Chapitre 10 :
Équations différentielles à coefficients constants
Intégrales et primitives

Table des matières

1 Équations différentielles

1.1 Équations différentielles de la forme $y' = ay$ (homogènes)

Propriété 1.

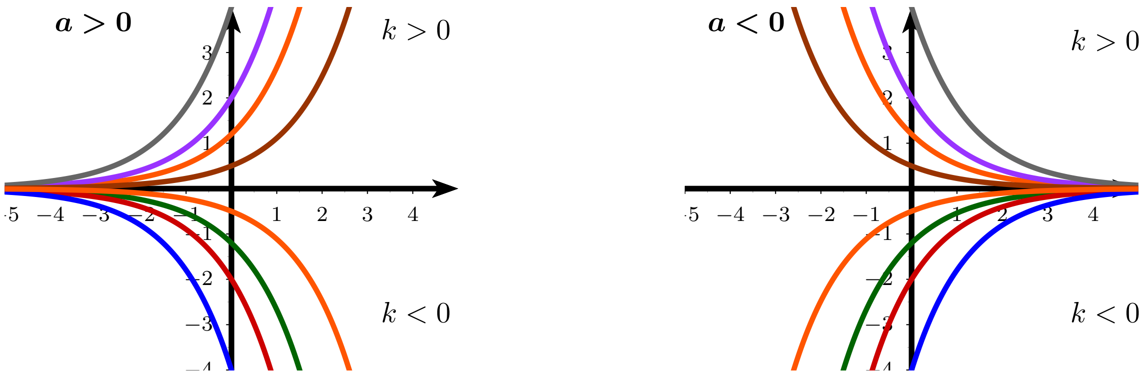
Étant donné un réel a non nul, les fonctions solutions de l'équation différentielle $(H)\ y' = ay$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{ax}$ où k est un nombre réel.

DÉMONSTRATION

Double inclusion : $\mathcal{S} = \{x \mapsto k\mathrm{e}^{ax},\ k \in \mathbb{R}\}$,
pour $\subset$, poser $f = g \times \mathrm{e}^{-ax}$ si $g \in \mathcal{S}$

$\square$

Allures des courbes des fonctions du type $x \mapsto ke^{ax}$



Propriété 2 (Structure de l'ensemble des solutions de (H))**.**

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{H})$ $y' = ay$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est également solution de l'équation $(\boldsymbol{H})$.
On dit que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{H})$ est un **espace vectoriel**[a].

a. Stable par somme et par multiplication par un réel

▶ Exercice 1

1. Résoudre

   (a) $H_1 : y' + \frac{1}{3}y = 0$

   (b) $H_2 : 4y' + 5y = 0$

2. Déterminer la solution f de l'équation H_2 telle que $f(1) = 2$.
   Quelle est la conséquence sur les solutions de l'existence de cette contrainte : $f(1) = 2$?

1.2 Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ (avec second membre)

Propriété 3.

Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et b un réel quelconque sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est un nombre réel.

DÉMONSTRATION

On va chercher une solution constante à cette équation : $g : x \mapsto c$ (**fonction** constante), où c est un réel.
Si f est une solution de (E), que peut-on dire de $f - g$?

□

▶ Exercice 2 Application bêbête

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' = 2y + 1$
2. $y' = -5y + 2$
3. $y' + y = 3$
4. $4y' + y - 5 = 0$

▶ Exercice 3 Équation de la forme $y' = ay + f$

On considère l'équation différentielle **(E)** $y' = 2y - x$

1. Chercher une fonction affine g solution de l'équation **(E)**[1].
2. Si f est une solution de l'équation **(E)**, en utilisant la fonction $f - g$, déterminer toutes les solutions de (E).

Remarque 1 (Méthode générale de résolution de l'équation $y' = ay + f$)**.**

- On cherche une solution particulière f_p de l'équation. Il existe des techniques pour en trouver, mais en Terminale, on les propose seulement, il suffit de vérifier qu'elles sont bien solutions.
- On remarque que si f est solution de l'équation, alors $f - f_p$ est solution de l'équation (H) : $y' = ay$.
- On conclut que les solutions de l'équation (E) sont composées d'une solution de (H) plus une solution particulière :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{ax} + f_p$$

▶ EXERCICE 4

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 4y = 3\mathrm{e}^{x}$.

1. Déterminer une solution f_p de l'équation de la forme $x \mapsto c\mathrm{e}^{x}$.
2. Résoudre l'équation (H) : $y' - 4y = 0$
3. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de H.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

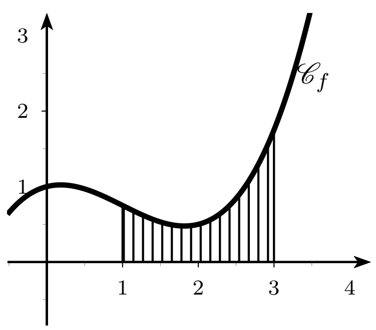
2 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

2.1 Définition

Définition 1 (Intégrale d'une fonction positive)**.**

Étant donnée une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle *intégrale de f sur* $[a\,;\,b]$ la mesure de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette aire : $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Elle est mesurée en unité d'aires du repère.



NOTATION :

Le symbole $\int$ est un S déformé, qui se lit « intégrale » ou « somme » (c'est une somme des tout petits rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur dx).

1. $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

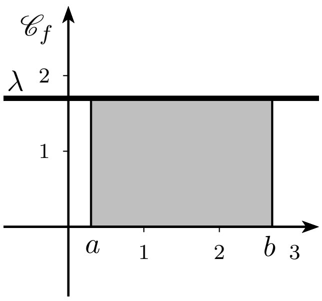
Remarque 2.

La variable x peut-être remplacée dans l'intégrale par n'importe quelle lettre : t, u, on dit que c'est une *variable muette* :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

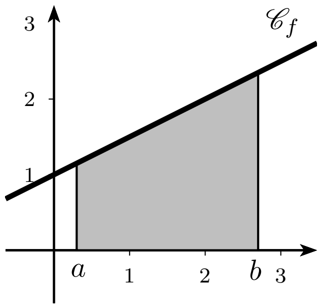
2.2 Quelques exemples

f est constante sur $[a\,;\,b]$: $f(x) = \lambda$



$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

f est affine sur $[a\,;\,b]$:



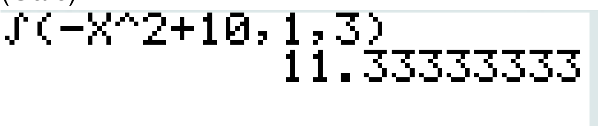
L'aire du trapèze est :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

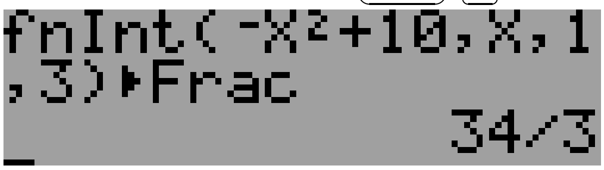
2.3 Calcul approché à l'aide de la calculatrice :

Si on prend une fonction continue et positive sur un intervalle, on peut faire calculer l'intégrale de la fonction par la calculatrice. Par exemple la fonction $f \;:\; x \mapsto -x^2 + 10$ entre 1 et 3 :

Sur CASIO 85+, dans le menu `OPTN`, `F4` (Calc)



Sur TI 83 dans le menu `math`, `9` (FnInt)



3 Fonction primitive et lien avec les intégrales

3.1 Fonction définie par une intégrale

Théorème 1 (Définition d'une primitive).

Soit f une **fonction continue positive** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, On peut alors définir la fonction F sur $[a\,;\,b]$ telle que $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$.

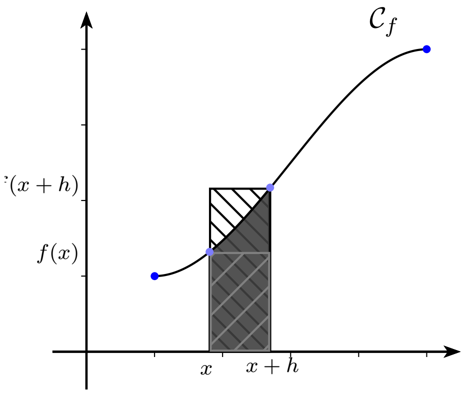
Cette fonction F est alors dérivable sur $[a\,;\,b]$ de dérivée égale à f.

F est appelée *primitive de f sur* $[a\,;\,b]$.

<u>**DÉMONSTRATION**</u>

Nous allons prouver ce théorème dans le cas particulier où f est positive et croissante

Soit $x \in [a\,;\,b]$, on écrit le taux d'accroissement de F entre x et $x+h$:



□

Remarque 3.

- La fonction F est croissante sur $[a\,;\,b]$... *Pourquoi ?*
- $F(a) = 0$. *Pourquoi ?*

3.2 Définition d'une primitive

Définition 2 (Primitive d'une fonction continue)**.**

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on appelle *fonction primitive* de f une fonction F telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 2 (Existence de primitives)**.**

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive.

DÉMONSTRATION

Démonstration dans le cas où l'intervalle $I = [a\,;\,b]$ est fermé borné, modulo l'acceptation d'une propriété.

□

■ **Exemple 1:**

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$ (pas très positive...) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x$, alors on peut dire que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme $g(0) = 0$, on peut dire que $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, qui est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Remarque 4 (Non unicité d'une primitive)**.**

Si F est une primitive de f, alors, pour tout nombre réel k, $F+k$ est aussi une primitive de f. Autrement dit, deux primitives d'une fonction f diffèrent seulement d'une constante.

Quelle est la conséquence graphique sur les courbes des primitives d'une fonction continue f ?

Remarque 5 (Le calcul d'une primitive peut-être un problème insoluble)**.**

Par contre, si toute fonction continue admet une primitive, on ne sait pas toujours exprimer celle-ci à l'aide des fonctions usuelles. Par exemple : $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, qui est facile à dériver, que l'on rencontrera lors des chapitres sur les lois de probabilités continues, mais qui n'admet pas de primitive exprimable avec des fonctions usuelles. Pour calculer des intégrales avec cette fonction, on devra utiliser des méthodes numériques du même type de l'approximation des intégrales par des rectangles (ou autres).

Théorème 3 (Condition d'unicité)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$.
Pour tout $x_0 \in I$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.

3.3 Lien entre primitives et intégrales

On appelle $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ une primitive de f, c'est d'ailleurs la seule qui s'annule en a.

Théorème 4 (Théorème fondamental de l'intégration)**.**

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

3.4 Propriétés des intégrales

Propriété 4 (Linéarité)**.**

Sur un intervalle I,

- **Primitive de la somme** Si F et G sont des primitives des fonctions f et g, alors $F + G$ est une primitive de la fonction somme $f + g$.
- **Multiplication par une constante** Si F est une primitive de f et k un nombre réel quelconque, alors kF est une primitive de kf.

Conséquence 1 (Linéarité de l'intégrale)**.**

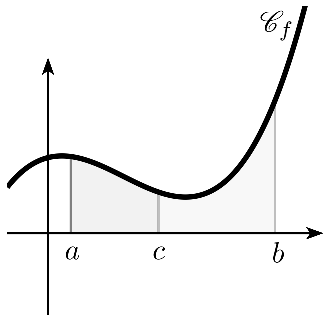
Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, et λ un nombre réel, alors

- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété 5 (Relation de Chasles).

Soit f continue sur $I = [a\ ;\ b]$. Si $c \in I$, alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



On utilisera dans de nombreux exercices la propriété suivante :

Propriété 6 (Positivité de l'intégrale).

Sur un intervalle $[a\,;\,b]$

- si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$
- si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

■ **Exemple 2:**

Comparer, sans les calculer, les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$$

4 Calcul des primitives d'une fonction

4.1 Tableau des primitives des fonctions usuelles

Attention : Toutes les primitives sont définies à une constante réelle c près.

Fonction f	**Primitive F**	**Intervalle I**
k (constante)	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + c$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
x^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{-1;0\}$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \geqslant 1 \\ ]-\infty\ ;\ 0[\text{ ou }]0\ ;\ +\infty[\text{ sinon} \end{cases}$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$)	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	$\mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$

▶ **EXERCICE 5** Exemples fondamentaux

1. Déterminer une primitive des fonctions définies par $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$.
2. Donner une primitive de la fonction définie par $h(x) = 3x^2 - 7x + 2$.

4.2 Utiliser les formules de composées

Propriété 7 (À partir des formules de composition).

La primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto u'(x)(f \circ u)(x)$ est de la forme $x \mapsto f \circ u + c$

Fonction f	**Primitives F**	**Conditions sur u**
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1; 0\})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I si $n \leq -2$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert) + c$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$ sur I.
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	—

■ **Exemple 3:**
La primitive de la fonction définie par $f(x) = -4\mathrm{e}^{2x}$ est de la forme F avec $F(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + c$.

4.3 Intégration par parties

Comme pour la dérivation, il faut bien retenir que la primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives.

Propriété 8 (Intégration par parties).

Soient u et v deux fonctions qui admettent des dérivées u' et v' continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
Alors $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

DÉMONSTRATION

uv est une primitive de $u'v + uv'$
Donc $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. D'où la propriété.

□

▶ **EXERCICE 6**
Calculer $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ en utilisant une intégration par parties.

5 Applications

5.1 Suites définies par des intégrales

MÉTHODE 1 (APPLICATION AUX SUITES D'INTÉGRALES)

On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} \mathrm{d}x$.

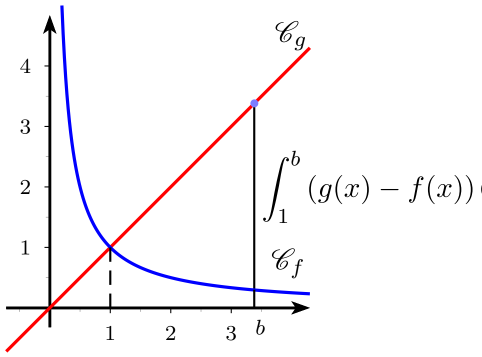
1. Conjecturer graphiquement, ou à l'aide de la calculatrice, visualiser la situation.
2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$, en déduire la limite.

5.2 Aire entre deux courbes

Propriété 9.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur I telles que $f \leqslant g$. Alors l'aire du domaine délimité par la courbe de f en bas, la courbe de g en haut et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par l'intégrale :

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

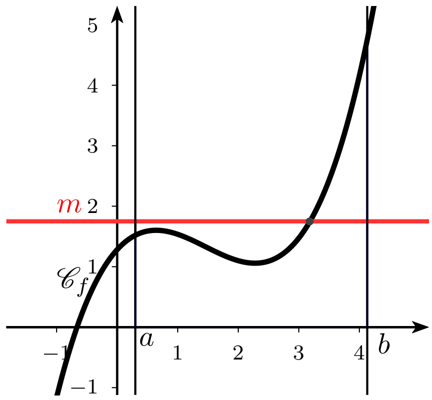


5.3 Valeur Moyenne

Définition 3.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, alors on appelle *valeur moyenne de f sur I* le nombre réel

$$\boxed{m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$



Colorer les aires identiques