

Correction CB 10/05/21.

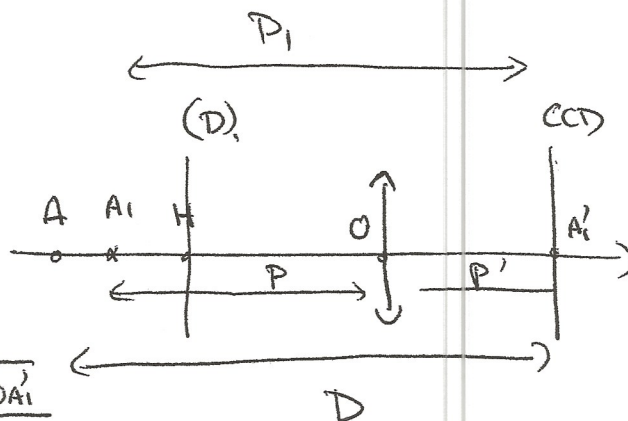
$$A^{(D)} \rightarrow A_1^{(\infty)} \rightarrow A_1'$$

$$D_1 = \overline{AA_1'} \quad p = \overline{OA_1}$$

$$D = \overline{AA_1} \quad p' = \overline{OA_1'}$$

$$\begin{cases} \overline{AH} = L = 3 \text{ cm} \\ D = \overline{AA_1} = 10 \text{ cm} \\ n = 1,5. \end{cases}$$

$$\delta = \frac{p'}{p} = \frac{\overline{OA_1'}}{\overline{OA_1}}$$



Conditions de Gauss

$$\tan i = \frac{HI}{AH} \approx i$$

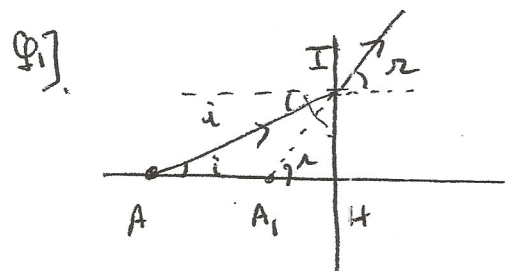
$$\tan r = \frac{HI}{A_1H}$$

$$n \sin i = \sin r$$

$$n \cdot i = r$$

$$n \cdot \frac{HI}{AH} = \frac{HI}{A_1H} \rightarrow$$

$$\boxed{\overline{HA_1} = \frac{\overline{HA}}{n}}$$



$$\Phi_2 \begin{cases} \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{g'} & (1) \\ \delta = \frac{p'}{p} & (2) \end{cases} \quad D_1 = \overline{AA_1'} = \overline{OA_1'} - \overline{OA_1} = p' - p. \quad (3)$$

$$(2) \rightarrow p' = \delta p \text{ et en remplaçant ds (3)} \quad D_1 = (\delta - 1)p \rightarrow \boxed{p = \frac{D_1}{\delta - 1}}$$

$$\text{d'où } \boxed{p' = \frac{\delta \cdot D_1}{\delta - 1}} \text{ et (1) donne } \frac{\delta - 1}{\delta \cdot D_1} - \frac{\delta - 1}{D_1} = \frac{1}{g'}$$

$$\frac{\delta - 1}{D_1} \left[\frac{1}{\delta} - 1 \right] = \frac{1}{g'} \rightarrow \boxed{g' = \frac{-D_1 \cdot \delta}{(\delta - 1)^2}} \rightarrow$$

$$\Phi_3 \quad \frac{D_1}{g'} = \frac{(\delta - 1)^2}{\delta} \quad \begin{matrix} \delta \rightarrow -\infty & \frac{D_1}{g'} \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow 0 & \frac{D_1}{g'} \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

par

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{D_1}{g'} \right) = \frac{1}{\delta^2} - 1 = 0 \rightarrow \delta^2 = 1 \rightarrow \delta = -1 \quad \text{d'où } \frac{D_1}{g'} > -\frac{(-1-1)^2}{-1} \rightarrow \boxed{D_1 > 4g'}$$

① On retrouve la condition de projection.

Q4] $x = -2$

$p' = \frac{x D_1}{x-1}$ $g' = -\frac{D_1 \cdot x}{(x-1)^2}$

Calcul de D_1

$D_1 = D - \overline{AA_1}$

$\overline{AA_1} = \overline{AH} + \overline{HA_1} = \overline{AH} + \frac{\overline{HA}}{n} = \overline{AH} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = L \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

AN $\overline{AA_1} = 3 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1 \text{ cm}$

$\rightarrow \boxed{D_1 = 9 \text{ cm}} \quad \boxed{p' = 6 \text{ cm}} \quad \boxed{g' = 2 \text{ cm}}$

Q.5] $g' = -\frac{D_1 \cdot x}{(x-1)^2} \rightarrow \frac{dg'}{dx} = \frac{+ D_1 \left[1 - \frac{1}{x^2}\right]}{\left[x-2 + \frac{1}{x}\right]^2}$
 $= -\frac{D_1}{x-2 + \frac{1}{x}}$

si $x < 0$
 $|x| \uparrow \Rightarrow x^2 \uparrow$
 $\Rightarrow dx < 0$

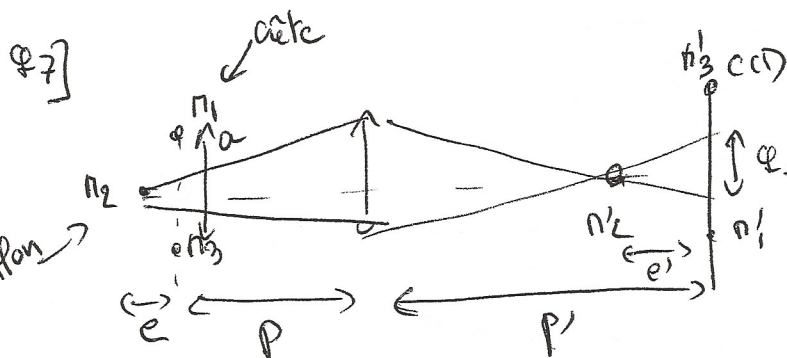
$dg' = \frac{D_1 \left[1 - \frac{1}{x^2}\right]}{\left[x-2 + \frac{1}{x}\right]^2} dx \rightarrow dg' < 0 \rightarrow g' \uparrow$

Rayes fortement inclinés $\rightarrow$ C-de Gauss ne respectes -

A4] Resolution de l'image.

Q6] la distance entre n_3 et n_1 est $|x| \cdot a$; il faut donc $|x| \cdot a > p_c$.

AN $p_c < 2.100 \mu\text{m}$ $\boxed{p_c < 200 \mu\text{m}}$



n_1 et n_1' conjugués.

$x = \frac{p'}{p} \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}, \quad (1)$

$e' = dp'$ $\hat{=}$ n_2 et n_2' conjugués.
 $e = dp$ $\frac{1}{pe'} - \frac{1}{pe} = \frac{1}{f}$

e différentiel (2) $-\frac{dp'}{p'^2} + \frac{dp}{p^2} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{e'}{e} = \left(\frac{p'}{p}\right)^2 = x^2 \rightarrow \boxed{e' = x^2 \cdot e}$

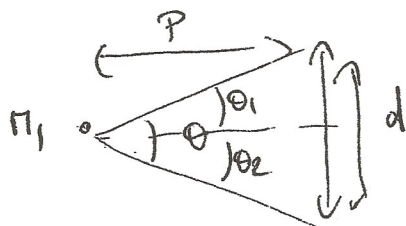
$$\frac{Q}{e'} = \frac{d}{p' - e'}$$

$$\text{or } \begin{cases} \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{g'} \rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{g'} + \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p' - e'} - \frac{1}{p - e} = \frac{1}{g'} \rightarrow \frac{1}{p' - e'} = \frac{1}{p - e} + \frac{1}{g'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{g'}, \text{ car } e' < p \end{cases}$$

$$d' \text{ car } \frac{1}{p' - e'} \approx \frac{1}{p'}$$

$$\text{donc } \frac{Q}{e'} = \frac{d}{p'} \Rightarrow Q = d \cdot \frac{e'}{p'} = d \cdot \frac{x' e}{x p} \rightarrow \boxed{Q = \frac{d x e}{p}}$$

$$Q_8 \text{ On veut } |Q| > |a| \rightarrow \boxed{|d| > |a| \frac{p}{e}}$$



$$\text{or } \frac{d}{p} \approx \tan \theta_1 + \tan \theta_2 > \frac{Q}{e} = \frac{100 \mu}{30 \mu} = 3$$

$\theta_1 + \theta_2$ n'est pas petit $\Rightarrow$ calculer avec

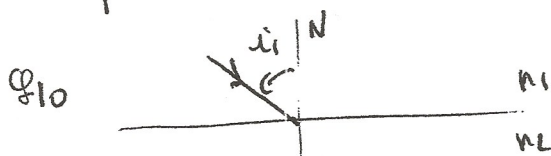
Conditions de Gauss -

I-A.3] Reflexion totale.

Q.9] Raye incident réfléchi et réfracté $\in$ plan d'incidence = $(\vec{n})$ raye normal

$i' = i$
réflexion

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ réfraction



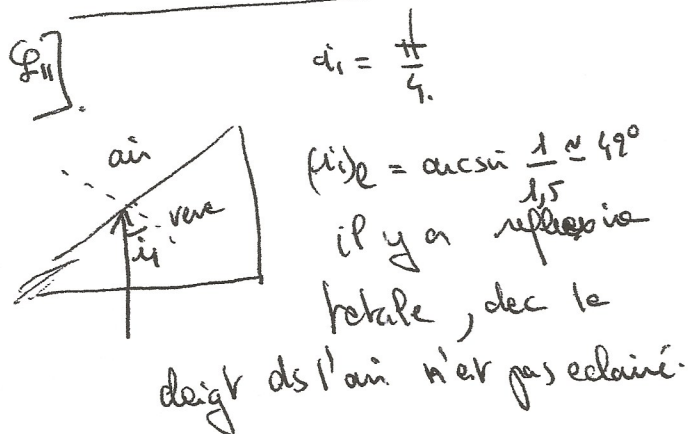
$$\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 < 1 \text{ toujours si } n_1 < n_2$$

$$\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \text{ peut être } > 1 \text{ si } n_1 > n_2$$

$$(i_c)_2 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

$i < i_c \rightarrow \exists$ raye réfléchi

$i > i_c \rightarrow$ pas de raye réfléchi
toute l'énergie est contenue dans le
raye réfracté $\Rightarrow$ il y a
réflexion totale.



$$i_c = \frac{\pi}{4}$$

$$(i_c)_2 = \arcsin \frac{1}{1.5} \approx 42^\circ$$

il y a réflexion

totale, donc le

degré de l'air n'est pas éclairé.

Partie 2 Filtrage.

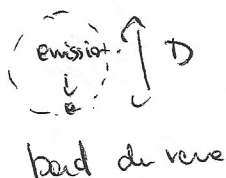
Q1] Modes propres $\rightarrow$ Période linéaire (Analogie avec la corde de Melde).

- le mode de plus basse fréquence est le mode fondamental.
- les autres sont des harmoniques.

Q2] La fréquence du signal est la fréquence du fondamental.

$$f \approx 0,54 \text{ kHz}$$

Q3] Interférence destructive $\rightarrow \delta = k\lambda \rightarrow \pi \cdot D = k \cdot \frac{c}{f}$



$$k=1 \text{ pour } f=0,54 \text{ kHz}$$

$$c = \pi \cdot D \cdot f = \pi \cdot 0,12 \cdot 0,54 \cdot 10^3 = 2034 \text{ m s}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 540 \text{ kHz} \\ f_2 = 1,09 \text{ kHz} \\ f_3 = 1,64 \text{ kHz} \\ f_4 = 2,18 \text{ kHz} \end{array} \right\} f_n = n \cdot f_1$$

Q5] $G_{\text{constant}} = 1$.

Q6] Amortissement du se.

J.B] Q2 $\vec{r} = m \vec{v}$ $\vec{T} = -k(t-t_0) \vec{e}_n$ $t_0 = 0$ (énergie) $t = x$

$$\Rightarrow \vec{T} = -kx \vec{e}_n \quad \vec{g} = -\alpha \vec{v} \quad \text{et } \vec{O} \vec{N} = \alpha(t) \vec{e}_n \Rightarrow \vec{v} = \dot{x}(t) \vec{e}_n \Rightarrow \vec{g} = -\alpha \dot{x} \vec{e}_n$$

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{g} = m \vec{a}$$

$$\text{en } \vec{e}_n \quad \frac{1}{\alpha} \quad -kx - \alpha \dot{x} = m \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{\alpha}{m} = 2\lambda \omega_0 = \frac{c \omega_0}{Q}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Q8] ω_0 = pulsation propre = pulsation des oscillations libres sans amortissement.
 ω_0 en rads^{-1} .

$\mathcal{G} = \frac{1}{2\lambda}$ or λ est le facteur d'amortissement $\rightarrow$ additionne les $\neq$

regimes l'hor $0 < x < 1$ regime pseudo périodique
 $x = 1$ critique

$\lambda = 1$ $\therefore$ antique

$\lambda > 1$, a période que -

Q9] on cherche $x(t) = e^{rt} \rightarrow$ 2 solutions

$$\text{de } \lambda^2 + \frac{C_0}{Q} \lambda + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega^2}{\phi^2} - 4\omega^2 = 4\omega^2 \left(\frac{1}{4\phi^2} - 1 \right).$$

Stoßener Fall $\rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow Q^2 > \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Determinante de A et φ :

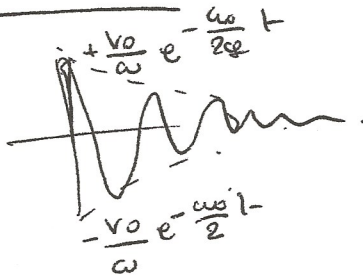
$$x(0) = 0 = A \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\ddot{x}(0) = A \begin{bmatrix} -\frac{\omega}{2Q} \cos \frac{\pi}{2} - \omega \sin \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = v_0 \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega}$$

$$d' a^- \quad x(t) = -\frac{v_0}{\omega_f} e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \underbrace{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin \omega t}$$

$$d'_{\text{av}} = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \sin \omega t.$$

Q.10] On obtient ici la courbe de la figure 3



811]

temps (s)	1	2	3
Amplitude de $x(t)$	4	2	1

l'amplitude est divisée par 2 toutes les secondes $\Rightarrow e^{\frac{-\omega}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{C_0 h \tau}{2 \ln 2}$$

Sur la fig 3 $18T = 1s \rightarrow T = \frac{1}{18}s = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = 2\pi \cdot 18 \text{ rad s}^{-1}$.

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Rightarrow Q = \frac{\omega \tau}{2 \ln 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Rightarrow Q^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) = \left(\frac{\omega \tau}{2 \ln 2}\right)^2$$

$$Q^2 = \left(\frac{\omega \tau}{2 \ln 2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{2\pi \cdot 18}{2 \ln 2}\right)^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{Q = 81,5} \text{ donc } \boxed{\omega \approx \omega_0}$$

Q.12] L'amplitude décroît en $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} = e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ avec $\tau_1 = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Autant de τ_1 , l'amplitude $\rightarrow 0$

$$\tau_1 = \frac{2 \cdot 81,5}{2\pi \cdot 18} = 1,4s$$

$$\boxed{10\tau_1 \approx 14s}$$

II Q.13] $\underline{x} = X e^{j\varphi}$ amplitude complexe associée à
 $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \quad |\underline{x}| = X \quad \arg(\underline{x}) = \varphi$.

Q.14] $\underline{x}(t)$ vérifie la m^{me} eq. différentielle que $x(t)$ à condition d'associer
 $\bar{A}_0 \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow A_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ et on obtient

$$\left((j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2\right) \underline{x} e^{j\omega t} = A_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\underline{x} = \frac{A_0 e^{j\varphi}}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2} \Rightarrow \boxed{|\underline{x}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \omega^2}}}$$

Q.15] $|\underline{x}|(\omega \rightarrow 0) = A_0$
 $|\underline{x}|(\omega \rightarrow \infty) = 0$ } $\rightarrow$ Graph 2.

Q.16] Cas $\frac{d|\underline{x}|}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
 Q.17] $\omega_r > 0$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = Q_0$.

Q.18] $Q \gg Q_0 \rightarrow \omega_r \approx \omega_0$.

Q.19] Cas $X_r = \frac{A_0 \cdot Q}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \rightarrow \boxed{X_r = \frac{A_0 Q}{\omega_0^2}}$

Partie 3 Mécanique.

F.1] Marcher en neutragne.

$$Q1] P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{\delta t} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$\vec{R}$ s'applique en un point de vitesse nulle $\rightarrow P(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v} = 0$

$$Q2] dE_p = \ominus \delta W_{\vec{P}} = - \vec{P} \cdot d\vec{r} = - (-mg\vec{e}_z) \cdot dz \vec{e}_z$$

$\uparrow \vec{e}_z$

$$dE_p = mg dz \rightarrow \boxed{E_p(z) = mgz + \text{cte.}}$$

$$Q3] \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = 0 - 0 = 0 !$$

$$Q4] E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \text{cte.}$$

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = E_p(B) - E_p(A) = mg(z_B - z_A) = \boxed{mgh = \Delta E}$$

$$Q5] h = 1 \text{ km} \quad m = 60 \text{ kg} \quad g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\Delta E_m = 60 \cdot 10 \cdot 10^3 = \boxed{6 \cdot 10^5 \text{ J} = \Delta E_m}$$

$$Q6] \text{ à plat } h=0 \rightarrow \boxed{\Delta E_m = 0} \Rightarrow \Delta E_m(h=1 \text{ km}) > \Delta E_m(h=0)$$

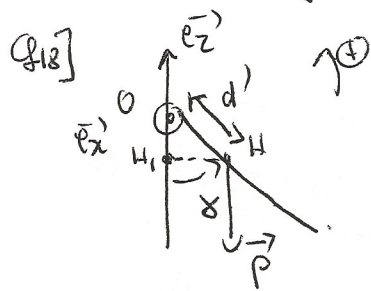
$$Q7] \frac{\Delta E_m}{E_n} = \frac{6 \cdot 10^5}{12 \cdot 10^6} = 0,05 = 5\% \quad (\text{pourcentage faible du corp})$$

hypothèses trop simples de l'exercé.

$$Q8] \boxed{\Delta E_m + E_n = 12,6 \text{ MJ}}$$

Q16] $L_{Ox} = J \cdot \ddot{\alpha}$

Q17] liaison pivot. $\vec{R}$: $M_{Ox}(\vec{R}) = 0$.



Q18] $\vec{P}_{Ox} = -mg = HH1$ ← bras de levier.

$\vec{P}$ a tendance à faire tourner le solide ds le sens $\ominus$

avec $HH1 = d' \sin \alpha$ d'où $\boxed{P_{Ox} = -mg d' \sin \alpha}$

Q19] TNC/ $\ddot{\alpha}$ $\frac{dL_{Ox}}{dt} = P_{Ox} \Rightarrow \boxed{J \cdot \ddot{\alpha} + mg d' \sin \alpha = 0}$

Q20] $E_c = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\alpha}^2$

$dE_p = -\delta W_{\vec{P}} = -\vec{P} \cdot d\vec{OH} = -mg \vec{e}_z \cdot d[d' \cos \alpha \vec{e}_z + d' \sin \alpha \vec{e}_y]$

$dE_p = -mg \cdot d[d' \cos \alpha] = -d[mg d' \cos \alpha]$
différentielle

d'où $\boxed{E_p(\alpha) = -mg d' \cos \alpha + cste}$

Q21] $dE_c = \delta W_{\vec{P}} = -dE_p \rightarrow E_c + E_p = cste$

$E_m = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\alpha}^2 + mg d' \cos \alpha + cste \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

Q22] $\frac{1}{2} J \cdot 2 \ddot{\alpha} \dot{\alpha} + mg d' \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = 0 \quad \forall t$ d'où
 $\boxed{J \ddot{\alpha} + mg d' \sin \alpha = 0}$

Q23] $\sin \alpha \approx \alpha \rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mg d'}{J} \alpha = 0$ oscillateur harmonique

$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{mg d'}{J} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{\frac{2\pi \sqrt{J}}{\sqrt{mg d'}}} = T_0$

Q24] $J = k m d^2$ et $d' = \frac{d}{2}$

$$T_0 = \frac{2\pi \sqrt{k m d^2}}{\sqrt{m g d/2}} = \boxed{2\pi \sqrt{2k} \sqrt{d/g} = T_0.}$$

T_0 est bien proportionnelle à $\sqrt{d}$. et $\boxed{\frac{T_0}{\sqrt{d}} = \text{cte.}}$

Q25] $\frac{T_{\text{adulte}}}{\sqrt{d_{\text{adulte}}}} = \frac{T_{\text{enfant}}}{\sqrt{d_{\text{enfant}}}} \rightarrow \boxed{T_{\text{enfant}} = \sqrt{\frac{d_{\text{enfant}}}{d_{\text{adulte}}}} \cdot T_{\text{adulte}}.}$

AN $T_{\text{enfant}} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot 1,6 = 1s.$

Q26] La vitesse est liée à la largeur du pas et au nombre de pas effectué en 1s



$L = \text{largeur d'un pas}$

$$\sin \alpha = \frac{L}{d}$$

1 pas en $\frac{1}{4}s$

$\frac{4}{7}$ pas en 1s.

et L proportionnelle à d .

d' est proportionnelle à $\frac{d}{T}$ donc à $\sqrt{d}$.

d' $\frac{v_{\text{adulte}}}{v_{\text{enfant}}}$ proportionnelle à $\sqrt{\frac{d_{\text{adulte}}}{d_{\text{enfant}}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5.$