

Le sujet est composé de 4 parties indépendantes.

Partie 1 Optique

I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



Figure 1 Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

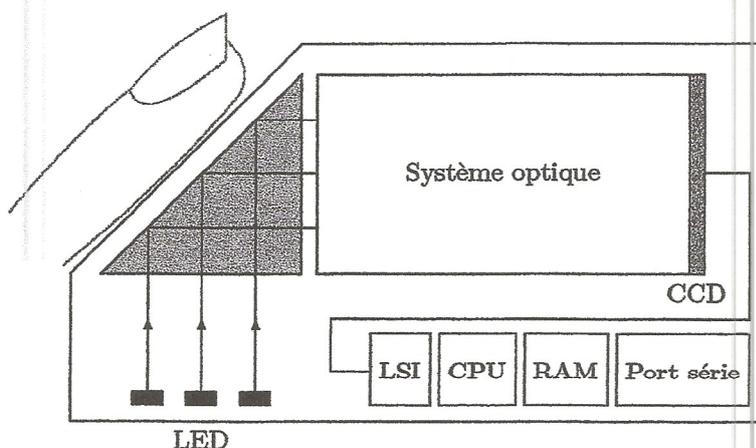


Figure 2 Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre (\mathcal{D}) et d'une lentille convergente (\mathcal{L}) (figure 3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre (\mathcal{D}) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille (\mathcal{L}) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A'_1.$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A'_1}, \quad D = \overline{A A_1}, \quad p = \overline{O A_1}, \quad p' = \overline{O A'_1}.$$

Les sous-parties I.A.1 et I.A.2 sont indépendantes du reste du problème. La sous-partie I.A.3 introduit la suite. Les sous-parties I.B et I.C sont liées par une analogie qu'on souhaite établir entre deux situations, l'une se présentant en physique quantique et l'autre en optique ondulatoire. Néanmoins, en dehors des questions développant l'analogie, les sous-parties sont conçues de manière relativement autonomes.

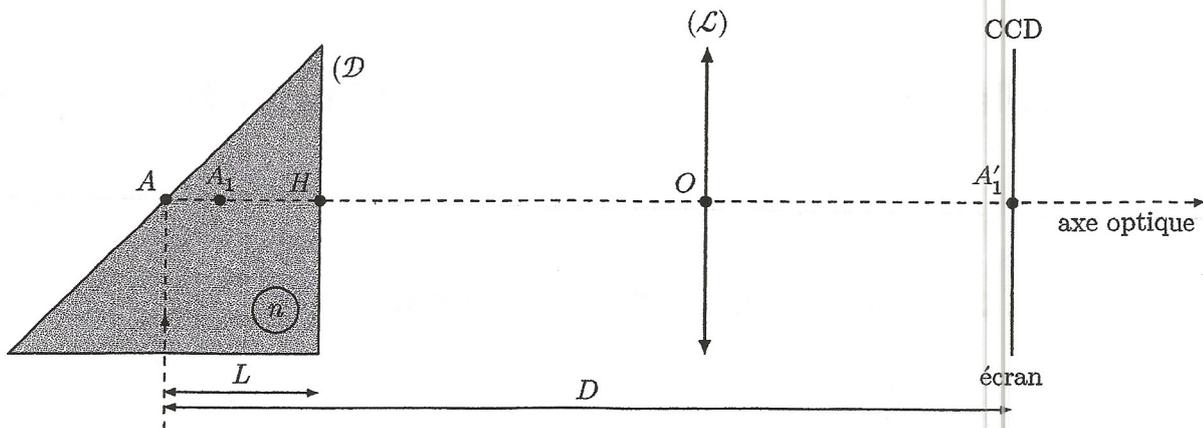


Figure 3 Schéma optique

I.A - Optique géométrique

I.A.1) Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . À cet effet, on donne $n = 1,5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = p'/p$ du système optique.

Q 1. Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit $\overline{HA_1} = \frac{1}{n} \overline{HA}$.

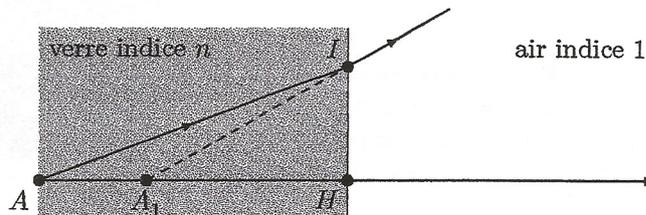


Figure 4

Q 2. Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ . Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ à l'aide de la formule de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.

Q 3. On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport D_1/f' est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par f' .

Q 4. Applications numériques. On suppose $\gamma = -2$. À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa focale ?

Q 5. On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ($|\gamma|$ maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1 . Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

I.A.2) Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en A_1 au lieu de A .

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 30$ μm et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100$ μm . On note l_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1 , à l'écran CCD (figure 5).

Sur la figure 6, les points M_1 , M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M'_1 , M'_2 et M'_3 détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M'_2 ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ .

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$ avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3 . On note alors $\gamma = p'/p$ le grandissement entre les couples de points conjugués (M_1, M'_1) et (M_3, M'_3) . On a $\gamma = -2$.

Q 6. À quelle condition sur a et sur l_c peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommandez-vous ?

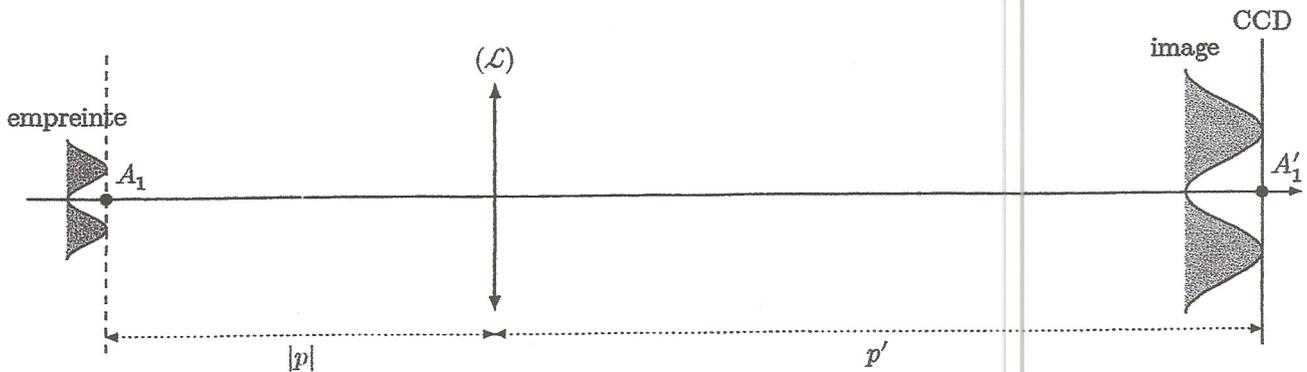


Figure 5

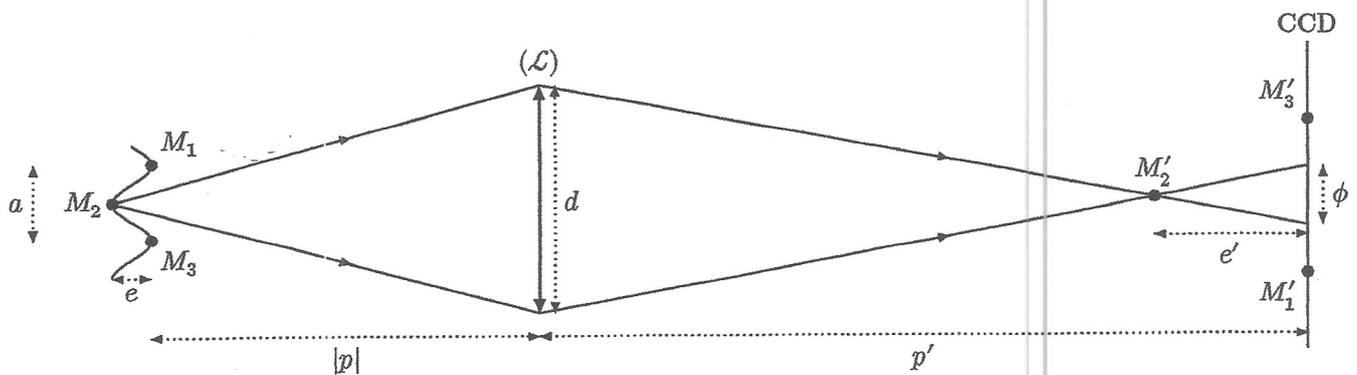


Figure 6 Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

Q 7. On note d le diamètre de la monture de la lentille (\mathcal{L}). Montrer que $\phi = \gamma d \frac{e}{p}$, dans l'approximation $e \ll |p|$.

En notant e' la distance de M'_2 à la surface du capteur CCD, on pourra montrer $e' \approx \gamma^2 e$.

Q 8. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tache excède la distance $M'_1 M'_3$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

I.A.3) Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

Q 9. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

Q 10. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

Q 11. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1,5$.

Dans le montage proposé, la lentille permettra d'obtenir l'image du doigt sur l'écran du CCD. Néanmoins, il faut aborder l'optique ondulatoire pour comprendre comment le doigt est éclairé au travers du prisme.

Partie 2 Filtrage

I Analyse expérimentale des vibrations du verre

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration.

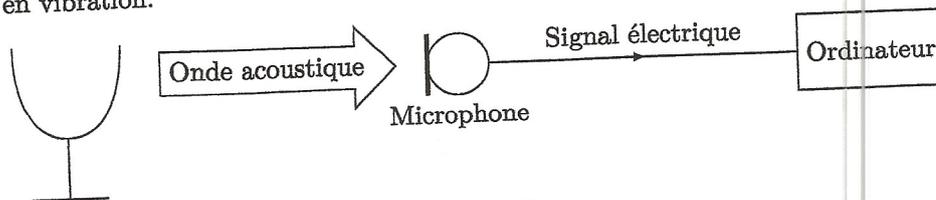


Figure 1

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur. Son analyse spectrale peut alors être réalisée à tout moment de l'enregistrement. Le microphone utilisé pour l'enregistrement présente une courbe de réponse en fonction de la fréquence donnée sur la figure 2.

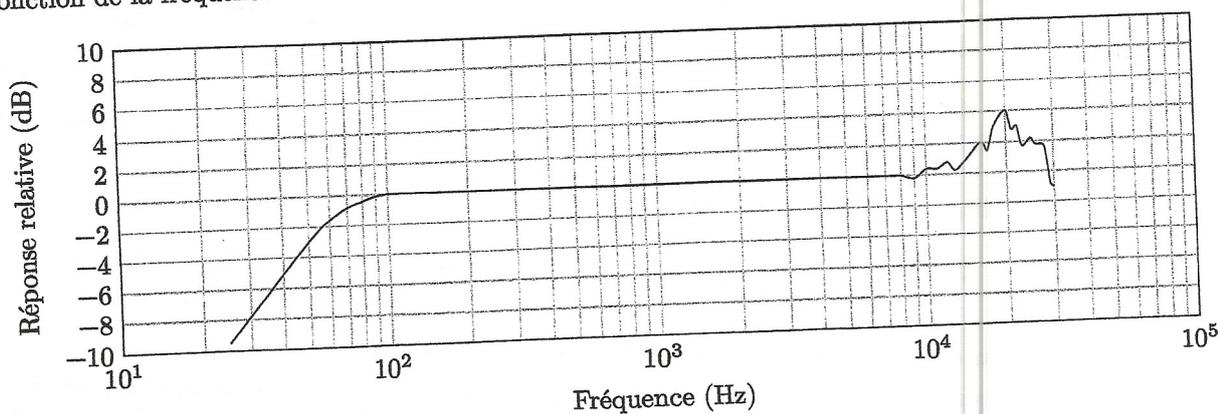


Figure 2 Réponse relative du microphone en fonction de la fréquence

La figure 3 représente le chronogramme de cet enregistrement et la figure 4 une analyse spectrale réalisée peu après le début de l'enregistrement. La figure 5 présente son analyse spectrale aux dates $t = 1,0, 2,0, 3,0$ et $4,0$ s.

I.A - Analyse qualitative de l'enregistrement

Les « pics » représentés dans les analyses spectrales correspondent à des modes propres de vibration du verre.

- Q 1. Que signifie la présence de modes propres dans le signal enregistré ? Comment peut-on les nommer ?
- Q 2. Quelle est la fréquence du signal enregistré ?
- Q 3. En limitant le raisonnement au bord supérieur du verre, estimer la vitesse de propagation de la déformation causée par le choc.

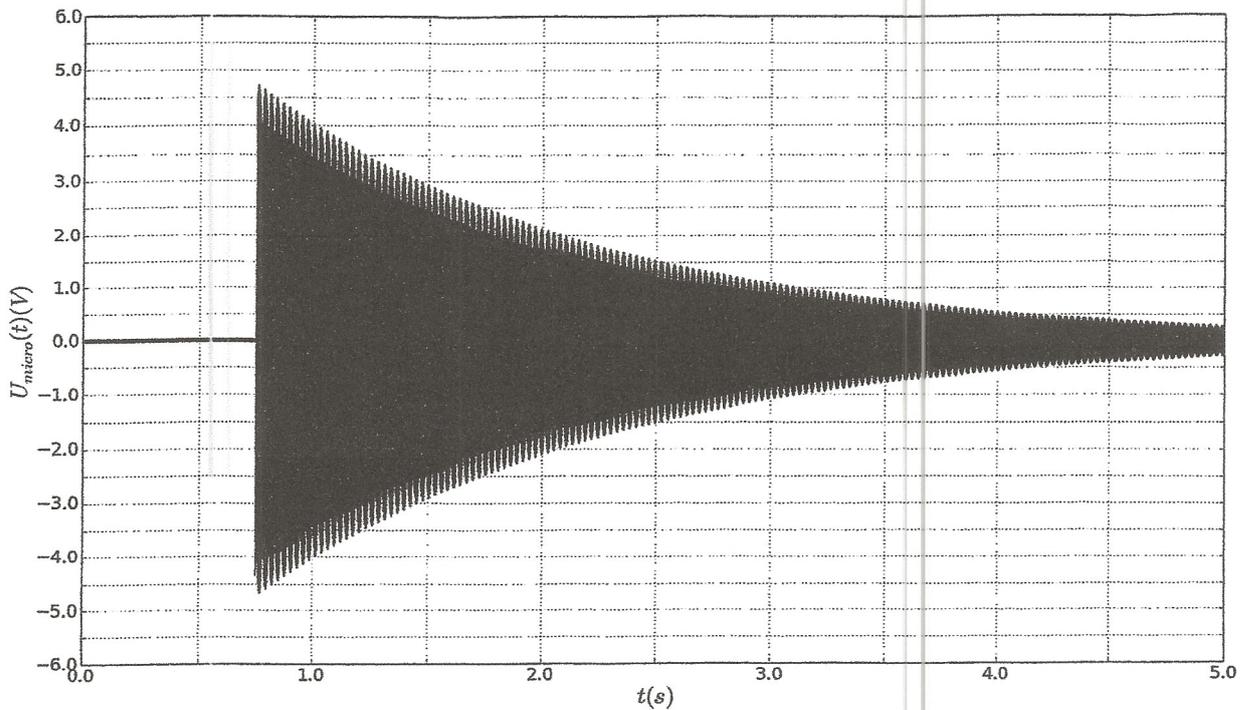


Figure 3 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

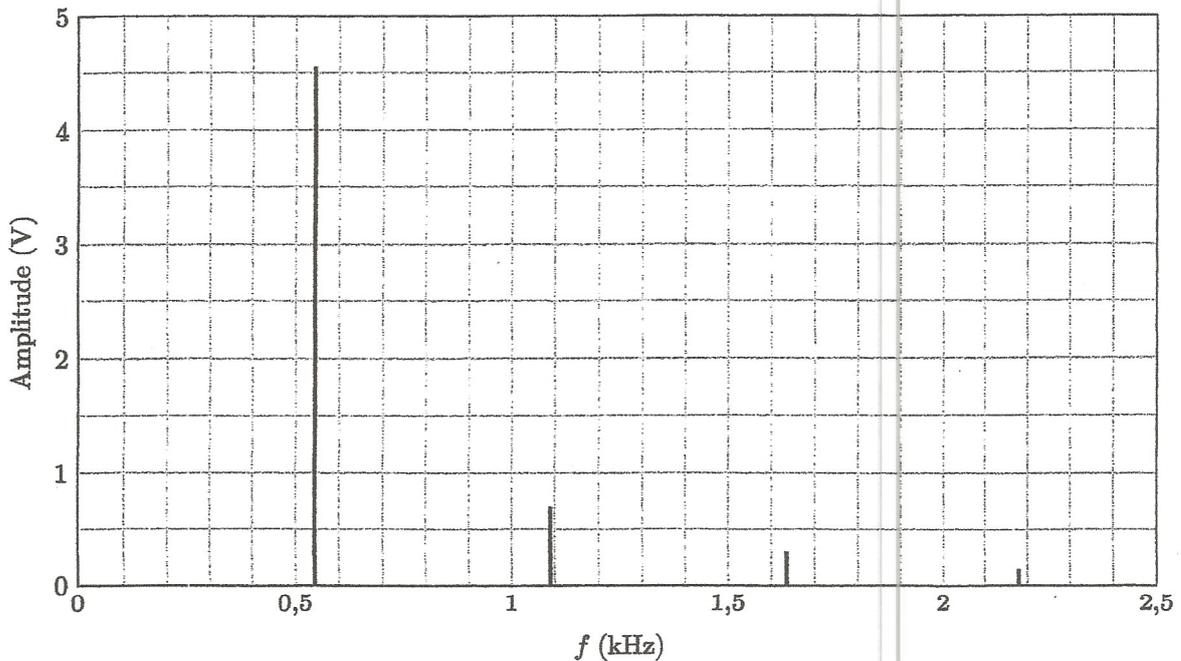


Figure 4 Analyse spectrale du son réalisée peu après la frappe du verre

- Q 4. Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple ; laquelle ?
- Q 5. Quelle caractéristique de la courbe de réponse du microphone est essentielle pour réaliser un enregistrement et une analyse spectrale représentant correctement le phénomène étudié ?
- Q 6. Quelle(s) autre(s) information(s) peut-on déduire des différentes analyses spectrales ?

I.B - Estimation du facteur de qualité Q

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontal associée à un ressort de raideur k , de longueur à vide nulle (figure 6). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où \vec{v} désigne le vecteur vitesse de la masse m .

- Q 7. Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ s'écrit de la façon suivante, avec ω_0 et Q deux constantes que l'on exprimera en fonction de α , k et m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

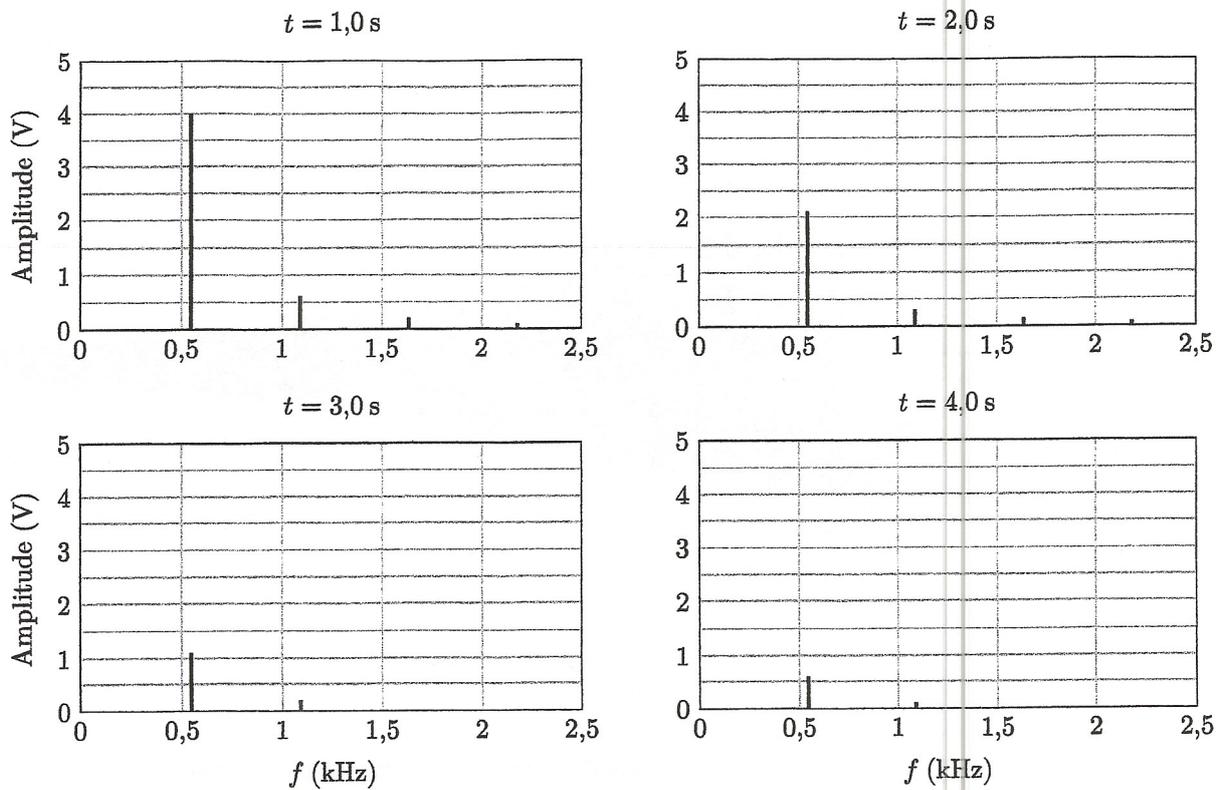


Figure 5 Analyse spectrale du son à différents instants après la frappe du verre



Figure 6 Modèle mécanique du déplacement

- Q 8. Quelle est la signification physique de ω_0 et de Q ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ?
- Q 9. Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas d'un frottement « faible », l'expression approchée de la solution $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{dt}(0) = V_0$. Représenter son allure.
- Q 10. En quoi, l'enregistrement de la figure 3 est-il en accord à la modélisation par un frottement fluide ?
- Q 11. Proposer, à partir de l'évolution temporelle du mode 1 sur les analyses spectrales, un ordre de grandeur du facteur de qualité Q .

Dans la suite de l'expérience, on va chercher à mettre en résonance le verre à l'aide d'une excitation sinusoïdale.

- Q 12. Donner une estimation du temps nécessaire pour mettre le système en régime sinusoïdal forcé.

II Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un hautparleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f . Le verre, placé à proximité du hautparleur (figure 7), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

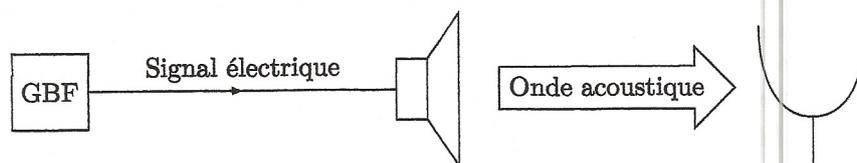


Figure 7

II.A - Approche théorique

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et Φ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X} \exp(j\omega t)$ avec $j^2 = -1$.

- Q 13. Comment nomme-t-on la grandeur \underline{X} ? Que représente son module, son argument ?
 Q 14. Établir l'expression du module de \underline{X} en fonction de ω , ω_0 , A_0 et Q .
 Q 15. À partir d'une étude qualitative, justifier le numéro de graphe de la figure 8 compatible avec le tracé du module de \underline{X} en fonction de la pulsation ω .

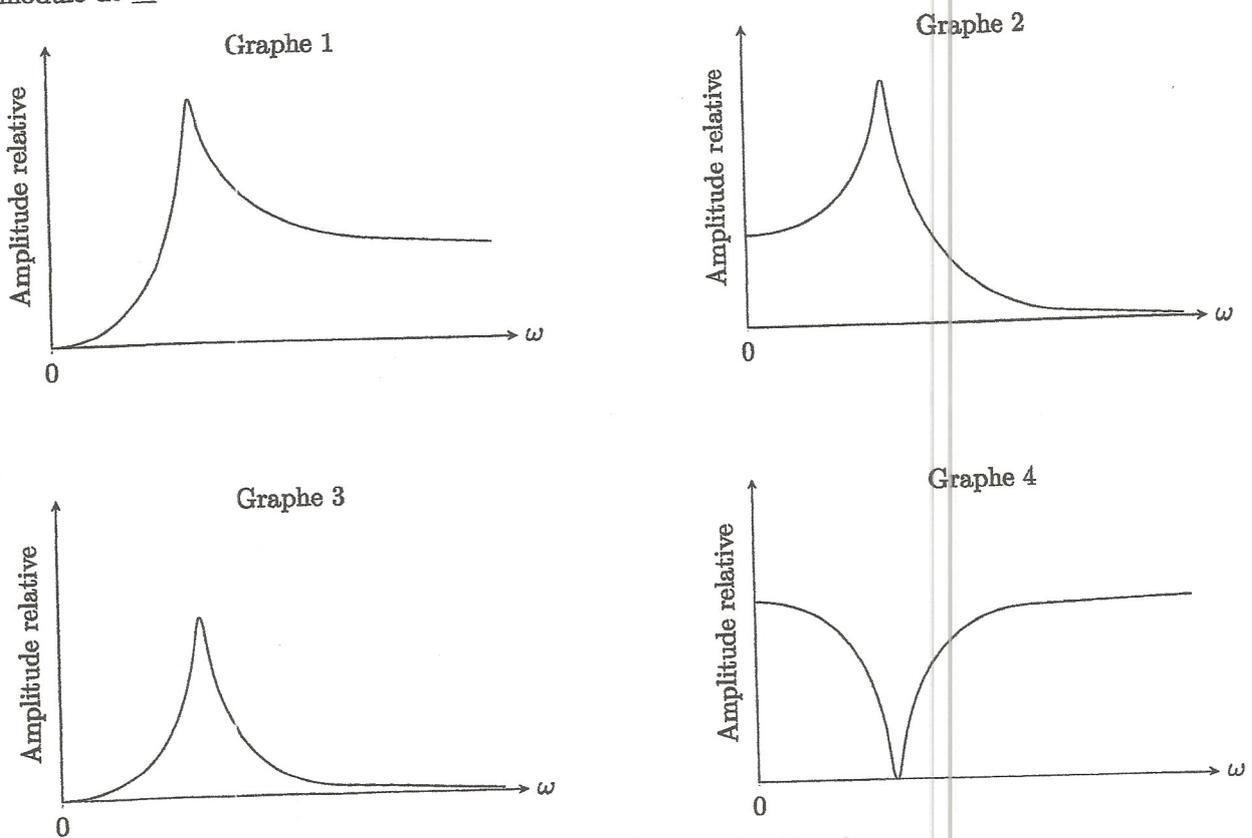


Figure 8 Module de \underline{X} en fonction de ω

- Q 16. À quelle condition sur le facteur de qualité peut-on envisager une résonance d'amplitude ?
 On note Q_0 cette condition.
 Q 17. Dans le cas d'une résonance d'amplitude, exprimer la pulsation correspondante, notée ω_r en fonction de ω_0 et Q .

Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_0$.

- Q 18. Quelle est alors l'expression de la pulsation de résonance ω_r ?
 Q 19. On note X_r le module de \underline{X} pour $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_0 , A_0 et Q .

Partie 3 Mécanique

Partie I - La marche à pied

I.1 - Marcher en montagne

Tout le monde en a fait l'expérience : marcher en montée est plus fatigant que marcher à plat. Le randonneur est un système articulé complexe dont l'étude dépasse le cadre de ce sujet. Nous nous contenterons ici de réfléchir aux différentes contributions énergétiques mises en jeu lorsqu'il se déplace.

On considère un randonneur de masse m , de centre d'inertie I , en mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

L'accélération de la pesanteur, notée $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, est supposée uniforme.

Le randonneur se déplace d'un point A situé en bas d'une colline à un point B situé en haut de la colline comme indiqué sur la **figure 1**.

On note h le dénivelé parcouru par le randonneur $h = z_B - z_A$: où z_A est la coordonnée du point A selon l'axe (O, \vec{e}_z) et z_B celle du point B .

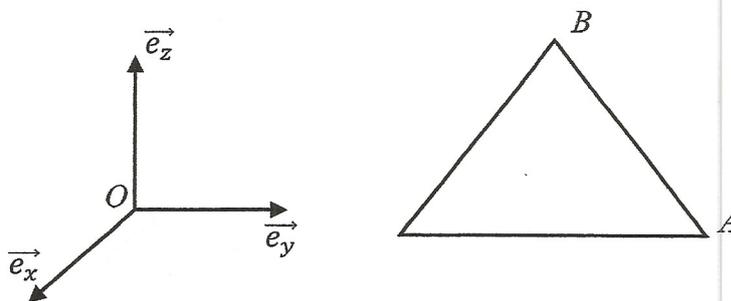


Figure 1 - Colline et base cartésienne

Les frottements de l'air sur le randonneur seront négligés.

Q1. Lorsqu'il marche, le randonneur est soumis à la réaction \vec{R} du sol sur ses pieds. La réaction du sol s'applique à chaque instant en un point de vitesse nulle (le point d'appui du pied). On assimile le pied à un point matériel. Que vaut la puissance de la réaction du sol sur le pied ? Justifier.

On cherche la variation d'énergie mécanique du randonneur. Pour cela, on assimile le randonneur à un point matériel placé en I de coordonnées (x_I, y_I, z_I) .

Q2. Le randonneur est soumis à son poids. Donner ~~avec~~ démonstration l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p du randonneur en fonction de m , g , z_I et d'une constante. Cette énergie potentielle est la seule prise en compte dans notre étude.

Q3. À l'instant initial, le randonneur est en A et a une vitesse nulle. Il s'arrête à l'arrivée en B pour contempler le paysage. Que vaut la variation de son énergie cinétique entre A et B ?

- Q4.** Rappeler la définition de l'énergie mécanique. Déterminer la variation d'énergie mécanique ΔE_m du randonneur entre A et B en fonction de m , g et h .
- Q5.** Lors d'une randonnée, un individu de 60 kg parcourt une distance de 7 km avec un dénivelé de 1 km. L'accélération de la pesanteur est approximée à $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Calculer numériquement la variation de son énergie mécanique.
- Q6.** Calculer à nouveau la variation d'énergie mécanique pour une distance parcourue de 10 km sans dénivelé. Comparer les deux résultats précédents en s'appuyant sur le début de l'introduction de la **sous-partie I.1**.

L'énergie nécessaire à l'ascension du randonneur est apportée par les muscles (assimiler le randonneur à un point matériel n'est ici plus possible : on doit tenir compte des actions intérieures et du travail associé). Lors d'une journée « normale », sans randonnée, un individu consomme $E_n = 12 \text{ MJ}$ en moyenne (pour maintenir sa température à 37°C , respirer, bouger, réfléchir ...).

- Q7.** Quel est le pourcentage d'énergie dépensée en plus par l'individu lors de l'ascension décrite à la question **Q5** par rapport à une journée « normale » ? Commenter sachant qu'une randonnée avec un dénivelé de 1 km dure en moyenne trois heures.

Cette énergie lui est apportée par ce qu'il mange : un joule ingurgité est supposé apporter un joule d'énergie pour le métabolisme de l'individu.

- Q8.** Combien de joules le randonneur doit-il ingurgiter le jour de son ascension pour compenser les dépenses totales de son organisme ? On attend une valeur numérique.

I.2 - Marcher à son rythme pour aller loin

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'allié naturel de nos muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillations d'une jambe adulte en utilisant un modèle mécanique simple.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_o et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal (O, \vec{e}_x) fixe dans le référentiel d'étude. (O, \vec{e}_x) passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la **figure 2**, page 5). La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (O, \vec{e}_x) est noté J . On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à la distance d' de O . La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. γ est l'angle entre la verticale passant par O et la droite (OH) .

L'accélération de la pesanteur est notée $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ et supposée uniforme.

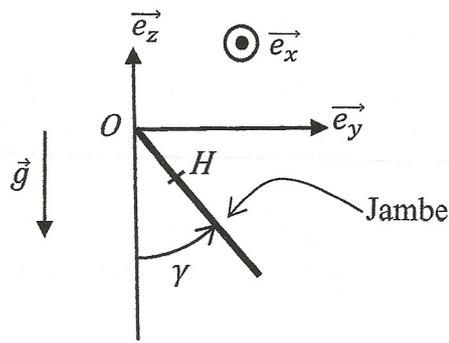


Figure 2 - Jambe et repère cartésien

Q16. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire, L_{Ox} , de la jambe par rapport à l'axe (O, \vec{e}_x) en fonction de γ et J .

Q17. Que vaut le moment par rapport à (O, \vec{e}_x) de l'action mécanique de la liaison en O ? Justifier.

Q18. Déterminer l'expression du moment Γ_{Ox} du poids de la jambe par rapport à (O, \vec{e}_x) en fonction de g , m_o , d' et γ .

Q19. Établir l'équation différentielle vérifiée par γ , caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

Q20. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

L'énergie potentielle de pesanteur de la jambe s'écrit : *Montrer que*

$$E_p = -m_o g d' \cos(\gamma) + \text{constante}. \quad (3)$$

Q21. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.

Q22. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par γ caractérisant le mouvement de la jambe.

Q23. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre T d'oscillations de la jambe est :

$$T = \frac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_o g d'}}. \quad (4)$$

Q24. Le moment d'inertie est de la forme : $J = k m_o d^2$ où k est une constante positive. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

Q25. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90 cm. La période propre d'oscillations de sa jambe est de 1,6 s. Quelle est la période propre d'oscillations de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure environ 40 cm ?

Q26. À l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

Partie 4 Statique des fluides

1.1. Plongée en apnée

L'eau où le plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, en équilibre dans le champ de pesanteur \vec{g} uniforme avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. La surface libre de l'eau (cote $z=0$) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante $p_{\text{atm}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$. On prendra l'axe Oz vertical ascendant.

1. Rappeler l'équation locale d'équilibre des fluides et en déduire l'expression de la pression $p(z)$ dans l'eau en un point de cote $z \leq 0$. Tracer le graphe de $p(z)$ (pour $z > 0$ et $z < 0$), en vous limitant à une altitude faible devant la hauteur d'échelle pour $z > 0$.

On assimile l'air contenu dans les poumons du plongeur à un gaz parfait et on note la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}\text{mol}^{-1}$. Cet air est caractérisé par une pression $p(z)$ identique à celle de l'eau à la cote z , un volume $V(z)$ (capacité pulmonaire) variable car la cage thoracique se déforme sous l'effet de la pression, et enfin une température T constante et indépendante de la profondeur.

2. Calculer la capacité pulmonaire du plongeur à une cote z sachant que celui-ci, avant de plonger, gonfle ses poumons à leur capacité maximale $V_M = 4,0 \text{ L}$ puis bloque sa respiration. Quelle est la valeur de $V(z)$ à $z = -20 \text{ m}$?

3. On définit le poids apparent du plongeur \vec{P}_{app} comme la résultante des forces s'exerçant sur le plongeur (on néglige tout frottement). On définit la flottabilité F par $\vec{P}_{\text{app}} = +F\vec{u}_z$. Expliquer qualitativement comment varie la flottabilité lorsque la profondeur augmente.

Afin de faciliter leur descente lors des premiers mètres, les plongeurs utilisent souvent un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accroché à une ceinture et facilement largable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un surlestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive. On note m la masse du plongeur, $V^*(z)$ le volume de son corps et V_0 le volume de son corps hors celui de la cage thoracique, de sorte que $V^*(z) = V_0 + V(z)$.

4. Quelle masse m_1 de lest choisir si l'on adopte comme règle de sécurité que le plongeur doit avoir une flottabilité nulle à 5 mètres de profondeur ? A.N. : $V_0 = 0,079 \text{ m}^3$ et $m = 80 \text{ kg}$.