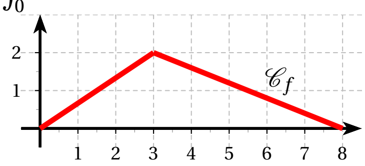
Feuille de TD n°10
TD — Intégration

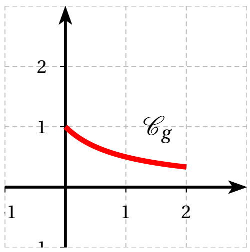
1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

1 Estimer dans chacun des cas suivants les intégrales.

1. $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$



2. Encadrer entre deux fractions $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$, où $g : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ à l'aide de rectangles.



2 Fonction primitive

2 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

1. $F(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2$, $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6x$.
2. $F(x) = 2(3x-1)^5$, $f(x) = 30(3x-1)^4$.
3. $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
4. $F(x) = \frac{x}{2e^x}$, $f(x) = \frac{1-x}{2e^x}$.
5. $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer l'unique primitive H de f sur $]0;+\infty[$ telle que $H(1) = 2$.

4 **Calcul d'aire dans le cas d'une fonction positive :**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 10$.

1. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer l'aire sous la courbe de f sur $[0;2]$.

5 **Cas d'une fonction de signe non constant.**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 7x - 6$.

1. Montrer que -1 est une racine de g et en déduire une factorisation, puis l'ensemble des racines de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur R.
3. Calculer l'aire entre la courbe de g et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-2;3]$.

6 Calcul d'aire et étude de signe
On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x) = x(x-2)(x-5)$.
Après avoir étudié le signe de f sur $[0;5]$, déterminer l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre 0 et 5.

7 **Propriétés de l'intégrale**
On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on connaît les variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$1+e^{-2}$	↘	1

1. Faire un dessin possible de la courbe de f, en faisant figurer tous les éléments du tableau de variations.
2. On définit g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Interpréter graphiquement $g(2)$ et montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $x \geqslant 2$.
   (a) Montrer que $\int_2^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant x - 2$
   (b) En déduire que $g(x) \geqslant x - 2$.
   (c) En déduire la limite de g quand x tend vers $+\infty$.
4. Étudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

8 Pour tout entier naturel n, on considère le nombre $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_1
2. Simplifier puis calculer $u_0 + u_1$.
3. En déduire la valeur de u_0.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n + u_{n+1} = \frac{e^n - 1}{n}$$
5. Calculer les valeurs exactes de u_2, u_3 et u_4.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}(e^t-1)}{1+e^t}\mathrm{d}t$$
7. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3 Calculer des primitives

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive aux fonctions proposées

1. $f_1(x) = 5x^6 - 2x^3 + 3x^2 + 7$
2. $f_2(x) = -2x^8 + 7x^4 + x^3$
3. $f_3(x) = x^7 + 2x^6 - 5x^2 - 1$
4. $f_4(x) = \dfrac{3}{x^7} + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
5. $f_5(x) = 3x^2\left(x^3+2\right)^4$
6. $f_6(x) = \dfrac{-5}{(1-5x)^2}$ sur $\left]\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$.
7. $f_7(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

10 Calculer des intégrales à l'aide de primitives

1. Calculer les intégrales suivantes.
   (a) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x-1}\,\mathrm{d}x$
   (b) $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$
   (c) $K = \displaystyle\int_0^1 5x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
2. (a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

11 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$
2. $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $K = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^3} \frac{1}{x\left(\ln(x)\right)^5}\,\mathrm{d}x$

12

1. On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer J.
   (b) Calculer $I+J$.
   (c) En déduire la valeur de I.
2. On souhaite calculer la valeur de $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$ et $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$
   (a) Calculer $K+L$
   (b) Calculer $K-L$
   (c) En déduire les valeurs de K et L.

13 Suite d'intégrales
On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

14 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;5]$.
2. On note (I_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-x}$, où α et β sont deux réels.
   (a) Déterminer les réels α et β tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (I_n). Donner une interprétation graphique de cette limite.

15 $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n pour tout réel $x \in [0\,;1]$ par $f_n(x) = x + \mathrm{e}^{n(x-1)}$.

1. Quelques propriétés des f_n.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, f_n est croissante sur $[0\,;1]$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 2$.
2. Aires sous les courbes.
   On appelle A_n l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_n$ de la fonction f_n et l'axe des abscisses entre 0 et 1.
   (a) Déterminer une expression de A_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de (A_n) en fonction de n.

16 Intégration par parties
Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

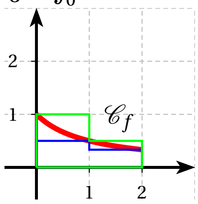
1. $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{10} (2t-1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^0 (4-3t)\mathrm{e}^{3t+1}\,\mathrm{d}t$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (3t-2)\sin(t)\,\mathrm{d}t$
5. $I_5 = \displaystyle\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Feuille de TD n°10
Réponses ou Solutions

1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

1

1. 8u.a.
2. $\frac{5}{6} \leqslant \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{2}$



2 Fonction primitive

3 Toutes les primitives s'écrivent sous la forme $F+k$, où $k \in \mathbb{R}$.
$H(1)=2$ et $H(x)=x\ln(x)-x+k$, donc $H(1)=-1+k=2 \iff k=3$, ainsi, $H(x)=x\ln(x)-x+3$

6

x	0		2		5
$f(x)$	0	+	0	−	0

On en déduit que l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0;5]$ est :

$$\mathscr{A} = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Avec $f(x)=x^3-7x^2+10x$. Ainsi

$$\mathscr{A} = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{7}{3}x^3+5x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4}-\frac{7}{3}x^3+5x^2\right]_2^5 \approx 21{,}083\,\text{u.a.}$$

7

3 Calculer des primitives

9

10

1. (a) $I=\frac{1}{2}\ln(3)$
   (b) $J=\frac{5}{72}$
   (c) $K=\frac{5}{2}(\mathrm{e}-1)$
2. a. en dérivant F. b. $A=3-\frac{5}{\mathrm{e}}$.

12 $I=1+\ln 2-\ln(\mathrm{e}+1)$, $K=L=\frac{\pi}{4}$

13 Tout l'exercice repose sur l'idée que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Par conséquent, par exemple, $x^{n+1} \leqslant x^n$. Pour les questions d'encadrement, on utilise la croissance (ou positivité) de l'intégrale.

14

1. $f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$
   (a) $f \geqslant 0 \iff x \in [-1\,;+\infty[$
   (b) $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$, donc f croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) tracé sur calculatrice.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [1\,;n]$, $f(x) \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_1^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
   (b) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$, donc la suite est bien croissante.
3. (a) En raisonnant par identification, en dérivant F, $\alpha = -1$, $\beta = -2$.
   (b) D'après le théorème fondamental de l'intégration, $I_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\mathrm{d}x = F(n) - F(1) = 2\mathrm{e}^{-n} - n\mathrm{e}^{-n} + 3\mathrm{e}^{-1}$. D'après le théorème de croissances comparées $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{3}{\mathrm{e}}$. L'aire sous la courbe de f quand $x \geqslant 1$ est finie et vaut un peu plus d'une unité d'aire.