Feuille d'exercices 2
Calculs algébriques

1 - Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $|x+5| = x-2$

(b) $|2x-1| = |x+4|$

(c) $|x-1| \leq |x+3|$

(d) $|3x| \leq |2x+3|$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$

(b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

(c) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = 2x$

(d) $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x-5}$

(e) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x+1}$

(f) $\sqrt{x - 4\sqrt{x} + 4} \geq 3$

Exercice 3.

(a) Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(a+b)^2 \geq 4ab$.

(b) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

(c) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$.

Exercice 4. Soient a et b deux réels non nuls. Résoudre l'équation en x : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{x+a+b}$.

Exercice 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Montrer que : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ |ab+cd| \leq \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$.
Indication : Étudier le trinôme en x : $(a+bx)^2 + (c+dx)^2$.

2 - Sommes et produits

Exercice 6. Démontrer par récurrence la formule : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7.

(a) Déterminer des réels a, b, c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

(b) En déduire, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 8. Calculer les sommes et les produits suivants, où $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (2k+1)$

(d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

Exercice 9. Calculer $\sum_{k=0}^{9}(k+1)^2$ par linéarité, puis en posant $l=k+1$.

Exercice 10. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\leq\frac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!\leq(n+1)!$

Exercice 11. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 12. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)$

(b) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2$

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}3^i$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j}$

(e) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}\min(i,j)$

(f) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}|i-j|$

3 - Coefficients binomiaux

Exercice 13. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Exercice 14. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $2^n\geq n+1$

(b) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ (1+x)^n\geq 1+nx$

Exercice 15. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\sum_{k,\ 0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}$ et $J_n=\displaystyle\sum_{k,\ 0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}$.
Calculer I_n+J_n et I_n-J_n, et en déduire I_n et J_n.

Exercice 16. Déterminer les suites $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in N}$ telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ (1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$.

Exercice 17. Soit n dans $\mathbb{N}$.

(a) Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}$.

(b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 18. Soit n dans $\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 19. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p\leq n$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

(b) En appliquant la formule ci-dessus pour $p=1$ et $p=2$, retrouver les formules donnant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers carrés.

Exercice 20. Soit n dans $\mathbb{N}$.

(a) Soient i et j deux entiers tels que $0\leq 0\leq i\leq j\leq n$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{j}{i}=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-i}$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}$.