tau = \frac{OM}{c} = \frac{x}{c}$.

d'où $p_i(x,t) = p_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{x}{c} + \varphi_i\right)$ on pose $k = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$$\boxed{p_i(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_i)}$$

2°) $p_i(L;t) = p_0 \cos(\omega t - kL + \varphi_i) \rightarrow p_r(L;t) = p_0 \cos(\omega t - kL + \varphi_i + \varphi_r)$

$p_r(x;t) = p_r(L;t-\tau')$ avec $\tau' = \frac{L-x}{c}$.

$p_r(x;t) = p_0 \cos \omega\left(t - \left(\frac{L-x}{c}\right)\right) - kL + \varphi_i + \varphi_r) \Rightarrow$

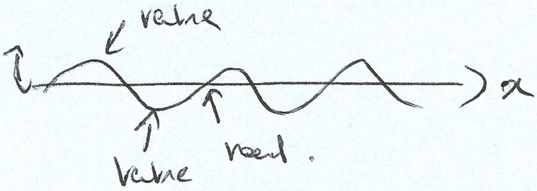
$$\boxed{p_r(x,t) = p_0 \cos(\omega t + kx - 2kL + \varphi_i + \varphi_r)}$$

3°] $p_{tot}(x;t) = p_i(x,t) + p_r(x,t) = 2p_0 \cos\left(kx - kL + \frac{\varphi_r}{2}\right)\cos\left(\omega t - kL + \varphi_i + \frac{\varphi_r}{2}\right)$

à identifier à $p_{tot}(x,t) = A\cos(kx+\alpha)\cos(\omega t + \beta)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 2p_0 \\ \alpha = \frac{\varphi_r}{2} - kL \\ \beta = \varphi_i + \frac{\varphi_r}{2} - kL \end{cases} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c\cdot T} = \frac{\omega}{c}.$$

- $p_{tot}(x,t)$ est une onde stationnaire, son amplitude $A(x) = 2p_0\cos(kx+\alpha)$ dépend de x, donc de la position du point M.
- Onde progressive, tous les points vibrent avec la même amplitude à des instants $\neq$.

$2p_0$ 

Un ventre est défini par

$A(x) = \pm 2p_0$.

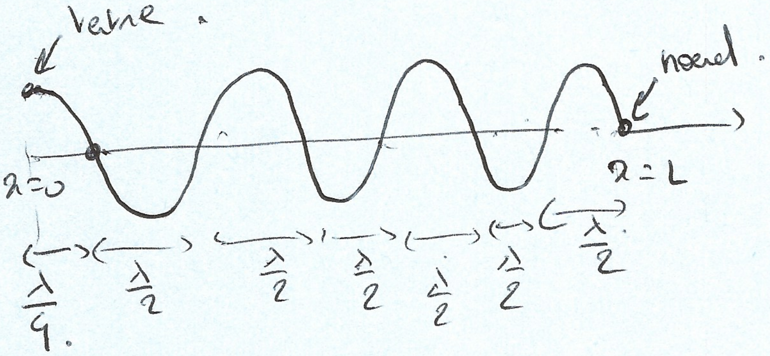
$\cos(kx+\alpha) = \pm 1 \Rightarrow kx_p + \alpha = p.\pi$

$k\Delta x_p = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x_p = \pi \rightarrow \boxed{\Delta x_p = \frac{\lambda}{2}}$ distance entre 2 ventres.

Un noeud est défini par . $A(x) = 0 \rightarrow \cos(kx+\alpha) = 0$.

$kx_p + \alpha = (2p+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Rightarrow k\Delta x_p = \pi \Rightarrow$ $\boxed{\Delta x_p = \frac{\lambda}{2}}$ distance entre 2 noeuds

4].



$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2}$

$\frac{\lambda_n}{4}$: distance entre ventre et un noeud.

$\frac{\lambda_n}{2}$: distance entre 2 noeuds

ici $n = 6$.

$L = \frac{\lambda_n}{4} + n\frac{\lambda_n}{2} = \frac{\lambda_n}{4}(\underbrace{2n+1}_{\text{nombre impair}})$ avec $\lambda_n = c.T_n = \frac{c}{f_n}$.

$L = \frac{c}{4f_n}(2n+1) \Rightarrow \boxed{f_n = (2n+1)\frac{c}{4L}}$.

nb impair

$f_0 = \frac{c}{4L}$ fréquence fondamentale.

5°]. Par le calcul :

$p_r(x,t) = \overbrace{2p_0\cos(kx+\alpha)}^{A(x)}\cos(\omega t+\beta)$.

en $x=0$: $A(0) = \pm 2p_0 \Rightarrow \cos\alpha = \pm 1 \rightarrow \alpha = p\pi$ (0 ou π).

en $x = L$ $2p_0\cos(kL + p\pi) = 0$ $k_nL + p\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

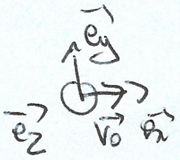
~~Avec p=0~~ $k_n.L = (2n+1-2p)\frac{\pi}{2} = (2(n-p)+1)\frac{\pi}{2}$

$k_N.L = (2N+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_N}.L = (2N+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{L = (2N+1).\frac{\lambda_N}{4}}$.

On retrouve bien la même condition - 2.

Ex2 Rayonnement -

B 1.1. $q>0$ $\qquad \vec{B} = B\vec{e_z}$.



à $t=0$ $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_x}$.

$\vec{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y}$
$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y}$
$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y}$.

$m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

$$q\vec{v}\wedge\vec{B} = q\begin{vmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}0\\0\\B\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}q\dot{y}B\\ -q\dot{x}B\\ 0\end{vmatrix}$$

Proj$/\vec{e_x}$ $\quad \ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y}$ (1)

Proj$/\vec{e_y}$ $\quad \ddot{y} = \frac{-qB}{m}\dot{x}$ (2)

$\omega_c = \frac{qB}{m}$

On pose $\{u = x+iy$; u vérifie (En faisant (1) + i (2)).

$\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c[\dot{y} - i\dot{x}] = -i\omega_c[\dot{x}+i\dot{y}]$

$\ddot{u} + i\omega_c\dot{u} = 0 \rightarrow \dot{u} = Ae^{-i\omega_c t} = v_0 e^{-i\omega_c t}$.

$u(t) = \frac{v_0}{-i\omega_c}e^{-i\omega_c t} + cste = i\frac{v_0}{\omega_c}e^{-i\omega_c t} + cste$ $\qquad$ à $t=0$ $u=0$. $\Rightarrow$ $cste = -\frac{iv_0}{\omega_c}$.

$u(t) = i\frac{v_0}{\omega_c}\left[e^{-i\omega_c t} - 1\right] = i\frac{v_0}{\omega_c}\left[\cos\omega_c t - i\sin\omega_c t - 1\right]$.

$= \frac{v_0}{\omega_c}\left[\sin\omega_c t\right] \cancel{-1} + i\frac{v_0}{\omega_c}(\cos\omega_c t - 1)$

On pose $R = \frac{mv_0}{qB}$ et x et y vérifient

$x(t) = \frac{mv_0}{qB}\sin\omega_c t$.

$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}+1\right)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (y-R)^2 = R^2$

$y(t) = \frac{mv_0}{qB}(\cos\omega_c t - 1)$

Equation d'un cercle de centre $x=0$, $y=R$ et de rayon R.

2°] $d = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2}{qB}\left[m_{U8}V_{08} - m_{U5}V_{05}\right]$. (1)

Conservation de l'énergie mécanique $\qquad 0 + qV_{P1} = \frac{1}{2}m_{U8}V_{08}^2 + qV_{P2}$

$0 + qV_{P1} = \frac{1}{2}m_{U5}V_{05}^2 + qV_{P2}$

$\Rightarrow V_{08}^2 = \frac{2q}{m_{U8}}(V_{P1} - V_{P2}) = -\frac{2qW}{m_{U8}}$ et $V_{05}^2 = -\frac{2qW}{m_{U5}}$ (avec $W<0$ $\vec{E}$ dirigé vers les potentiels décroissants)

$V_{0_8} = \sqrt{\frac{-2qW}{m_{u8}}}$ et $V_{0_5} = \sqrt{\frac{-2qW}{m_{u5}}}$.

d'où (1) devient : $d = \frac{2}{qB}\left[\sqrt{-2qW\cdot m_{u8}} - \sqrt{-2qW m_{u5}}\right]$.

$$d = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{q}\cdot B}\left[\sqrt{m_{u8}} - \sqrt{m_{u5}}\right]\cdot\sqrt{-W}.$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -q\frac{d^2B^2}{8\left[\sqrt{m_{u8}} - \sqrt{m_{u5}}\right]^2}}$$

AN $W = -5{,}8\ kV$.

B-2 Cyclotron

B-2-1 Le mvt est uniforme donc $T_{1/2} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}$ cst lorsque $R\uparrow$.

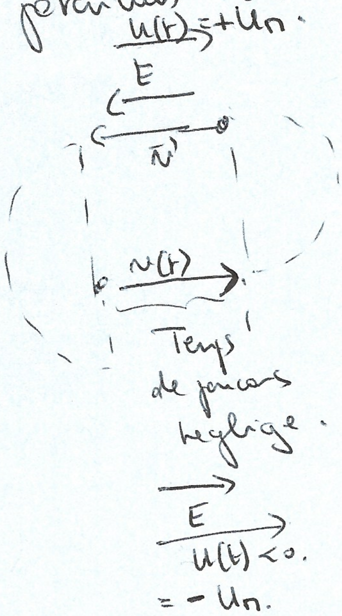
B-2-2 Pour qu'il y ait accélération $\vec{E}$ ds le même sens que $\vec{v}$ or le sens de $\vec{v}$ s'inverse donc $\vec{E}$ aussi. et $\vec{E}$ dirigé vers les potentiels décroissants donc $u(t)$ doit changer de signe.

donc $\frac{T}{2} = T_{1/2} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi}{\omega}$.

$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$ d'où le terme de pulsation cyclotron.

$T_{1/2} = \frac{\pi m}{qB}$

B-2-3



B-2-4 A la sortie du cyclotron $R_s = 50\ cm$. et $R_s = \frac{mV_s}{qB} \rightarrow$

$V_s = \frac{qBR_s}{m}$ et $E_c = \frac{1}{2}m v_s^2 \Rightarrow \boxed{E_{cs} = \frac{1}{2}\frac{e^2B^2R_s^2}{m}}$

B-2-5 A chaque demi tour. $\Delta E_c = q\cdot U_n \Rightarrow \boxed{N = \frac{1}{4}\frac{qB^2R_s^2}{mU_n}}$ AN $N = 60$.

B-2-6 1) $P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}a^2$ et $a = \frac{v^2}{R}$ (mvt circulaire uniforme) $\Rightarrow \boxed{P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c R^2}\cdot v^4}$ $= \alpha$.

2) $E = P_r\cdot T_{1/2} = P_r\cdot\frac{\pi R_s}{v_s} = \alpha R\pi\ (4)\ v^3 = \alpha\cdot\pi\frac{R^4q^3B^3}{m^3} = 4\cdot10^{-30}\ J$

Ex 3 Filtrage - Etude

1] $u_e(t) = U_{em}\cos\omega t$ $u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi_s)$

$U_{em} = 1{,}0\,V$.

fig 1 $\begin{cases} 5T_1 = 500\,ms \rightarrow T_1 = 100\,ms = 10^{-1}s = 0{,}1\,s \Rightarrow f_1 = 10\,Hz. \\ U_{em} = B \Rightarrow \quad G_1 = |H(f_1)| = 1 \end{cases}$

fig 2 $\begin{cases} 5T_2 = 1\,ms \rightarrow T_2 = 0{,}2\,ms = 2\cdot10^{-4}s \rightarrow f_2 = 0{,}5\cdot10^{4}\,Hz = 5\,kHz \\ U_{em} = 1V \quad B = 0{,}5V \rightarrow G_2 = |H(f_2)| = 0{,}5. \end{cases}$

$G_{dB} = 20\log\frac{1}{2} = -6dB$.

fig 3 $\begin{cases} 5T_2 = 100\,\mu s = 10^{-4}s \rightarrow T_2 = 0{,}2\cdot10^{-4}s \rightarrow f_3 = 50\,kHz. \\ B \rightarrow 0 \quad G_3 = |H(f_3)| \rightarrow 0. \end{cases}$

Filtre passe-bas.

2] $u_s(t)$ en retard sur $u_e(t)$ et $\varphi = -2\pi\frac{\Delta t}{T_e}$ avec Δt : décalage temporel entre 2 passages à 0 de $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

$2{,}2\,cm \rightarrow 0{,}2\,ms$
$0{,}5\,cm \rightarrow \Delta t$
$\rightarrow \Delta t \simeq \frac{0{,}5}{11} \simeq 0{,}072\,ms$.

$G(f_c) = 0{,}5$

3) $\rightarrow \varphi = -2\pi\cdot\frac{0{,}072}{0{,}2}\,rad = -\pi\cdot0{,}72\,rad = -2{,}3\,rad$.

$f_1 = 10\,kHz \longrightarrow f_2 = 100\,kHz$

$\boxed{\text{pente} = \frac{-52{,}5-(-12{,}5)}{1\text{ décade}} = -40dB/\text{déc} \\ \text{Passe bas d'ordre 2}}$

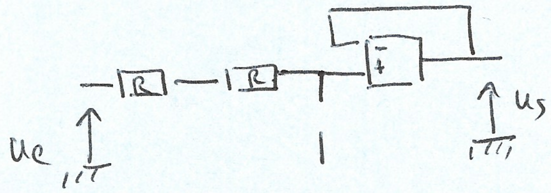
4) $G_{dB} = -12{,}5\,dB \rightarrow G_{2dB} = -52{,}5\,dB$

$G_{max} = 0$ et f_c vérifie $G_{dB}(f_c) = G_{max} - 3dB \Rightarrow \boxed{f_c = 4\,kHz}$

1-2 Etude théorique.

5] BF. $-||- \Leftrightarrow$ (circuit ouvert).

Le circuit devient:



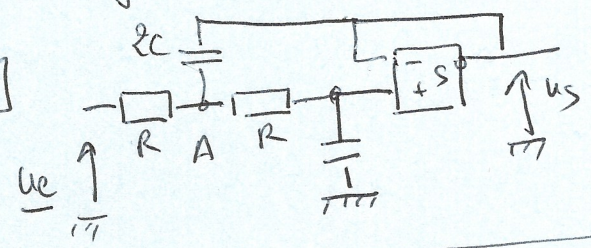
$u_s = v^{\ominus}$

$u_e = v^+ = 2R\,\underset{0}{\underset{\shortparallel}{i^+}} \Rightarrow v^+ = u_e$ } $\Rightarrow u_e = u_s$

HF. $-||- \Rightarrow$ —. donc $v^+ = 0$ et $v_s = v^- \Rightarrow v_s = 0$.

Filtre passe-bas.

6°]



$v^{\ominus} = v_s$ (fil entre $\ominus$ et s).

$$v^+ = \frac{\frac{v_A}{R} + jc\omega \cdot 0}{\frac{1}{R} + jc\omega} \Rightarrow v^+ = \frac{v_A}{1+jRc\omega}$$

et $v^+ = v^- = u_s \Rightarrow \boxed{u_s = \frac{v_A}{1+jRc\omega}}$

$$v_A = \frac{\frac{u_e}{R} + \frac{v^+}{R} + 2jc\omega u_s}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + 2jc\omega} = \boxed{\frac{u_e + u_s(1+2jRc\omega)}{2+2jRc\omega} = v_A}$$

d'où $u_s(1+jRc\omega) = \frac{u_e + u_s(1+2jRc\omega)}{2+2jRc\omega}$

$\Rightarrow u_e = u_s\,[2(1+jRc\omega)(1+jRc\omega) - (1+2jRc\omega)]$

$2(1+jRc\omega)^2 - (1+2jRc\omega)$

$[2[1+2jRc\omega + (jRc\omega)^2] - (1+2jRc\omega)]$

$1 + 2jRc\omega + 2(jRc\omega)^2$.

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1+2jRc\omega + 2(jRc\omega)^2}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

d'où $\boxed{H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ (Filtre non résonant).

7] $$|H|^2 = \frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - \cancel{2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \cancel{2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$

BF $\underline{H} \to H_0 = 1$ $G_{dB} \to Y_{BF} = 0$

HF $\underline{H} \to \dfrac{H_0}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -\dfrac{H_0}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \to G_{dB} \to Y_{HF} = \underbrace{20\log H_0}_{0} - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

$= -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Pente de -40 dB/decade.

Point d'intersection F $\to \begin{cases} \omega = \omega_0 \\ G_{dB} = 0 \end{cases} \to$ On ~~trouve~~ graphiquement $f_0 = 4$ kHz.

Rq $|H| = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}}$ pour $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \omega_0 = \omega_c$.

lorsque $\omega = \omega_0$ $\underline{H} \to \dfrac{H_0}{j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \to \varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ cohérent avec le diagramme.

---

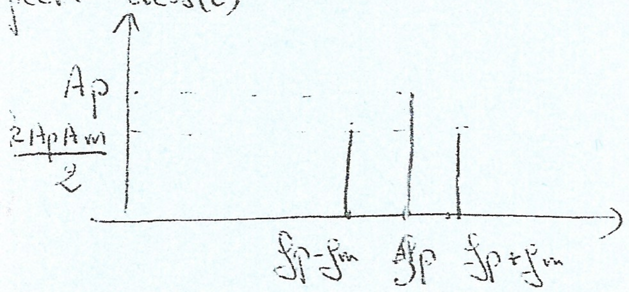
3 Application du filtre. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.

10] $s(t) =$

$A_p \cos 2\pi f_p t + k A_p A_m \cos 2\pi f_m t \cdot \cos 2\pi f_p t$.

$= A_p \cos 2\pi f_p t + \dfrac{k A_p A_m}{2} \cos 2\pi (f_p + f_m) t + \dfrac{k A_p A_m}{2} \cos 2\pi (f_p - f_m) t$.

spectre de $s(t)$



$p(t) = A_p \cos 2\pi f_p t$.

$s'(t) = k\, p(t)\, s(t) = k A_p^2 \cos^2 2\pi f_p t \cdot (1 + k A_m \cos 2\pi f_m t)$.

$= k\dfrac{A_p^2}{2}\left(1 + \cos 2\pi (2f_p) t\right)\left(1 + k A_m \cos 2\pi f_m t\right)$.

$$s'(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{k^2 A_m A_p^2}{2}\cos 2\pi f_m t + k\frac{A_p^2}{2}\cos 2\pi(2f_p)t$$

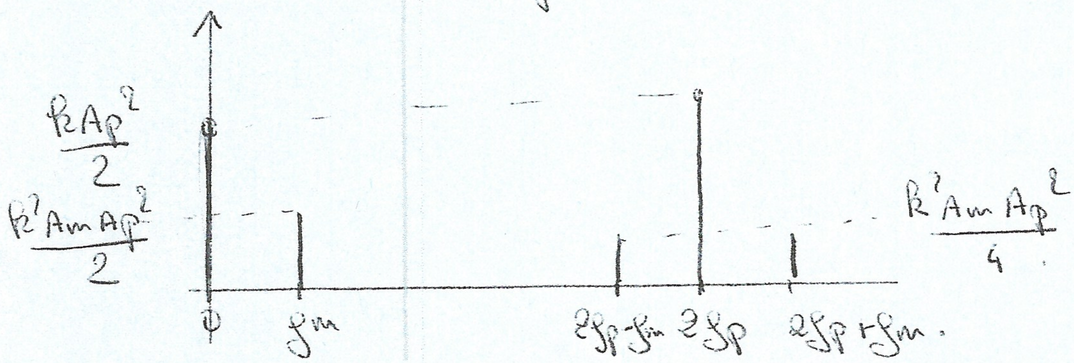
$$+ \frac{k^2 A_m A_p^2}{2}\underbrace{\cos(2\pi 2f_p)t \cos 2\pi f_m t}_{\frac{\cos 2\pi(2f_p - f_m)t + \cos 2\pi(2f_p + f_m)t}{2}}.$$

d'où

$$s'(t) = \frac{kA_p^2}{2} + \frac{k^2 A_m A_p^2}{2}\cos 2\pi f_m t + \frac{kA_p^2}{2}\cos 2\pi(2f_p)t.$$

$$+ \frac{k^2 A_m A_p^2}{4}\cos 2\pi(2f_p - f_m)t + \frac{k^2 A_m A_p^2}{4}\cos 2\pi(2f_p + f_m)t.$$

d'où 5 raies ds le spectre.



puisque $f_c >> f_m$ la composante continue et la composante à la fréquence f_m sont non-modifiées à la sortie du filtre car $H_0 \simeq 1$ et $\varphi \to 0$.

Les 3 composantes à $2f_p - f_m$; $2f_p$; $2f_p + f_m$ sont réduites à 0.

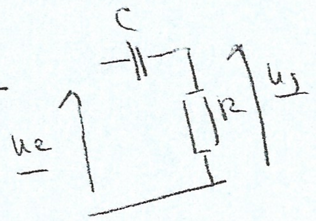
car $20 \log H = G_{dB} \rightarrow H = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ avec $G_{dB} = -80$.

$H = 10^{-4}$ donc l'amplitude de ces composantes est divisée par 10000 !!

$$s''(t) = \frac{k A_p^2}{2} + \frac{k^2 A_m A_p^2}{2} \cos 2\pi f_m t .$$

13] Pour éliminer la composante continue de $s''(t)$, on peut utiliser un filtre passe haut de fréquence de coupure $f_c \ll f_m$.

ex



$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{H_0 \cdot jx}{1 + jx} .$$

et $\omega_c = \frac{1}{RC} \rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC} \ll f_m .$

$\rightarrow \quad RC \gg \frac{1}{2\pi f_m} .$

fréquences sonores $[50\text{Hz}, 5\text{kHz}]$ $\quad RC \gg \frac{1}{2\pi \cdot 50} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{s}.$

ex $C = 1\,\mu F \quad R = 30\,k\Omega$.