Méthodologie : Séries à termes positifs (Version β)

1 Plan d'étude conseillé

Soit à déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} u_n$.
a) Commencer par observer que la série est bien à termes positifs (à parir d'un certain rang éventuellement) pour appliquer les crit'eres du cours et que, bien sûr, il n' y ait pas de problème de définition.
Si jamais , $u_n < 0$, passez à la série de terme général opposé, qui est de même nature.

b) Ecarter l'éventualité de divergence grossière; si vous pouvez pas conclure rapidement, passez à l'étape c).

c) Utiliser les séries de référence : de Riemann , géométriques et exponentielles pour guider votre démarche.

Comment en pratique procéder pour le moment (vous disposerez dès ce matin de l'arsenal complet) ?

i) Apprécier si possible la vitesse de convergence vers 0 du terme général u_n en le majorant, minorant ou en en donnant un équivalent (ou un terme négligeable ou prépondérant) exprimable si possible à l'aide de termes généraux de série de référence et pertinent afin d'utiliser le principe de comparaison des STP. **C'est la technique fondamentale**.
ii) On peut aussi s'occuper de la suite des sommes partielles et vérifier (ou exploiter dans un cadre plus théorique pour lequel cette approche est efficace).
iii) Beaucoup plus rarement (mais efficace aussi car applicable à toutes les séries et parce qu'en cas de convergence, elle donne immédiatement la somme de cette série) : s'il existe une suite (a_n) telle que $u_n = a_{n+1} - a_n$, on peut procéder à un calcul (télescopage !) simple des sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et conclure aisément.
iv) Si la vitesse de convergence vers 0 du terme général vous apparaît comme rapide et si le maniement du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ semble pertinent , on peut utiliser le critère de d'Alembert (ce qui revient , je le rappelle, à comparer notre série à une série géométrique).
Attention au cas douteux de la règle et aux séries lacunaires.
v) Si la convergence vers 0 du terme général vous semble lente ou si elle est difficile à évaluer, utiliser le critère n^α.
vi) La comparaison série - intégrale (A venir dans une dizaine de jours).

2 Exemples

2.1 Toutes les séries étudiées se noteront $\sum u_n$

Etudier la nature des séries suivantes :

Exercice 1 : $\sum(\sqrt{n+6} - (n+12)^{1/3})$
Exercice 2 : $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$
Exercice 3 : $\sum \frac{n!}{n^{kn}}, k > 0$ (Centrale)
Exercice 4 : $\sum \sin(\pi\sqrt{4n^2+2})$
Exercice 5 : $\sum (n!)^{-1/n^2}$