DS 2 (4 heures).

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

1 Exercice

On se donne a un réel strictement positif et on pose $u_n = \dfrac{(3n)!}{a^{3n}(n!)^3}$, ce pour tout n.

i) Pour quelles valeurs de a la règle de d'Alembert permet-elle de donner la nature de $\sum u_n$?

ii) Déterminer celle-ci pour $a = 3$ à l'aide de la formule de Stirling.

2 (Problème 1 : Produits infinis)

Si n_0 est un entier naturel non nul et si $(u_n \ _{n \geq n_0}$ est une suite de **réels non nuls**, on considère la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$dont le terme général est défini par :

$$P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} \times ... \times u_n.$$

On dit que le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0} u_n$, de terme général u_n converge si la suite de ses produits partiels $(P_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un **réel non nul.** On note alors $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n$ cette limite. Dans le cas opposé, on dit que le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

2.1 Généralités et exemples

1) En considérant le quotient $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer qu'il faut, pour que le produit infini $\prod\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge,que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 1.

2) Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Vérifier que : $\forall n \geq 1, P_n = n + 1$.
Quelle est la nature du produit infini $\prod\limits_{n\geq 1} u_n$? La condition nécessaire, trouvée en 1), pour qu'un produit infini converge est-elle suffisante?

3) En exprimant P_n en fonction de $n \geq 2$, prouver que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 2}(1 - \dfrac{1}{n^2})$ converge et préciser la valeur de $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 - \dfrac{1}{n^2})$.

2.2 Liens avec les séries

4) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite à termes strictement positifs.
En raisonnant sur la nature de la suite des sommes partielles, établir que :
le produit infini $\prod_{n\geq n_0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(u_n)$ est une série convergente.

5) L'hypothèse émise en 4) sur $(u_n)_{n\geq n_0}$ est conservée.

a) Prouver que $\prod_{n\geq n_0} (1+u_n)$ est un produit infini convergent si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

b) Retrouver alors que la série harmonique diverge.
c) Si, de plus $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geq n_0$, vérifier sommairement que $\prod_{n\geq n_0} (1-u_n)$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

6) Déterminer la nature des produits infinis qui suivent :
a) $\prod_{n\geq 2} (1 - \dfrac{2}{n(n+1)})$.
b) $\prod_{n\geq 1} (1 + \dfrac{1}{n})e^{-1/n}$.

2.3 Calcul d'un produit infini

7) Soient $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ et $u_n = \cos(2^{-n}a)$, pour tout n.

a) Etablir la convergence de $\prod_{n\geq 0} u_n$.

b) A l'aide de la formule de duplication du sinus, prouver que : $P_n \sin(2^{-n}a) = \dfrac{\sin(2a)}{2^{n+1}}$,pour tout n.
En déduire la valeur de $\prod_{n=0}^{\infty} \cos(\dfrac{a}{2^n})$.

2.4 Un raisonnement d' Euler

8)a) Pour $p \geq 2$ entier naturel, que vaut $\sum_{s=0}^{\infty} p^{-s}$?
b) On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant.

Voici un texte d'Euler datant de 1737 et tiré de son Introduction à l'analyse infinitésimale.

" Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque soit le nombre des facteurs infinis ou finis. Par exemple, on aura $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ...$, série où se trouvent tous les nombres qui sont des puissances de deux. On aura ensuite $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-\frac{1}{3})} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{12} + ...$, série où se trouvent les nombres dont les seuls diviseurs premiers sont deux et trois. De façon plus générale et qu'on pose $P = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11}) \times .....}$, on aura aussi $P = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + ..$, série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui sont formés par la multiplication. Or, comme tout nombre est soit premier soit composé de tels nombres par la multiplication, il est évident que l'on retrouve ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs."
Utiliser librement ce texte pour prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{p_n}$ diverge.

3 Problème : Sommes de Gauss

Dans tout le problème n est un entier naturel non nul et E désigne le $\mathbb{C}$ espace vectoriel $\mathbb{C}^n$.

Les matrices du problème sont à coefficients complexes, carrées d'ordre n.

3.1 Préliminaires

1) Soient A, B deux matrices, prouver que $tr(AB) = tr(BA)$.

2) Montrer que si A, B sont deux matrices semblables, elles ont même trace.

3) Soient u, v deux endomorphismes de E permutables. Etablir que $Ker(u)$ est stable par v.

On se donne $f \in L(E)$ tel que $f^4 = n^2 id_E$.

4) Justifier que $E = Ker(f^2 - nid_E) \oplus Ker(f^2 + nid_E)$. (On se servira du fait que $\dfrac{1}{n}f^2$ est une symétrie (à vérifier) de E)

On pose $F = Ker(f^2 - nid_E)$.

5) Vérifier que F est stable par f.

On note ϕ l'endomorphisme de F induit par f.

6) Prouver que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\phi$ est une symétrie de F puisque $\underline{F = Ker(f - \sqrt{n}id_E) \oplus Ker(f + \sqrt{n}id_E)}$.

On montrerait de même que $Ker(f^2 + nid_E) = Ker(f - i\sqrt{n}id_E) \oplus Ker(f + i\sqrt{n}id_E)$.

Ainsi $E = Ker(f - \sqrt{n}id_E) \oplus Ker(f + \sqrt{n}id_E) \oplus Ker(f - i\sqrt{n}id_E) \oplus Ker(f + i\sqrt{n}id_E)$.

On note b une base de E, adaptée à la décomposition précédente de E en somme directe.

7) Etablir que la matrice de f dans la base b est de la forme :

$$diag(\sqrt{n}, ..., \sqrt{n}, -\sqrt{n}, ..., -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, ..., i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}, ..., -i\sqrt{n}).$$

3.2 Etude d'une matrice de Vandermonde

On pose $\tau = \exp(\dfrac{2i\pi}{n})$ et on note $A_n = (a_{pq})$, où $a_{pq} = \tau^{(p-1)(q-1)}, 1 \leq p, q \leq n$.

On notera G_n la trace de la matrice A_n.

8) Calculer G_1, G_2, G_3, G_4, G_6.

9) Soit r un entier relatif, vérifier que $S_n^r \overset{def}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \tau^{kr} = \begin{cases} n \text{ si } r \text{ multiple de } n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

10) Calculer alors $A_n\overline{A_n}$, où $\overline{A_n} = (\overline{a_{pq}})$. En déduire que A_n est inversible, préciser A_n^{-1} ainsi que $|\det(A_n)|$.

11) Calculer A_n^2. On pose $B_n = \dfrac{1}{n}A_n^2$. Vérifier que B_n est une matrice de symétrie.

On note θ l'endomorphisme canoniquement associé à B_n.

12) Préciser $Ker(\theta - id_E)$ et $Ker(\theta + id_E)$ ainsi que leur dimension. On sera amené à discuter suivant la parité de n.

3.3 Quelques calculs auxiliaires

13) Prouver que $\displaystyle\sum_{1\leq p<q\leq n}(p+q)=\frac{n(n^2-1)}{2}$.

14) Reconnaître le déterminant de A_n, l'exprimer sous forme de produit. Montrer qu'un de ses arguments est $\frac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)$. Pour cela on utilisera la question précédente et l'identité : $e^{i\alpha}-1=2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{i\alpha}{2}}$, α étant un réel.

15)i) Soient r un entier relatif et $G_n^r \overset{def}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\tau^{(r+k)^2}$. En considérant $G_n^{r+1}-G_n^r$, prouver que $G_n^r=G_n$, ce pour tout r.

ii) En déduire que $|G_n|^2=\displaystyle\sum_{0\leq r,s\leq n-1}\tau^{(r+s)^2-r^2}$.

iii) Prouver alors que $|G_n|=\begin{cases}\sqrt{n}\text{ si }n=2p+1\\ \sqrt{2n}\text{ si }n=4p\\ 0\text{ si }n=4p+2\end{cases}$, p étant un entier naturel.

3.4 Vers les sommes de Gauss

16) Expliquer pourquoi A_n est semblable à une matrice diagonale D du type présenté en 7).
On notera a,b,c,d le nombre d'occurences sur la diagonale de D de$\sqrt{n},-\sqrt{n},i\sqrt{n},-i\sqrt{n}$.

17) Exprimer G_n en fonction de a,b,c,d; en déduire la valeur de $(a-b)^2+(c-d)^2$ en fonction de n.

18) Exprimer, en distinguant suivant la parité de n, $a+b$ et $c+d$.

19) Montrer que a,b,c,d vérifient un système de trois équations.

20) Résoudre ce système suivant la parité de n.

21) Cette résolution permet-elle de déterminer a,b,c,d? On pourra utiliser 14).

★