Feuille d'exercices 1
LOGIQUE ET RAISONNEMENT

1 - QUANTIFICATEURS

Exercice 1. Traduire en français les énoncés suivants. Quelle est leur valeur de vérité ?

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \leq N$,

(b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$,

(c) $\forall y \geq 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2$,

(d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \geq 0,\ y = x^2$.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Traduire en français les énoncés suivants :

(a) $\forall x \in I,\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$,

(b) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = y$,

(c) $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$,

(d) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$.

Exercice 3. Soient x un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

(a) il existe un réel y strictement supérieur à x,

(b) tout réel négatif est inférieur ou égal à x,

(c) si le cube d'un réel y est égal au cube de x, alors x et y sont égaux,

(d) (u_n) est positive,

(e) (u_n) est majorée,

(f) (u_n) est périodique.

Exercice 4. Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et leur négation :

(a) f s'annule,

(b) f est la fonction nulle sur I,

(c) f n'est pas constante,

(d) f présente un minimum sur I,

(e) f est majorée sur I,

(f) f s'annule exactement une fois sur I.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

(a) $\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$,

(b) $\forall A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$,

(c) $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$,

(d) $\exists A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq A$.

Exercice 6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \Rightarrow x \geq 3$,

(b) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$,

(c) $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ x < \sqrt{x}$,

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \neq y \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{y+1}{y-1}$,

(e) $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geq N$,

(f) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

2 - TYPES DE RAISONNEMENT

Exercice 7. *Principe des tiroirs*

(a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On répartit au hasard $n+1$ chaussettes dans n tiroirs. Montrer qu'au moins un tiroir contient au moins deux chaussettes.

(b) Application : Soit un triangle d'aire 1. Montrer que parmi 9 points à l'intérieur du triangle, il en existe toujours 3 qui délimitent un triangle d'aire inférieure à $\frac{1}{4}$.

Exercice 8. Soit x dans $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 9. Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Exercice 10. Soit x un réel tel que : $\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 11. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 12. Que penser de la preuve suivante ?

Propriété. *Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: Dans une boîte de n crayons, tous les crayons sont de la même couleur.*

Preuve. Quand $n = 1$, l'assertion est vraie. Soit n dans $\mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie pour n crayons. Parmi $n+1$ crayons, les n premiers sont donc de la même couleur, et les n derniers aussi. Donc les $n+1$ crayons sont de la même couleur. Donc par récurrence, l'assertion est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. $\square$

3 - RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Exercice 13. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 14. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 15. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n \text{ fois}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Exercice 16. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 3 \times 2^n$.

Exercice 17. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 18. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq n^2$.

Exercice 19. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1)$.

Exercice 20. Montrer que tout entier supérieur ou égal à 8 peut s'écrire sous la forme $3a + 5b$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}$.