

Les calculatrices sont autorisées.

L'épreuve comporte 4 parties indépendantes.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.

Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas ainsi qu'aux réponses aux applications numériques.

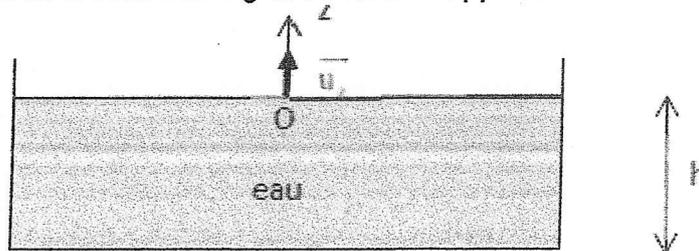
PARTIE A

ETUDE D'UN BASSIN

Dans ce problème, on considère un bassin rempli d'eau sur une hauteur $h = 1$ m. L'eau liquide sera considérée comme un fluide incompressible de masse volumique $\rho_e = 1000$ kg.m⁻³.

On définit pour les questions 1 à 8 un axe Oz ascendant, l'origine étant choisie au niveau de la surface de l'eau, ainsi qu'un vecteur unitaire dirigé vers le haut.

L'accélération de la pesanteur sera notée g et sa valeur supposée constante : $g = 9.8$ m.s⁻².



1. Loi de pression hydrostatique

1.a. En considérant l'équilibre d'une couche d'eau de section S s'étendant entre les cotes z et $z + dz$, démontrer la loi de l'hydrostatique relative à la pression.

ρ_e étant constant, en déduire l'expression de la pression P en fonction de z . On notera P_0 la pression atmosphérique à la cote $z = 0$ où se trouve l'interface air-eau.

1.b. Quelle est la pression maximale à l'intérieur du bassin ?

2. Ordre de grandeur de la pression dans l'eau

2.a. Quelle est la valeur moyenne de la pression atmosphérique ? Donner le résultat en unités du système international.

2.b. Comparer numériquement la pression maximale dans le bassin et la pression atmosphérique.

2.c. Sur quelle profondeur faudrait-il plonger pour doubler la pression ? Le bassin serait-il assez profond ?

2.d. À combien monte la pression au fond des fosses océaniques de profondeur 10 km environ ?

3. Principe d'Archimède

Enoncer et démontrer le principe d'Archimède.

4. Remontée d'une balle de ping-pong du fond du bassin

Une balle de ping-pong de masse $m = 2,3$ g, de rayon $r = 1,9$ cm que l'on considèrera comme une sphère incompressible (enveloppe en celluloïd rigide) est lâchée depuis le fond du bassin en $z = -h$ sans vitesse initiale. Elle est repérée par sa cote $z(t)$. On rappelle que l'origine des z est prise à la surface. La balle est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède dans l'eau et à une force de frottement fluide obéissant à la loi de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la balle.

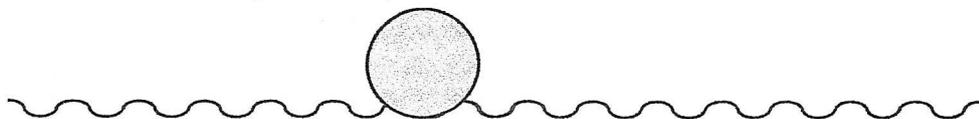
η est la viscosité dynamique du fluide ; elle a pour valeur $\eta = 10^{-3}$ kg.m⁻¹.s⁻¹. La loi de Stokes suppose, pour être appliquée, un écoulement de nombre de Reynolds inférieur à 0,1. Le nombre de Reynolds R_e est défini par la relation suivante :

$$R_e = \frac{2\rho_e v r}{\eta}$$

- Etablir la dimension du nombre de Reynolds.
- Calculer la valeur numérique de la vitesse maximale admissible pour cette balle qui remonte si on veut pouvoir appliquer la loi de Stokes.
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la balle et en déduire $v_z(t)$ puis $z(t)$. On définira un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression littérale. Exprimer la vitesse limite v_{lim} atteinte.
- Calculer numériquement τ et v_{lim} .
- Commenter le résultat et montrer que l'on sort des conditions de validité de la loi de Stokes.

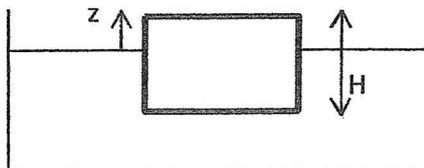
5. Oscillation de la balle de ping-pong sous l'effet d'une onde propagative

La balle de ping-pong de rayon $r = 1,9$ cm est maintenant mise en oscillation verticale à cause du passage d'une onde de déplacement transverse de l'eau. La vitesse de propagation des ondes a pour valeur $c = 0,2$ m.s⁻¹. En exploitant le schéma ci-dessous, évaluer l'ordre de grandeur de la période d'oscillation de la balle ainsi que sa fréquence.



6. Oscillation d'un flotteur à la surface du bassin

Un flotteur cylindrique de masse volumique μ flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e . Le niveau supérieur du flotteur est repéré par sa cote z par rapport au niveau de la surface de l'eau.



On suppose que le diamètre D du flotteur est très grand devant sa hauteur H , de façon à éviter tout basculement. On négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air sur la partie émergée du flotteur. On néglige aussi tout frottement dans cette question. On suppose le bassin de volume suffisamment grand pour négliger les variations du niveau de l'eau.

- 6.a. Exprimer la position d'équilibre z_{eq} . A quelle condition le flotteur flotte-t-il effectivement ?

6.b. Si on perturbe l'équilibre, il apparaît des oscillations du flotteur à la surface.

Ecrire l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $z(t)$.

Exprimer la période T d'oscillation du flotteur ainsi que sa vitesse maximum v_{\max} en fonction de l'amplitude a des oscillations et de la pulsation ω_0 des oscillations.

6.c. Calculer T et v_{\max} pour $\mu = 500 \text{ kg.m}^{-3}$, $H = 0,1 \text{ m}$ et $a = 5 \text{ cm}$.

7. Amortissement des oscillations du flotteur

Concernant le mouvement du flotteur précédent, on prend maintenant en compte une légère force de frottement fluide modélisée par $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où α est une constante.

7.a. On définit $Z = z - z_{\text{eq}}$. Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par $Z(t)$.

7.b. L'équation ayant la forme canonique : $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$,

Identifier les constantes ω_0 et Q et préciser leurs unités.

A quelle condition la solution peut-elle se mettre sous la forme : $Z(t) = Z_0 e^{-At} \cos(\omega_p t + \phi)$?

Donner les expressions de A et ω_p

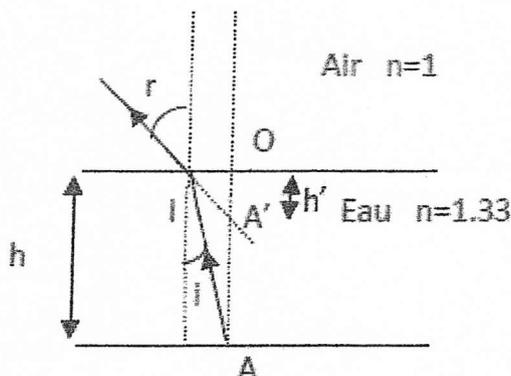
Montrer que si le facteur de qualité $Q \gg 1$ alors $\omega_p \approx \omega_0$, cas dans lequel nous nous plaçons.

7.c. Au bout de trois oscillations, on constate que les oscillations du flotteur ont disparu. Quel est l'ordre de grandeur du facteur de qualité ?

8. Vue du fond du bassin

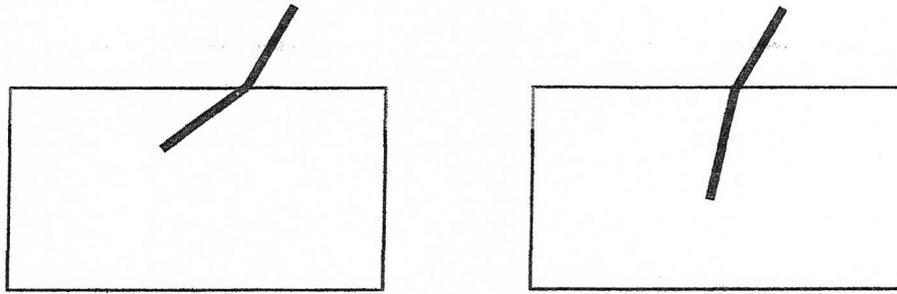
Le fond du bassin se trouve à une profondeur h . À quelle profondeur $h' = |OA'|$ un observateur à l'aplomb du bassin, voit-il le fond ? Utiliser le schéma ci-dessous pour répondre à cette question. L'eau est un milieu d'indice $n_e = 1,33$.

On considère les angles petits de sorte que sinus, tangente et angle en radians puissent être confondus. On prendra l'indice de l'air $n = 1$.



9. Résolution de problème : bâton dans l'eau

Un bâton incliné par rapport à la verticale est partiellement immergé, il paraît cassé. Lequel des deux schémas correspond à la réalité expérimentale ? Reproduire le schéma correct sur la copie en y ajoutant un tracé de rayons lumineux issus d'un point immergé du bâton qui justifie le choix effectué.

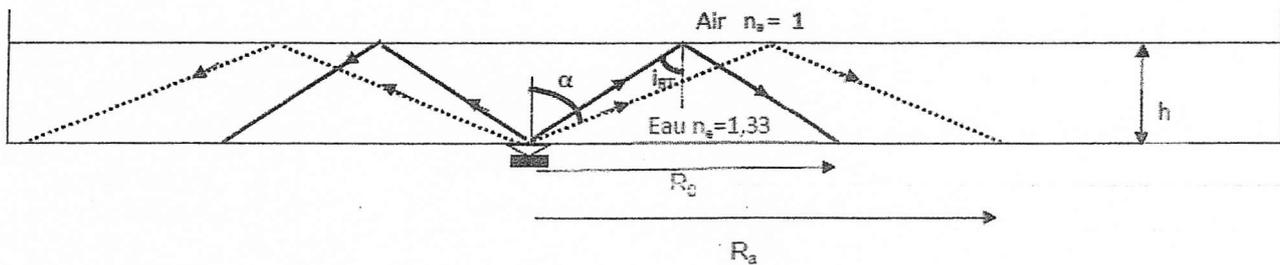


10. Eclairage du bassin

Une lampe étanche est posée au fond du bassin de hauteur h et éclaire vers le haut avec un angle d'ouverture totale 2α de 120° . On constate que l'éclairage du fond du bassin correspond à un disque et une auréole adjacente et concentrique, tous deux lumineux.

- 12.a. Quel est le rayon R_0 du disque ? L'exprimer en fonction de n_e et de h uniquement.
- 12.b. Laquelle de ces deux structures est la plus lumineuse ?
- 12.c. Quel est le rayon externe R_a de l'auréole ?

On tient compte du phénomène de réflexion totale du rayon issu de la lampe vers l'interface eau-air. i_{RT} est l'angle limite de réflexion totale pour un rayon lumineux se propageant de l'eau vers l'air.



PARTIE B

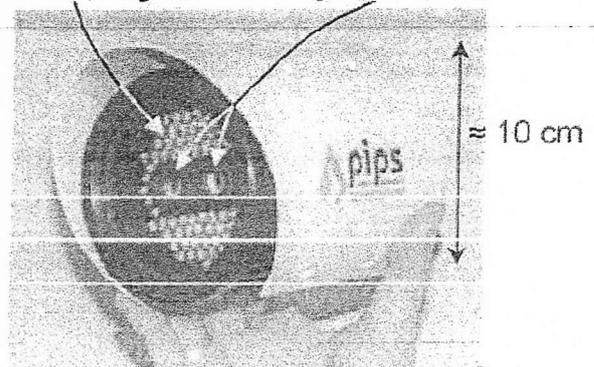
PROBLEME D'OPTIQUE : CAMERA DE CONTROLE DES PLAQUES D'IMMATRICULATION

Pour diminuer le nombre de véhicules circulant dans le centre ville et réduire ainsi les embouteillages, la pollution et le bruit qu'ils engendrent, plusieurs grandes agglomérations (Londres, Singapour, Stockholm) utilisent un système de péage urbain.

Différentes technologies sont mises en oeuvre pour détecter les véhicules entrant dans la zone de circulation taxée. Le système londonien, appelé London Congestion Charge (mis en place en 2003) utilise un réseau de 500 caméras installées à chaque point permettant d'entrer ou de sortir de la zone payante. Les images obtenues sont ensuite analysées par un algorithme LAPI (lecture automatique des plaques d'immatriculation) qui génère une liste des véhicules ayant circulé dans le centre ville, ce qui déclenche la facturation d'une taxe.

Ces systèmes doivent être robustes, peu coûteux, ne nécessiter aucun réglage et être fonctionnels dans des conditions de luminosité très variées. Le modèle retenu (ci-contre) comporte deux caméras identiques : l'une enregistrant dans le domaine visible et l'autre dans le proche infrarouge grâce à un filtre stoppant les radiations visibles. Un ensemble de diodes électroluminescentes (DEL) émettant des flashes de longueur d'onde respective 810 nm et 950 nm entoure les caméras et permet d'illuminer la plaque d'immatriculation.

DEL infrarouges Objectifs des caméras



caméra P362 de la société PIPS®

Les spécifications du constructeur sont les suivantes :

Le capteur CCD (Charge Coupled Device) de ces caméras est un rectangle de largeur 5,0 mm et de hauteur 3,9 mm, découpé en pixels qui sont des carrés tous identiques, de côté $a = 7,00 \mu\text{m}$.

Pour réduire le coût, les risques de panne et les réglages lors de l'installation, ces caméras ont une distance focale image f' fixe. Le constructeur propose différents modèles destinés à enregistrer les plaques d'immatriculation à une distance de mesure déterminée L . Dans ce problème, on étudie un modèle avec $f' = 16 \text{ mm}$ et $L = 9,0 \text{ m}$.

La norme britannique concernant les plaques d'immatriculation est la suivante :

Les plaques doivent mesurer 110 mm de hauteur et 520 mm de largeur. Les caractères doivent avoir une hauteur de 79 mm et une largeur de 50 mm, l'épaisseur du trait étant fixée à 14 mm.



Rappel des relations de conjugaison et de grandissement

Pour un objet (AB), d'image (A'B') à travers une lentille mince de centre optique O, de foyer objet F et foyer image F', de distance focale image f' et de distance focale objet $f = -f'$.

- Relations de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$; $\gamma = -\frac{f}{FA} = -\frac{F'A'}{f'}$

- Relations de Newton : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$; $\gamma = \frac{OA'}{OA}$

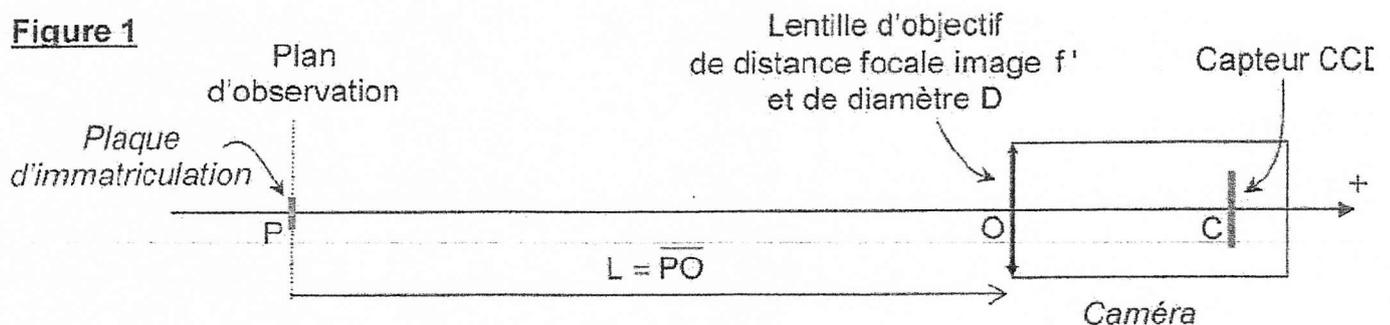
A / DIMENSIONNEMENT DES CAMERAS

Les caméras sont identiques et constituées d'une lentille d'objectif de distance focale image f' qui forme sur le capteur CCD une image de la plaque d'immatriculation.

La figure 1 illustre cette configuration (les échelles relatives ne sont pas respectées).

- A1. Donner la condition que doivent vérifier f' (distance focale image de la lentille) et PC (distance entre l'objet réel et son image réelle) pour que cette opération soit possible. Comment s'appelle la réalisation de l'image réelle d'un objet réel ?

Figure 1



- A2. Exprimer la distance \overline{OC} en fonction de $L = \overline{PO}$ et $f' = \overline{OF'}$. Justifier pourquoi la lentille doit nécessairement être convergente.
- A3. Ecrire le grandissement γ en fonction de L et f' , puis calculer sa valeur pour le modèle de caméra étudié.
- A4. En déduire les dimensions du champ de vue dans le plan d'observation. Est-il suffisant d'installer une caméra par rue permettant d'accéder au centre ville ?
- A5. Déterminer la taille de l'image d'un des caractères de la plaque d'immatriculation sur le capteur CCD en micromètres, puis en pixels.
- A6. Le dimensionnement de la caméra est imposé par une valeur optimale de γ qui repose sur un compromis entre deux contraintes antagonistes : préciser lesquelles.
- A7. Quels problèmes se poseraient si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible ? Quels sont les avantages à filmer une seconde image en infrarouge ?

Les lentilles de ces caméras ont un diamètre $D = 1,00$ cm. Elles se comportent donc comme un pupille circulaire qui diffracte la lumière. L'image d'une source ponctuelle n'est donc pas un point mais présente une certaine étendue spatiale due à la diffraction.

- A8. Calculer l'ordre de grandeur de la largeur de la tache de diffraction de l'image d'un point sur le capteur CCD pour le rayonnement infrarouge utilisé (il n'est pas demandé de calcul complet, ni de formulation exacte). Comparer ce phénomène à la pixellisation de l'image. Limite-t-il la résolution ?

B / PROFONDEUR DE CHAMP

Bien que ces caméras ne disposent pas de dispositif de mise au point (la distance focale est fixe), il est néanmoins possible de visualiser des plaques d'immatriculation qui ne sont pas rigoureusement situées à la distance L spécifiée par le constructeur.

Le but de cette partie est de déterminer la profondeur de champ Z , c'est-à-dire la longueur de la zone de l'espace où l'objet peut être placé afin que la caméra en fournisse une image considérée comme nette.

Le document-réponse en annexe, à rendre avec la copie, comporte une figure dont le but est d'illustrer le phénomène. Les constructions ne sont pas à l'échelle. Le diamètre de la lentille est $D = 1,00 \text{ cm}$.

Sur cette figure, la position P_0 correspond à la position d'un point-objet à la distance L de la lentille, et dont l'image est en C_0 sur le capteur CCD. On s'intéresse à un objet P_1 placé à une distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ en aval de P_0 .

B1. Compléter cette figure en représentant le trajet des deux rayons lumineux issus de P_1 et frappant la lentille en deux points diamétralement opposés. Son image est notée C_1 .

Ce faisceau ne forme pas une image ponctuelle sur le capteur mais un disque de diamètre d_1 qui doit être inférieur à la taille a d'un pixel pour que l'image soit nette.

B2. Montrer que le diamètre de la tache image peut s'exprimer sous la forme :

$d_1 = \beta \frac{f' \Delta_1}{(L-f')(L-\Delta_1)}$ où β est un facteur à expliciter. Pour cela, on écrira les relations de conjugaison pour les couples de points conjugués (P_0, C_0) et (P_1, C_1) , ainsi qu'une relation géométrique sur la figure précédente.

Si le point objet se trouve à une distance $\Delta_2 > 0$ en amont de P_0 (c'est-à-dire $\overline{P_0P_2} = -\Delta_2$, on obtient une tache de diamètre $d_2 = \beta \frac{f' \Delta_2}{(L-f')(L-\Delta_2)}$ avec le même facteur β .

B3. Simplifier les expressions de d_1 et d_2 sachant que $f' \ll L$.

B4. Exprimer, en fonction de a, L, D et f' , les distances $\Delta_{1\text{lim}}$ et $\Delta_{2\text{lim}}$ telles que la tache image sur le capteur ait un diamètre égal à la taille d'un pixel.

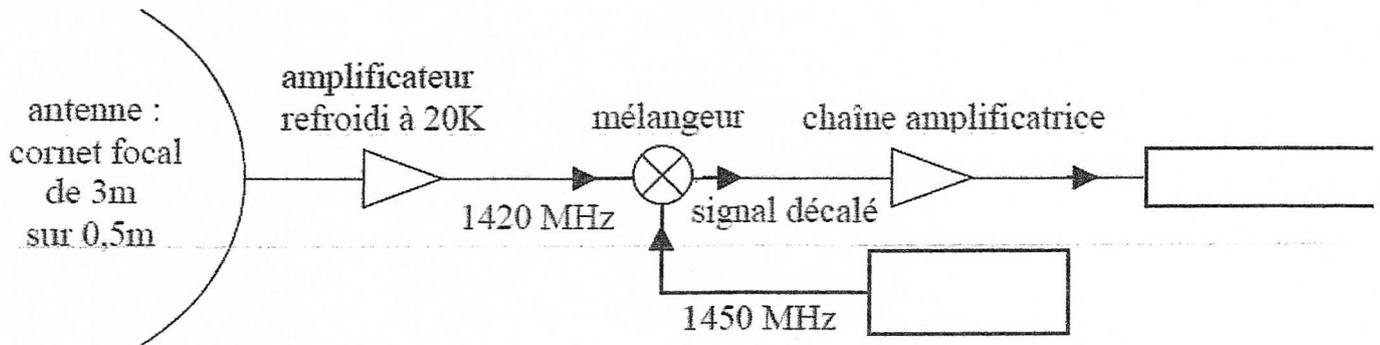
B5. Calculer leurs valeurs numériques et en déduire celle de la profondeur de champ. Commenter.

PARTIE C

PROBLEME D'ELECTRODINETIQUE : SIMULATION D'UN ELEMENT DE RADIOTELESCOPE

Inauguré en 1965, le radiotélescope de Nançay a été créé pour étudier le décalage Doppler de la raie 21cm de l'atome d'hydrogène due au couplage spin nucléaire- spin électronique. C'est un moyen privilégié d'étude de la cinématique de l'hydrogène interstellaire, et donc des mouvements dans l'univers.

De 1956 à 1967, de nombreux chercheurs ont travaillé à la très délicate mise au point de la chaîne de réception suivante.



On se propose de reproduire simplement le principe d'un mélangeur en TP en se plaçant 6 décades plus bas en fréquence.

1. Dédoublément de fréquence

On a deux tensions : $a(t) = A\sqrt{2} \cos(2\pi f_a t)$ $f_a = 1420 \text{ Hz}$
 $e_0(t) = E_0\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ $f_0 = 1450 \text{ Hz}$

mises aux entrées d'un multiplieur ; on obtient en sortie une tension : $m(t) = a(t)e_0(t)$.

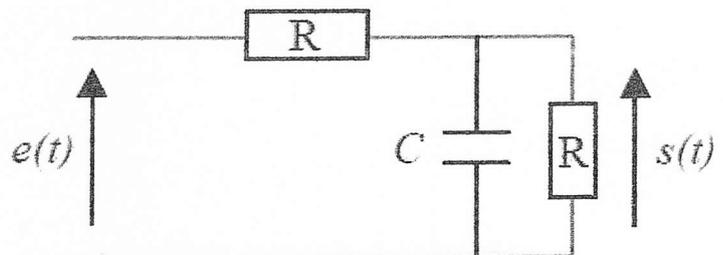
Démontrer que $m(t)$ est la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquence f et $f' > f$:

$$m(t) = M[\cos(2\pi f t + \varphi_0) + \cos(2\pi f' t + \varphi_0)]$$

Calculer numériquement f et f' .

2. Filtrage

On utilise le filtre suivant :



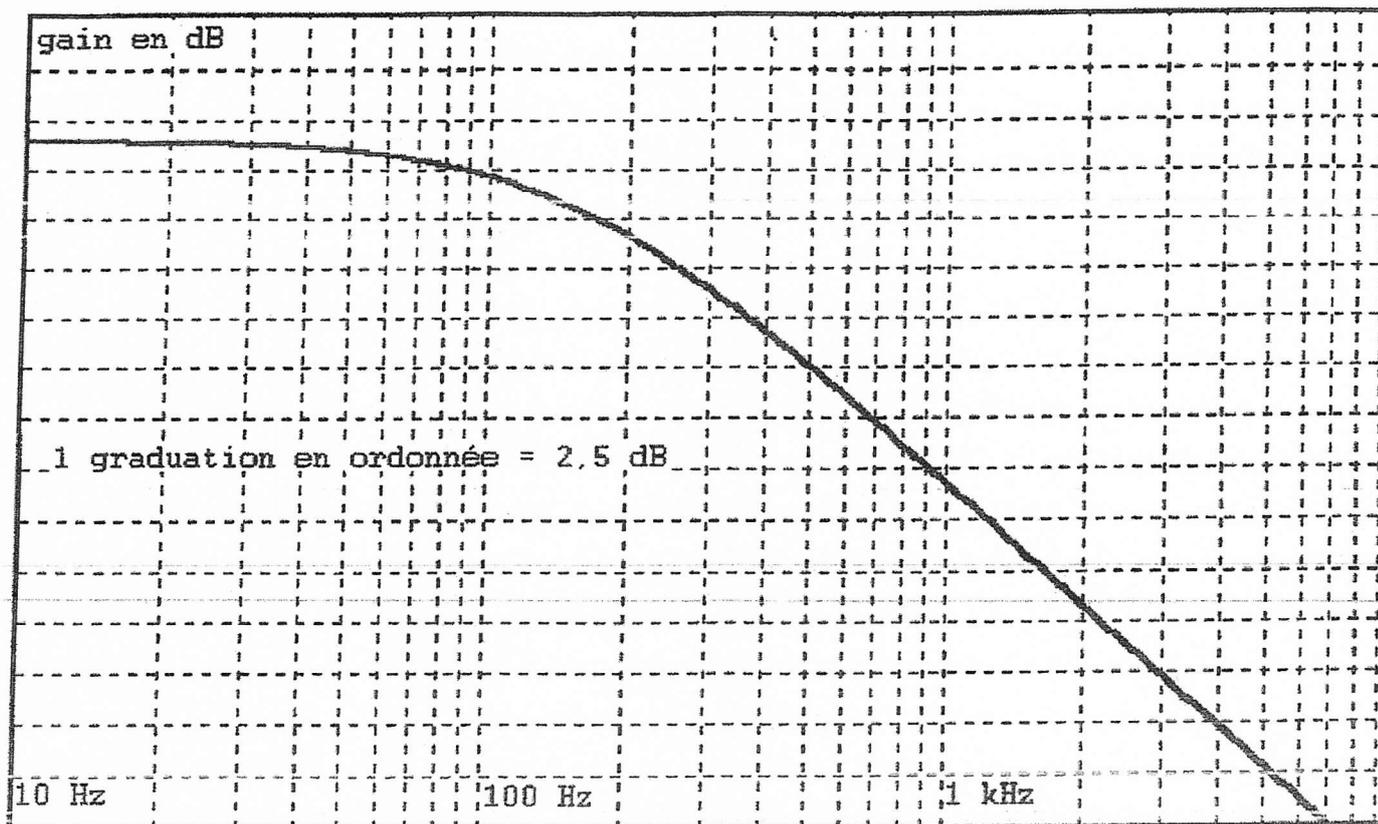
2.a. En effectuant un schéma équivalent en BF

(basse fréquence), puis un autre en HF (haute fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre.

2.b. Déterminer la fonction de transfert $H(x)$ de ce filtre en fonction de $x = \omega RC$.

2.c. Déterminer sa pulsation de coupure ω_c , en fonction de R et C .

2.d. On a tracé page suivante le diagramme de Bode en gain de ce filtre. Déterminer un ordre de grandeur du produit RC .



2.e. En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ?

Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ?

Vers quelle valeur tend alors le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$?

3. Le mélangeur

On place à l'entrée de ce filtre le signal $m(t)$.

La sortie est alors $s(t) = S \cos(2\pi f t + \varphi_s) + S' \cos(2\pi f t + \varphi'_s)$.

3.a. Déterminer la valeur numérique de $\frac{S}{S'}$ à partir du diagramme de Bode.

3.b. Sachant que l'atténuation de la véritable chaîne de réception est bien supérieure, en déduire la valeur de la fréquence du *signal décalé* de la chaîne originale.

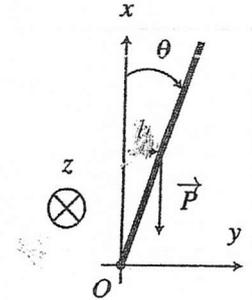
PARTIE D

Chute d'un arbre.

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol et décrit une rotation autour de l'axe Oz . On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas. On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe

$$Oz : I = \frac{1}{3}mL^2$$

A $t=0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile.



1- Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ .

2- En appliquant une méthode énergétique, déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de g, L et θ et montrer que $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$

3- Montrer que cette relation peut être réécrite : $\sqrt{\frac{3g}{L}} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$

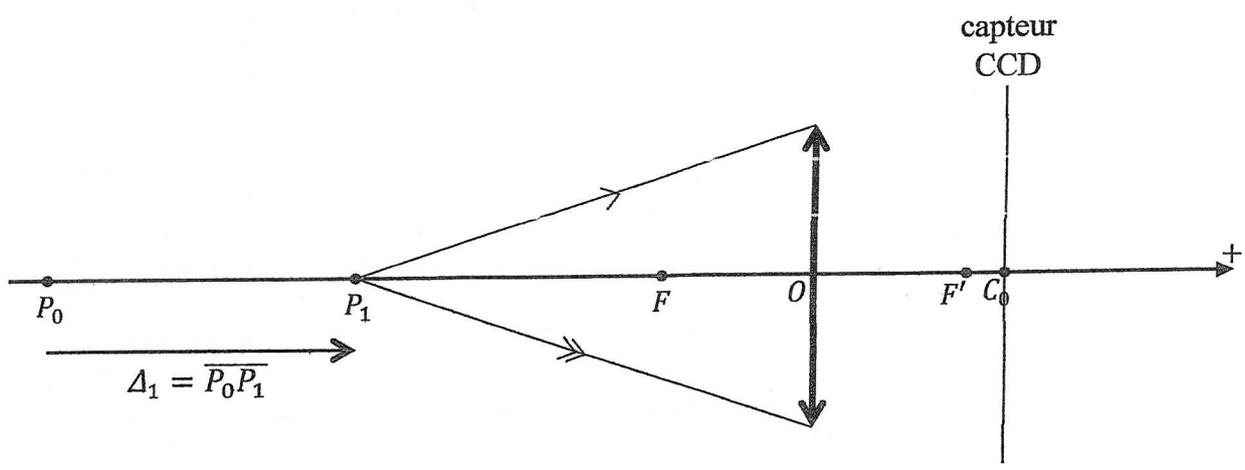
4- Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30m .

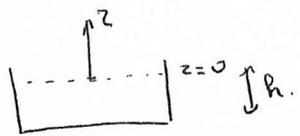
$$\text{Données : } g = 10 \text{ms}^{-2} \text{ et pour } \theta_0 = 5^\circ : \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = 5,1$$

5- Calculer les composantes polaires de la force de contact s'exerçant sur l'arbre en O en fonction de l'angle θ .

M

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE





Fond du bassin repéré par $z = -h$.

1] loi de Pascal hydrostatique.

On considère une couche d'eau de section S s'étendant entre les côtés z et $z+dz$ est en équilibre sous l'action des forces de pression exercées par l'eau environnante et son poids \Rightarrow

$$\vec{dF} + \rho S dz \cdot \vec{g} = \vec{0} \quad \text{Pour que l'équilibre soit possible, } \vec{dF}$$

doit être dirigée suivant la verticale \Rightarrow

$$\vec{dF} = dF_z \vec{e}_z = -\rho(z+dz) \cdot S \vec{e}_z + \rho(z) \cdot S \vec{e}_z$$

$$= [\rho(z) - (\rho(z) + \frac{d\rho}{dz} dz)] S \vec{e}_z = -\frac{d\rho}{dz} dz \cdot S \vec{e}_z \quad (= -\gamma dz)$$

$$d'a \quad \left| \frac{dP}{dz} = -\rho g \right|$$

$$P(z) = -\rho g z + \text{cte} \quad \text{et à } z=0 \quad P = P_0 \quad d'a \quad \text{cte} = P_0$$

$$\left| P(z) = P_0 - \rho g z \right| \quad (\text{Rq } z < 0 \text{ ds le bassin } \Rightarrow P(z) \uparrow \text{ avec la profondeur})$$

$$h = 1 \text{ m} \Rightarrow P(z=-h) = P_0 + \rho g h = P_0 + 10^3 \cdot 9.8 \cdot 1 = P_0 + 9.8 \cdot 10^3$$

$$\left| P(z=-h) \approx 1,1 P_0 \right|$$

2. Ordre de grandeur de la pression ds l'eau.

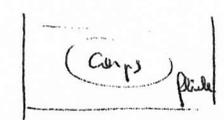
2.a. $P_0 \approx 1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

2.b. $P_{\text{mer}} \approx 1,1 \text{ atm}$

2.c. $h = 10 \text{ m}$ la pression double.

2.d. $h = 10 \text{ km}$ $P = 1004 \text{ bar}$

immersion



On imagine que l'a remplace le corps par un volume de fluide immergé. Ce dernier est en équilibre puisque l'ensemble du fluide est au repos. On il est soumis à son poids $\rho g \cdot V_{\text{imm}} \vec{g}$ et la résultante des forces de poussée (\vec{F}_{Arch}) d'o $\vec{F}_{\text{Arch}} + \rho g \cdot V_{\text{imm}} \vec{g} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \left| \vec{F}_{\text{Arch}} = -\rho g \cdot V_{\text{immergé}} \vec{g} \right| \rightarrow \text{force s'exerce sur le corps.}$$

2] $Re = \frac{2\rho v r}{\eta}$ avec $\|\vec{F}_R\| = 6\pi\eta r v \Rightarrow [Re] = \frac{[F]}{[\eta][v]r}$

d'o $[Re] = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{L \cdot L^{-1}T^{-1}} = \eta L^{-1}T^{-1}$ et $[Re] = \frac{\rho L^{-3} \cdot L T^{-1} \cdot L}{\eta L^{-1} T^{-1}} = \frac{L^2 T^{-1}}{L^{-1} T^{-1}} = L^3 T^{-1}$

Re est sans dimension.

$$| Re < 91 \Rightarrow \left| \frac{v < \frac{91 \cdot \eta}{2 \rho r}}{2 \rho r} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-1} \right|$$

$$m \vec{a} = \vec{P}_{\text{Arch}} + \vec{F}_{\text{Arch}} + \vec{F}_{\text{Stokes}}$$

$$m \vec{a} = m \vec{g} - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$$



projeté suivant \vec{e}_z

$$m \ddot{z} = -mg + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 g - 6\pi\eta r \dot{z} \Rightarrow \left| \ddot{z} + \frac{6\pi\eta r}{m} \dot{z} = g \left[\frac{4\pi\rho r^3}{3m} - 1 \right] \right|$$

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$$

$$v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + S_p \quad \text{et} \quad S_p = \frac{g \left[\frac{4\pi\rho r^3}{3m} - 1 \right]}{6\pi\eta r} \cdot m = \left| \tau g \left[\frac{4\pi\rho r^3}{3m} - 1 \right] \right|$$

o $v_2 = 0 \rightarrow A = -S_p$

$$v_2(t) = v_{\text{lim}} \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] = \dot{z}$$

$$\left| = g \left[\frac{4\pi\rho r^3}{3m} - 1 \right] = v_{\text{lim}} \right|$$

à t=0 z = -h (général du bassin) → -h = New. z + cste.

d'après $z(t) = \text{New} \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - h$

d) AN $\tau = 6,4 \text{ s}$
 $\text{New} = 7,2 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1} > 2 \cdot 10^6 \Rightarrow$ Autre modèle à employer.

Osillation de la bulle de Ping-Pong.

Echelle $z = 1,9 \text{ cm}$ comparé à $1,5 \text{ cm}$ sur le schéma.

Sur le schéma 1 cm comparé à $\left(\frac{2 \times 1,9}{1,5} \right) \text{ cm}$.

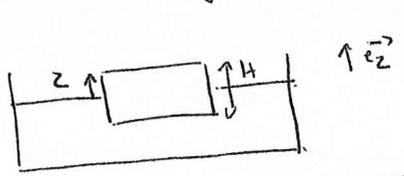
$1,5 \lambda \text{ cm}$, $12,8 \text{ cm}$ sur le schéma

$\lambda = \frac{12,8}{1,5} \cdot \frac{2 \cdot 1,9}{1,5} = 2,2 \text{ cm} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{c} = \frac{2,2 \cdot 10^{-2}}{0,2} = 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ s} = 0,11 \text{ s}$

→ d'après $f = 10 \text{ Hz}$, $T = 91 \text{ s}$, $\lambda = 8,2 \text{ cm}$.

Osillation d'un flotteur à la surface du bassin.

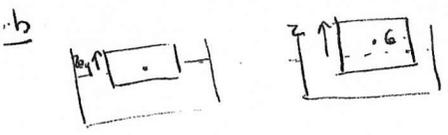
a) Eq



$\vec{z} = \vec{F} = \vec{0}$
 $\vec{F}_{Arch} + \vec{P} = \vec{0}$
 $\left[-\rho_e (H - z_{eq}) \cdot \frac{\pi D^2}{4} + \frac{\pi D^2}{4} \cdot H \cdot \mu \right] \vec{g} = \vec{0}$

$H - z_{eq} = H \cdot \frac{\mu}{\rho} \rightarrow z_{eq} = H \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \right)$

Le flotteur flotte si $z_{eq} > 0 \Rightarrow \mu < \rho$.



$m \vec{a}_G = \vec{P}_{Arch} + \vec{P}_{Arch}$ en pos $\vec{e}_z' = \vec{e}_z$
 $m \ddot{z} = -\frac{\pi D^2}{4} \mu g + \rho_e (H - z) \cdot \frac{\pi D^2}{4} g$
 $m \ddot{z} + \rho_e \frac{\pi D^2}{4} g z = \left(-\frac{\pi D^2}{4} \mu g + \rho_e \cdot H \right) g$

d'après $m \ddot{z} + \rho_e \frac{\pi D^2}{4} g z = \rho_e \frac{\pi D^2}{4} z_{eq} g$ et $m = \mu \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot H$.

$\ddot{z} + \frac{\rho_e g}{\mu \cdot H} z = \frac{\rho_e g}{\mu \cdot H} z_{eq}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_e g}{\mu \cdot H}}$ et $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu \cdot H}{\rho_e g}}$

et $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{eq}$ à t=0
 avec A l'amplitude des oscillations → $\omega_{amp} = A \omega_0$
 AN $T = 0,4 \text{ s}$, $\omega_{amp} = 0,7 \text{ ms}^{-1}$

7] Amortissement:

$\vec{F} = -\alpha \vec{v} \rightarrow$ l'éq. devient
 $\ddot{z} + \omega_0^2 z + \frac{\alpha}{m} \dot{z} = \omega_0^2 z_{eq} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \omega_0^2 (z - z_{eq}) = 0$

En posant $Z = z - z_{eq}$, $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$ d'après l'éq.

$\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$ avec $\frac{\alpha \omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow$

$Q = \frac{m \omega_0}{\alpha}$

$\omega_0 =$ pulsation propre (oscillations sans amortissement) en rad.s^{-1}
 $Q =$ facteur de qualité sans dimension.

La solution proposée comparé au régime pseudo-périodique - avec Résultante: est solution → $\lambda^2 + \frac{\alpha \omega_0}{m} \lambda + \omega_0^2 = 0$.

$\Delta = \frac{\alpha \omega_0^2}{g^2} - 4 \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$

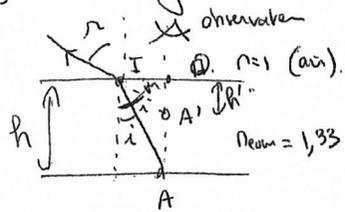
→ $\lambda = \frac{-\frac{\alpha \omega_0}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4m^2} - \omega_0^2}}{2} = -\frac{\alpha \omega_0}{2m} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

→ $z(t) = z_0 e^{-\frac{\alpha \omega_0}{2m} t} \cos(\omega_p t + \varphi)$ où z_0 et φ sont les cts d'intégration
 $A = \frac{\alpha \omega_0}{2Q}$ et $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

si $Q \gg 1$ $\frac{1}{4Q^2} \ll 1 \Rightarrow \omega_p \approx \omega_0$

$$e^{-\frac{a_0 t}{2\tau}} = 10^{-2} \rightarrow \frac{a_0 t}{2\tau} = -\ln 0.01 \rightarrow \varphi = -\frac{a_0 \cdot 3T_0}{2 \cdot \ln 0.01} \approx 3.$$

i) Vue du fond du bassin



d'observation voit A'

$$\frac{h'}{h} = \frac{\tan r}{\tan i} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{eau}}$$

$$\Rightarrow h' = h \cdot \frac{\tan r}{\tan i} \approx h \cdot \frac{1}{n_{eau}} = \frac{h}{n_{eau}}$$

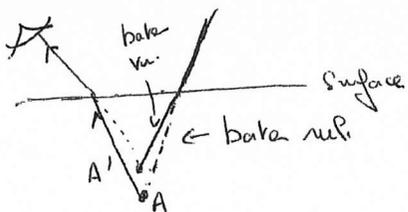
$$n_{eau} \sin i = n_{air} \sin r \rightarrow n_{eau} \cdot i = n_{air} \cdot r \Rightarrow \frac{i}{r} = \frac{1}{n_{eau}}$$

$$\left| h' = \frac{h}{n_{eau}} \right|$$

$$AN \quad R' = \frac{1}{1.33} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} \rightarrow \left| R' = 0.75m \right|$$

Résolution de Pb

Chaque point du batar immergé est vu sous un angle de la surface de l'eau par l'observateur \rightarrow selon 1 corrélation.



i) Eclairage du bassin.

si $i > i_c \rightarrow$ le rayon réfracté émerge et une faible partie est réfléchi.

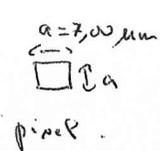
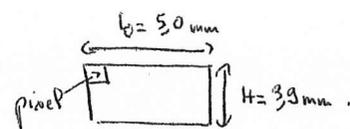
$$\sin i_c = \frac{1}{n} = \frac{R_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{R_0}{2}\right)^2}} \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{R_0^2}{4R^2 + R_0^2}$$

$$n^2 R_0^2 = 4R^2 + R_0^2 \Rightarrow \left| R_0 = \frac{2R}{\sqrt{n^2 - 1}} \right|$$

si $i > i_c$ il y a réflexion totale \Rightarrow au-delà + lumineuse. $\tan \alpha = \frac{R_0}{2R} \Rightarrow \left| R_0 = 2R \tan \alpha \right|$

Voie 1

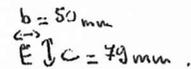
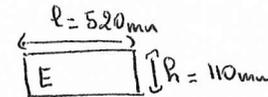
Camera CCD



$$g' = 16 \text{ mm}$$

$$\overline{OP} = -L \text{ avec } L = 90 \text{ m}$$

Caractéristiques de l'objet.



A) Dimensionnement des caméras.

1) Projeté possible si $PC > 4g'$

$$2) \frac{1}{OC} - \frac{1}{OP} = \frac{1}{g'} \rightarrow \overline{OC} = \frac{g' \cdot \overline{OP}}{g' + \overline{OP}} = \frac{-Lg'}{g' - L} \rightarrow \left| \overline{OC} = \frac{Lg'}{L - g'} \right|$$

Une lentille divergente donnerait une image virtuelle d'un objet réel.

$$3) \alpha = \frac{OC}{OP} = \frac{Lg'}{(L - g') \cdot (-L)} \Rightarrow \left| \alpha = -\frac{g'}{L - g'} < 0 \right| \quad AN \quad \left| \alpha = -\frac{1.6 \cdot 10^{-3}}{9 - 1.6 \cdot 10^{-3}} = -1.7 \cdot 10^{-3} \right|$$

4) Champ de vue = partie de l'espace objet vue par la caméra.

En divisant les dimensions du capteur par α , on obtient un champ de vue de largeur $\frac{L \cdot g'}{\alpha} = 3.3 \text{ m}$ et de hauteur $\frac{H}{\alpha} = 2.3 \text{ m}$. Ce champ de vue est de l'ordre de la dimension d'un véhicule. S'il y a plusieurs vues, il faut plusieurs caméras.

5) En multipliant les dimensions d'un caractère par α , on obtient $87.5 \mu\text{m} \times 138 \mu\text{m}$, soit 13×21 pixels.

6) lorsque $\alpha \uparrow$, l'image d'un caractère augmente, mais le champ de vue se réduit.

à la valeur retenue réalisée en compromis entre le champ de vue de la caméra de la voiture et la taille de l'image qui nécessite un quel nombre de pixels.

7) Pour le visuel, les images ne sont pas exploitables la nuit lorsque les plaques

$$g'_{\text{max}} \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad r = g' \theta = g' \cdot 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

$$r = 1,22 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5} \approx 2 \mu\text{m}$$

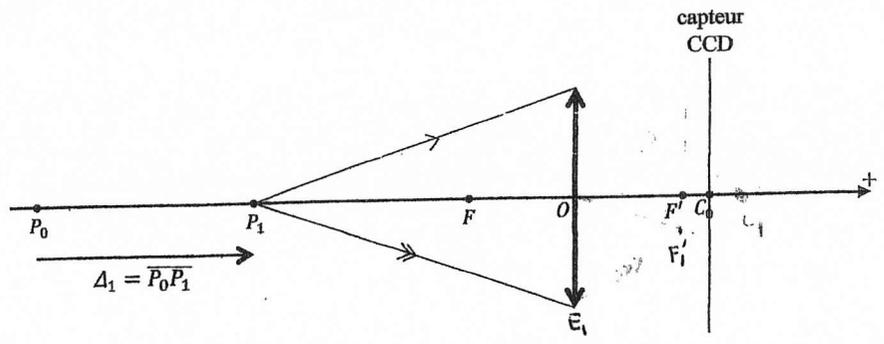
Pas le diamètre de la tache de diffraction est de l'ordre de μm donc de l'ordre de grandeur de la taille d'un pore \rightarrow la limite.

Profondeur de champ.

$$\text{avec } g' = 16 \text{ mm} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda = 10 \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m}$$

$$B^2 = 10^{-2} \text{ m}$$



Pour tracer le rayon émergent $E_1 E_1'$, on mène Pa // à $P_1 E_1$, les 2 rayons, issus de \bar{n} font des // convergent en F_1' . On trace ensuite $E_1 F_1' C_1$.

$$\text{BE2] } \frac{1}{OC_0} - \frac{1}{OB_0} = \frac{1}{g'} \rightarrow \overline{OC_0} = \frac{g' \cdot \overline{OB_0}}{g' + \overline{OB_0}} = \frac{+g' \cdot L}{L - g'}$$

$$\frac{1}{OQ} - \frac{1}{OP_1} = \frac{1}{g'} \rightarrow \overline{OQ} = \frac{g' \cdot \overline{OP_1}}{g' + \overline{OP_1}} \text{ et } \overline{OP_1} = \overline{OB_0} + \overline{B_0 P_1} = -L + \Delta_1$$

$$d_1 \approx \left| \frac{\overline{OQ} - \overline{OC_0}}{\overline{OQ}} \right|$$

$$\text{l'autre part, sur la figure } \frac{d_1}{\Delta_1} = \frac{D}{OQ} \rightarrow d_1 = D \cdot \left[\frac{\overline{OQ} - \overline{OC_0}}{\overline{OQ}} \right]$$

$$d_1 = D \left[1 - \frac{\overline{OC_0}}{\overline{OQ}} \right] = D \left[1 - \frac{g' L}{(L - g')} \cdot \frac{(g' + \Delta_1 - L)}{g' \cdot (\Delta_1 - L)} \right]$$

$$d_1 = D \left[\frac{g'(L - g')(\Delta_1 - L) - g'L(g' + \Delta_1 - L)}{g'(L - g')(\Delta_1 - L)} \right]$$

$$g'(L - g')(\Delta_1 - L)$$

$$= D \left[\frac{g'L\Delta_1 - L^2 g' - g'^2 \Delta_1 + g'^2 L - g'^2 L - g'L\Delta_1 + g'L^2}{g'(L - g')(\Delta_1 - L)} \right]$$

$$= \frac{-g'^2 \cdot D \Delta_1}{g'(L - g')(\Delta_1 - L)} = \frac{D g' \Delta_1}{(L - g')(L - \Delta_1)} = d_1 \quad \text{et } \boxed{\beta = D}$$

$$S] \quad \left| \frac{d_1 = \frac{D g' \Delta_1}{L(L - \Delta_1)}}{d_2 = \frac{D g' \Delta_2}{L(L - \Delta_2)}} \right|$$

$$i) (d_1)_{\text{lim}} = a \rightarrow \Delta_1 \text{ lim} = \frac{aL^2}{Dg' + aL}$$

$$\text{AN} \quad (\Delta_1)_{\text{lim}} = 2,54 \text{ m}$$

La caméra peut filmer à des distances comprises entre $g' \pm 2,5 \text{ m} \approx 6,5 \text{ m}$ et $11,5 \text{ m}$.

Partie C

$$1] u(t) = a(t) \cdot b_0(t) = A\sqrt{2} \cos(2\pi f_a t) \cdot E_0 \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

$$= \frac{A\sqrt{2} \cdot E_0 \sqrt{2}}{2} \left[\cos(2\pi(f_0 + f_a)t + \phi_0) + \cos(2\pi(f_0 - f_a)t + \phi_0) \right]$$

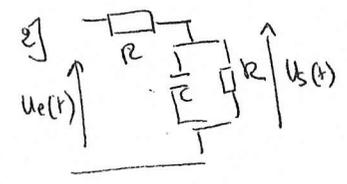
$$\Rightarrow D = A \cdot E$$

$$g = g_0 + f_a = 2870 \text{ Hz}$$

$$g = g_0 - f_a = 30 \text{ Hz}$$

$$\frac{BF}{HF} \quad C \Leftrightarrow \text{---} \quad u_s = \frac{u_e}{2} \quad \text{Filte passe bas}$$

$$C \Leftrightarrow \text{---} \quad u_s = 0$$



$$H = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} = \frac{1}{R Y_{eq} + 1} = \frac{1}{R \left[j\omega C + \frac{1}{R} \right] + 1}$$

$$= \frac{1}{2 + j\omega RC} \left| \frac{1/\sqrt{2}}{1 + j\omega RC/\sqrt{2}} \right| = H$$

$$H = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{à HF} \quad \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \rightarrow H \rightarrow \frac{H_0}{j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_1}{\omega_c}$$

$$u_s = \frac{u_e}{j\omega_c} \cdot H_0 \omega_c \Rightarrow u_s(t) = H_0 \omega_c u_e(t) \quad \text{Intégration} \rightarrow \text{phase } -90^\circ \text{ décalée}$$

$$\varphi(u_s) = \varphi(u_e) - \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{le déphasage de } u_s \text{ par rapport à } u_e \text{ tend vers } -\frac{\pi}{2}$$

Ordre de grandeur de RC.

$$\text{BF} \quad \text{GdB} = 20 \log \frac{1}{2} = -20 \log 2 = -6 \text{ dB. (ce qui est vérifié graphiquement)}$$

$$\text{GdB}(8c) = \text{Comup} - 3 \text{ dB} = -9 \text{ dB. (par lecture graphique)}$$

$$f_c \approx 150 \text{ Hz} = \frac{1}{\pi RC} \rightarrow RC = \frac{1}{\pi \cdot 150} \Rightarrow \boxed{RC = 2 \text{ ms}}$$

$$\text{pour } f = 2870 \text{ Hz} \quad \text{GdB}(f) = 13 \times (-25) = -325 \text{ dB}$$

$$S = 10 \cdot 10^{GdB(f)/20} \quad \text{et} \quad \text{GdB}(S) = 20 \log |H| \rightarrow |H(f)| = 10^{\frac{\text{GdB}(f)}{20}}$$

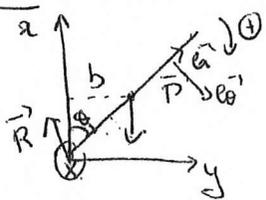
$$f = 80 \text{ Hz} \quad \text{GdB}(f) = -6 \text{ dB}$$

$$S = 10 \cdot 10^{GdB(f)/20} \quad \text{et} \quad |H(f)| = 10^{\frac{\text{GdB}(f)}{20}}$$

$$\frac{S}{S'} = 10^{\frac{\text{GdB}(S) - \text{GdB}(S')}{20}} = 10^{\frac{-26}{20}} = 10^{-1.3} \approx 0.05$$

3b Sur la composante à la fréquence 30 Hz "plane".

autre D.



$$J''_{\theta} = d^2_A(\vec{r}) + d^2_A(\vec{p}) = mg \cdot b \quad \text{avec}$$

$$b \text{ le bras de levier} = \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$d'A = \left| J''_{\theta} = + mg \frac{l}{2} \sin \theta \right|$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mg \frac{l}{2} \cdot 3 \sin \theta}{m l^2} = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

$$2. \quad dEc = \delta W_{\vec{p}} + \delta W_{\vec{R}} \Rightarrow d(Ec + Ep) = 0$$

$$Ec + Ep = cte \Rightarrow \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mg \frac{l}{2} \cos \theta = cte = E_m(t=0)$$

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0 + mg \frac{l}{2} \cos \theta_0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgl}{J} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{3mgl}{mL^2} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}$$

$$3. \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} dt$$

4. Le temps de chute T se détermine en intégrant la relation suivante entre $t=0, \theta=\theta_0$ et $t=T, \theta=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \cdot T \rightarrow \boxed{T = 51 \cdot \sqrt{\frac{L}{3g}}}$$

5. 1.

$$\text{AN} \quad L = 30 \text{ m.} \\ g = 10 \text{ m/s}^2 \rightarrow \boxed{T = 51 \text{ s.}}$$

$$5. \quad \vec{R} = R_x \vec{e}_1 + R_y \vec{e}_2$$

Le théorème du centre d'inertie donne :

$$(m \cdot \vec{a}_G)_{/R} = \vec{P} + \vec{R} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{OG} = \frac{l}{2} \vec{e}_1 \\ \vec{v}_G = \frac{l}{2} \dot{\theta} \vec{e}_2 \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = -mg \cos \theta \vec{e}_1 \\ \vec{R} = +mg \sin \theta \vec{e}_2 \end{array} \right.$$

$$\text{proy } \vec{e}_1 : -m \cdot \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_x$$

$$\text{proy } \vec{e}_2 : m \frac{l}{2} \ddot{\theta} = mg \sin \theta + R_y$$

$$d'A \quad R_x = mg \cos \theta = m \frac{l}{2} \cdot \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \left[\frac{5}{2} mg \cos \theta - \frac{3}{2} mg \cos \theta_0 = R_x \right]$$

$$R_y = m \frac{l}{2} \cdot \frac{3g}{2L} \sin \theta - mg \sin \theta = \left(\frac{3mg}{4} - mg \right) \sin \theta \rightarrow \boxed{R_y = -\frac{mg}{4} \sin \theta}$$