Feuille de TD n°10
Équations différentielles et Intégration

1 Équations différentielles

1 QCM :

1. La fonction $x \mapsto 3e^x$ est solution de l'équation différentielle :

   (a) $y' = 3y$
   (b) $y' = -3y$
   (c) $y' = -y$
   (d) $y' = y$

2. La fonction $x \mapsto 5e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle :

   (a) $y' = 2y$
   (b) $y' = -2y$
   (c) $y' = 5y$
   (d) $y' = -5y$

3. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 10$ est :

   (a) 20
   (b) −20
   (c) 10
   (d) −10

4. Une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 2$ est :

   (a) $x \mapsto e^{-2x} + 1$
   (b) $x \mapsto e^{-2x} - 1$
   (c) $x \mapsto e^{2x} + 1$
   (d) $x \mapsto e^{2x} + 1$

5. La fonction $x \mapsto 2 - e^{4x}$ est solution de l'équation différentielle :

   (a) $y' - 4y = 8$
   (b) $y' - 2y = 8$
   (c) $y' - 8y = 4$
   (d) $y' + 4y = 8$

6. Une solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est :

   (a) $x \mapsto e^{-3x}$
   (b) $x \mapsto e^{3x}$
   (c) $x \mapsto e^{-x}$
   (d) $x \mapsto e^{x}$

7. La solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ qui prend la valeur 1 en 0 est :

   (a) $x \mapsto e^{5x}$
   (b) $x \mapsto 1 - e^{-5x}$
   (c) $x \mapsto e^{x}$
   (d) $x \mapsto e^{-5x}$

2

1. Résoudre l'équation $y' - 2y = 5$
2. Déterminer la solution qui prend la valeur 0 en 0.

3 soit (E) l'équation différentielle : $y' + 3y = e^{2x}$.

1. Déterminer le réel a tel que la fonction $p\colon x \mapsto p(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
3. Déterminer la solution de l'équation vérifiant que $y(0) = 1$.

4 On considère l'équation différentielle sur $[0; +\infty[$: $(E)\colon y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$. Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ qui ne s'annule pas.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
   (a) Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $(E_1)\colon z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$.
   (b) Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).
2. Montrer que g est définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-0,5x} + 1}$ est solution de l'équation (E).
3. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
5. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant 5$.

2 Fonction primitive

5 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

1. $F(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2$, $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6x$.
2. $F(x) = 2(3x - 1)^5$, $f(x) = 30(3x - 1)^4$.
3. $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.
4. $F(x) = \dfrac{x}{2e^x}$, $f(x) = \dfrac{1 - x}{2e^x}$.
5. $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

6 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$.

3. Déterminer l'unique primitive H de f sur $]0;+\infty[$ telle que $H(1)=2$.

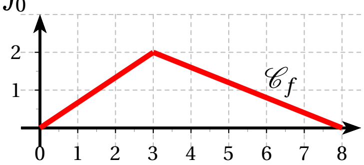
7 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive aux fonctions proposées

1. $f_1(x)=5x^6-2x^3+3x^2+7$
2. $f_2(x)=-2x^8+7x^4+x^3$
3. $f_3(x)=x^7+2x^6-5x^2-1$
4. $f_4(x)=\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$
5. $f_5(x)=3x^2\left(x^3+2\right)^4$
6. $f_6(x)=\dfrac{-5}{(1-5x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{5};+\infty\right[$.
7. $f_7(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

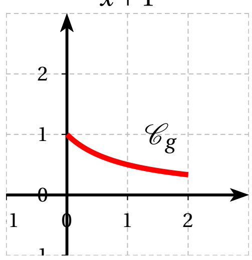
3 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

8 Estimer dans chacun des cas suivants les intégrales.

1. $\displaystyle\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$



2. Encadrer entre deux fractions $\displaystyle\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$, où $g\colon x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ à l'aide de rectangles.



9 **Calcul d'aire dans le cas d'une fonction positive :**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-7x+10$.

1. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer l'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$.

10 Calculer des intégrales à l'aide de primitives

1. Calculer les intégrales suivantes.
   (a) $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x$
   (b) $J=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+2)^3}\mathrm{d}x$
   (c) $K=\displaystyle\int_0^1 5x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$
2. (a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $A=\displaystyle\int_0^1(2x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

11 **Cas d'une fonction de signe non constant.**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-7x-6$.

1. Montrer que -1 est une racine de g et en déduire une factorisation, puis l'ensemble des racines de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur R.
3. Calculer l'aire entre la courbe de g et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2;3]$.

12 Calcul d'aire et étude de signe
On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x)=x(x-2)(x-5)$.
Après avoir étudié le signe de f sur $[0;5]$, déterminer l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre 0 et 5.

13 **Propriétés de l'intégrale**
On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on connaît les variations :

x	$-\infty$	0	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$1+\mathrm{e}^{-2}$	↘	1

1. Faire un dessin possible de la courbe de f, en faisant figurer tous les éléments du tableau de variations.
2. On définit g sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Interpréter graphiquement $g(2)$ et montrer que $0\leqslant g(2)\leqslant 2,5$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}$, tel que $x\geqslant 2$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant x-2$
   (b) En déduire que $g(x)\geqslant x-2$.
   (c) En déduire la limite de g quand x tend vers $+\infty$.
4. Étudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

14 Pour tout entier naturel n, on considère le nombre $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{nt}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_1
2. Simplifier puis calculer u_0+u_1.
3. En déduire la valeur de u_0.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n + u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^n - 1}{n}$$

5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{nt}(\mathrm{e}^t - 1)}{1 + \mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$$

7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4 Calculer des primitives

15 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{3x}{x^2+4} \mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2} \mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^5} \mathrm{d}x$

16

1. On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x$. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x$.
   (a) Calculer J.
   (b) Calculer $I + J$.
   (c) En déduire la valeur de I.
2. On souhaite calculer la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$ et $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \mathrm{d}x$
   (a) Calculer $K + L$
   (b) Calculer $K - L$
   (c) En déduire les valeurs de K et L.

17 Suite d'intégrales
On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

18 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2;5]$.
2. On note (I_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-x}$, où α et β sont deux réels.
   (a) Déterminer les réels α et β tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (I_n). Donner une interprétation graphique de cette limite.

19 $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n pour tout réel $x \in [0;1]$ par $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}$.

1. Quelques propriétés des f_n.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, f_n est croissante sur $[0;1]$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 2$.
2. Aires sous les courbes.
   On appelle A_n l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_n$ de la fonction f_n et l'axe des abscisses entre 0 et 1.
   (a) Déterminer une expression de A_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de (A_n) en fonction de n.

20 Intégration par parties
Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} \mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{10} (2t-1)\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^{0} (4-3t)\mathrm{e}^{3t+1} \mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (3t-2)\sin(t)\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)\mathrm{d}x$

1 Équations différentielles

$\boxed{1}$ 1d - 2b - 3a - 4b - 5d - 6b - 7d

$\boxed{2}$

1. $\left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - \frac{5}{2}\right\}$
2. $k = \frac{5}{2}$.

$\boxed{3}$

1. p est solution de (E) si et seulement si $2a + 3a = 1 \iff a = \frac{1}{5}$, ainsi $p(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}$
2. Équation homogène : $y' + 3y = 0$.
$$\mathscr{S}_H = \{x \mapsto k\mathrm{e}^{-3x} \mid k \in \mathbb{R}\}$$
Donc solution générale :
$$\mathscr{S}_H = \{x \mapsto k\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x} \mid k \in \mathbb{R}\}$$
3. On cherche donc le $k \in \mathbb{R}$ pour lequel
$$f_k(0) = 1 \iff k\mathrm{e}^0 + \frac{1}{5}\mathrm{e}^0 = 1 \iff k = \frac{4}{5}$$

2 Fonction primitive

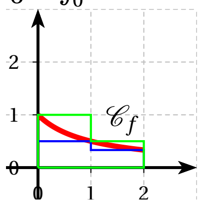
$\boxed{6}$ Toutes les primitives s'écrivent sous la forme $F + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
$H(1) = 2$ et $H(x) = x\ln(x) - x + k$, donc $H(1) = -1 + k = 2 \iff k = 3$, ainsi, $H(x) = x\ln(x) - x + 3$

$\boxed{7}$

3 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

$\boxed{8}$

1. 8u.a.
2. $\frac{5}{6} \leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{2}$



$\boxed{10}$

1. (a) $I = \frac{1}{2}\ln(3)$
   (b) $J = \frac{5}{72}$
   (c) $K = \frac{5}{2}(\mathrm{e} - 1)$
2. a. en dérivant F. b. $A = 3 - \frac{5}{\mathrm{e}}$.

12

x	0		2		5
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0

On en déduit que l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0;5]$ est :

$$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$$

Avec $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$. Ainsi

$$\mathscr{A} = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2\right]_2^5 \approx 21{,}083\,\text{u.a.}$$

13

4 Calculer des primitives

16 $I = 1 + \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+1)$, $K = L = \dfrac{\pi}{4}$

17 Tout l'exercice repose sur l'idée que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Par conséquent, par exemple, $x^{n+1} \leqslant x^n$. Pour les questions d'encadrement, on utilise la croissance (ou positivité) de l'intégrale.

18

1. $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$
   (a) $f \geqslant 0 \iff x \in [-1;+\infty[$
   (b) $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$, donc f croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$.
   (c) tracé sur calculatrice.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1;n]$, $f(x) \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_1^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
   (b) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, donc la suite est bien croissante.
3. (a) En raisonnant par identification, en dérivant F, $\alpha = -1$, $\beta = -2$.
   (b) D'après le théorème fondamental de l'intégration, $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\mathrm{d}x = F(n) - F(1) = 2\mathrm{e}^{-n} - n\mathrm{e}^{-n} + 3\mathrm{e}^{-1}$.
   D'après le théorème de croissances comparées $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{3}{\mathrm{e}}$. L'aire sous la courbe de f quand $x \geqslant 1$ est finie et vaut un peu plus d'une unité d'aire.